TU Graz

Institut für Geometrie

Neuer Oberstufenlehrplan Darstellende Geometrie

Univ.-Prof. Dr. Otto Röschel
Ass.-Prof. Dr. Sybille Mick

„Aufgaben Frühling 2005“

„Kantenmodelle ausgewählter Modelle von Polyedern der Ikosaedergruppe“

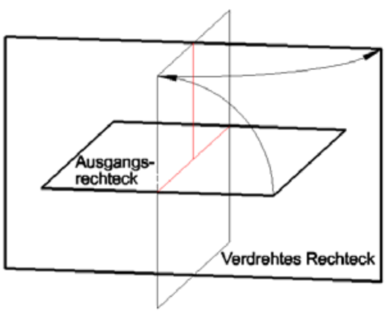
Erstellen Sie Stabmodelle einiger **Polyeder der Ikosaedergruppe** I_h (I_h = {Menge aller Kongruenztransformationen des regulären Ikosaeders mit Einschluss der ungleichsinnigen Kongruenztransformationen} - #(I_h) = 120). Dabei sollen die 30 Stäbe kongruent sein und selbst aus je 4 kongruenten Elementarstücken bestehen.

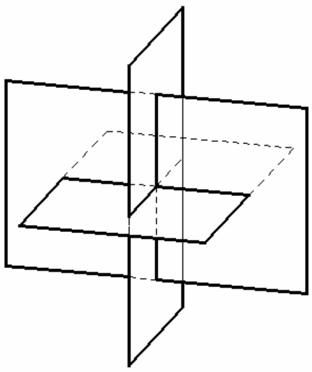
Unser Hauptaugenmerk liegt auf der Umsetzung bekannter raumgeometrischer Überlegungen mit CAD-Paketen. Nach der Herstellung eines „Elementarstückes“ werden räumliche Kongruenztransformationen zur Erzeugung von Stabmodellen der Polyeder eingesetzt. Durch gut strukturiertes Vorgehen lässt sich die große Formenvielfalt in übersichtlicher Weise einheitlich erzeugen.

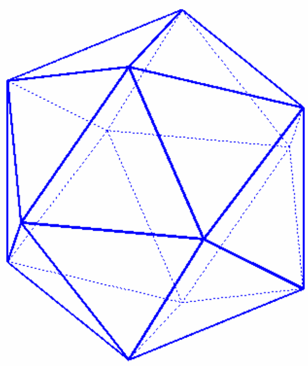
Eigenschaften der Ikosaedergruppe I_h und Relationen zwischen den Polyedern werden nicht bewiesen. Diesbezüglich verweisen wir auf die angegebene Literatur.

A) Reguläres Ikosaeder:

Die Ecken eines regulären Ikosaeders lassen sich als Ecken dreier geeigneter kongruenter Rechtecke gewinnen: Erstellen Sie ein Rechteck (Breite b, Länge a = b*(1+sqrt(5))/2), aus dem ein zweites durch zwei 90°-Drehungen entsteht (Drehachse jeweils in einer Mittenlinie des Rechtecks – erste Drehachse parallel zur langen Seite des Rechtecks - siehe Abb.). Durch analoges Weiterdrehen entsteht daraus das dritte. Das reguläre Ikosaeder selbst wird nun zweckmäßig aus kongruenten Positionierungen der Modelle bzw. Blöcke „Facetten“ (gleichseitige Dreiecke) erzeugt

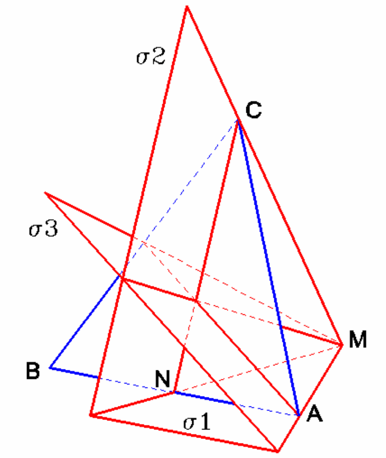




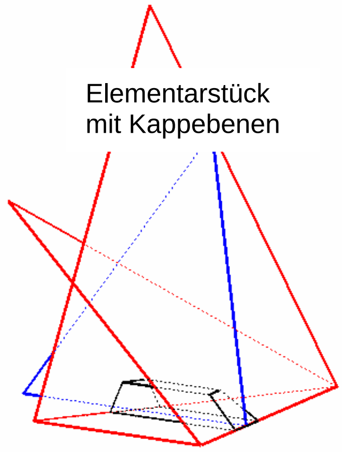


(siehe Abb.).

B) Ein Erzeugendensystem der Ikosaedergruppe: Wir bezeichnen mit A, B, C die Eckpunkte einer Ikosaeder – Facette, mit M den Polyedermittelpunkt und mit N eine Kantenmitte (vgl. Abb.). Die Transformationen der Ikosaedergruppe lassen sich aus Ebenenspiegelungen erzeugen. Ein für uns günstiges Erzeugendensystem besteht aus den Spiegelungen an den 3 Ebenen $\sigma 1, \sigma 2, \sigma 3$ durch M: Zusätzlich enthält $\sigma 1$ die Kante AB, $\sigma 2$ die Facettenhöhe durch den Kantenmittelpunkt N und $\sigma 3$ jene durch den Eckpunkt A.



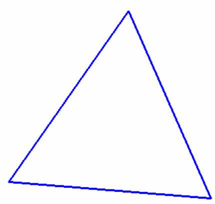
Stabmodell des regulären Ikosaeders: Wir wollen nun längs der Kanten des Ikosaeders prismatische Stäbe positionieren. Dazu positionieren wir längs der Kante AB einen prismatischen „Rohling“ (Extrusion einer geeigneten Figur längs der Kante AB – achten Sie darauf, dass das Objekt zum Abkappen lang genug ist!) und schneiden die über die drei Symmetrieebenen ragenden Stücke weg. Dadurch haben wir ein „**Elementarstück des Stabmodells**“ erzeugt, das in das Dreikant der drei Symmetrieebenen $\sigma 1, \sigma 2, \sigma 3$ eingespannt ist. Die 120 Kongruenztransformationen der Gruppe I_h erzeugen daraus ein Stabmodell des Ikosaeders.

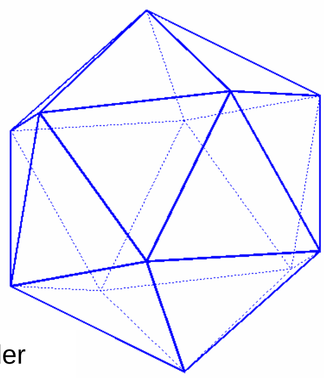

Elementarstück mit Kappebenen

C) Hierarchische Struktur (Modelle bzw. Blöcke) zur Erzeugung des Stabmodells: Wir empfehlen dafür die folgendes Vorgehen: Definieren Sie folgende hierarchisch geordnete Blöcke bzw. Modelle:

Elementarstück – Facettenstück – Polyeder

Am günstigsten wird das Modell bzw. der Block „**Facettenstück**“ vorerst als gleichseitiges Dreieck ABC in 20 kongruenten Exemplaren auf das Ikosaeder (Modell bzw. Block „**Polyeder**“) gelegt. Damit haben Sie ein Kantenmodell des Ikosaeders gewonnen.

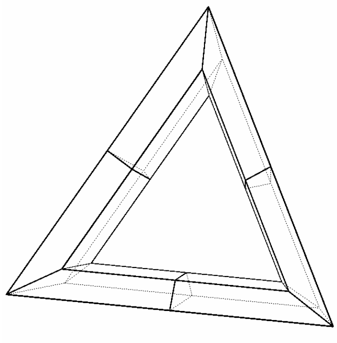

Facettenstück


Polyeder

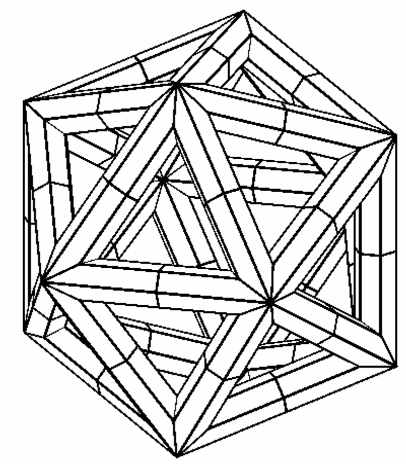
Das „**Elementarstück**“ wird als eigenständiges Modell (bzw. Block) hergestellt (siehe oben).

Nun ändern Sie das Modell bzw. den Block „**Facettenstück**“: Fügen Sie ins Facettenstück 6 kongruente Exemplare des „Elementarstückes“ ein: Das Elementarstück wird z.B. durch fortgesetztes Spiegeln an den Symmetrieebenen $\sigma 2$ und $\sigma 3$ zu insgesamt 6 Teilen ausgebaut, die das Facettenstück ergeben (siehe Abb.). Schalten

Sie nun das Dreieck ABC weg – das Modell bzw. Block „Polyeder“ liefert dann sofort das Stabmodell (vorerst des Ikosaeders – siehe Abb.).

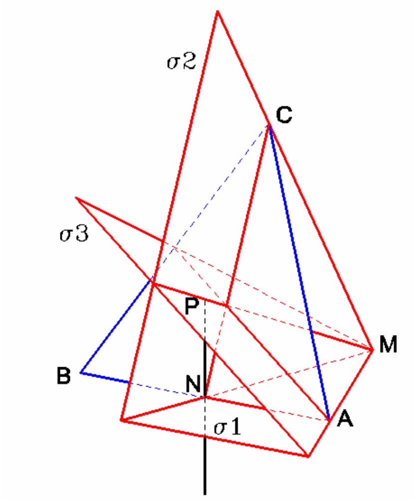


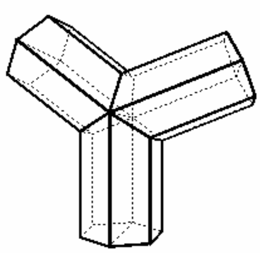
Facettenstück

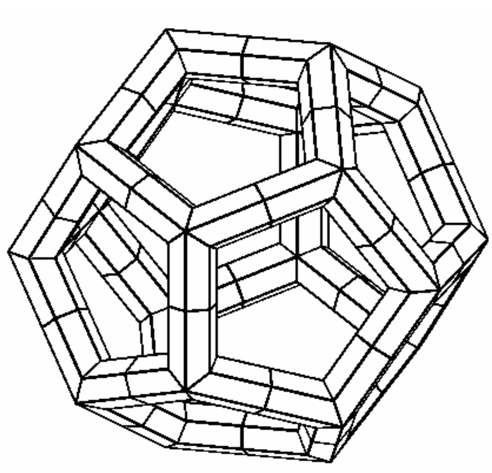


Bemerkungen: 1) Der skizzierte hierarchische Aufbau garantiert die Anwendung der Ikosaedergruppe I_h auf das Elementarstück. Damit wird ein Stabmodell des zugehörigen Polyeders erzeugt, auch wenn das Elementarstück geändert wird.
2) Dies gilt auch für die anderen Polyeder der Ikosaedergruppe. Wir werden Stabmodelle dieser Polyeder im Folgenden konsequent durch Überschreiben des „Elementarstückes“ erzeugen.
3) Wenn Sie das Elementarstück durch Extrusion eines regulären Vielecks erzeugen, das die Ebene $\sigma 1$ als Symmetrieebene besitzt, fügen sich die zu zwei Nachbar-Facettenstücken gehörenden Elementarstücke wieder zu einem Prisma mit dem Ausgangsvieleck als Basis zusammen, ohne dass Sie das Raumobjekt doppelt überdecken.

D) Das reguläre Pentagondodekaeder als das zum Ikosaeder „polare Polyeder“: Das reguläre Ikosaeder besitzt eine sogenannte „Kantenkugel“ – diese im Polyedermittelpunkt zentrierte Kugel berührt alle Kanten des Polyeders. Wird nun das Ikosaeder an dieser Kantenkugel polarisiert, so entsteht das „**polare**“ (oder „duale“) Polyeder – es handelt sich um ein reguläres Pentagondodekaeder. Insbesondere werden dabei Kugeltangenten um den Berührdurchmesser der Kugel um 90°gedreht. Die Kante AB geht bei dieser Drehung (um [MN]) in eine Kante durch N über, die auf die Symmetrieebene $\sigma 1$ normal steht – der Schnittpunkt P dieser Geraden mit den beiden Symmetrieebenen $\sigma 2$ und $\sigma 3$ ist eine Ecke des polaren Pentagondodekaeders (vgl. Abb.). PN liefert eine halbe Kante dieses Pentagondodekaeders - auf sie werden wir unser Stabmodell gründen.

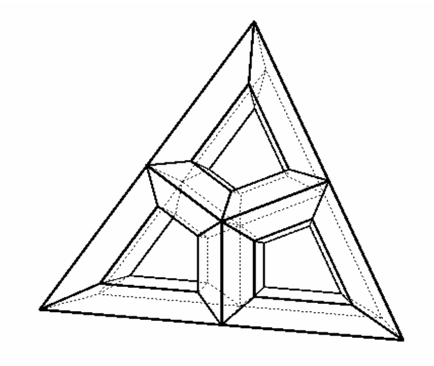


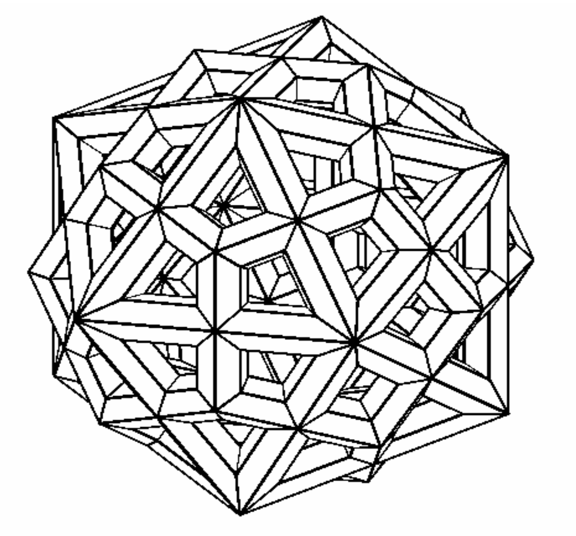




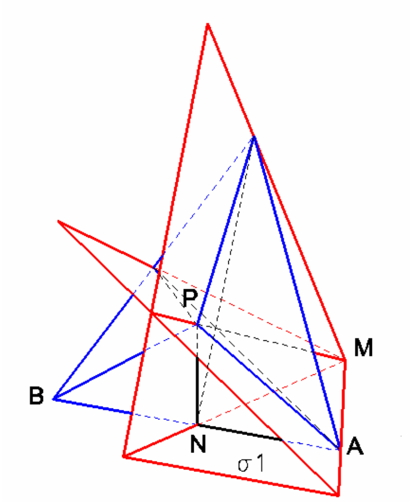
Da beim Polarisieren die Symmetrieebenen erhalten, lässt sich durch einfaches Ersetzen des Elementarstückes durch ein um 90° gedrehtes (Drehachse NM) mit derselben Datenstruktur (und denselben Kappebenen!) das reguläre Pentagondodekaeder erzeugen: Die Abbildung oben zeigt das „Facettenstück“ für das Pentagon-Dodekaeder sowie das Objekt selbst.

Ikosaeder und Pentagondodekaeder sind in der untenstehenden Figur dargestellt (links das „Facettenstück“).

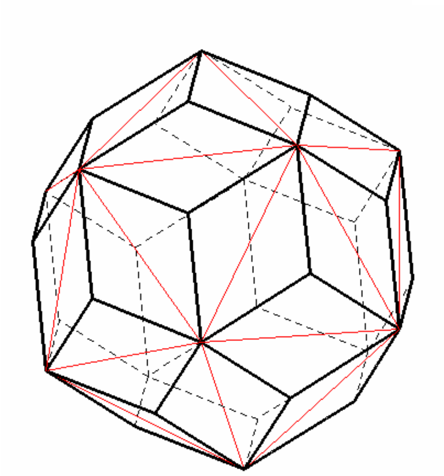




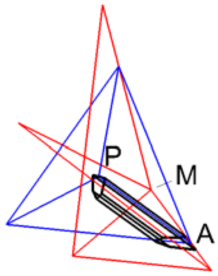
E) Rhomben – 30- Flächner (Rhombentriakontaeder): Der Rhomben-30-Flächner bildet die konvexe Hülle der beiden oben erzeugten Polyeder. Seine Facetten werden von 30 kongruenten Rhomben gebildet. Seine Grundstruktur ergibt sich aus dem regulären Pentagon - Dodekaeder bzw. dem regulären Ikosaeder durch Aufsetzen geeigneter Pyramiden auf die einzelnen Facetten (siehe Figur rechts). Die nebenstehende Figur zeigt das Rhomben-Triakontaeder, wenn es aus dem Ikosaeder erzeugt wird: ABP ergibt einen „halben“ Rhombus - die Ikosaederkante AB ist die lange Diagonale. Die kurze Diagonale stammt vom Pentagondodekaeder und steht normal auf die Symmetrieebene $\sigma 1$.

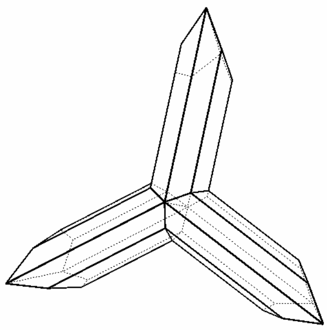


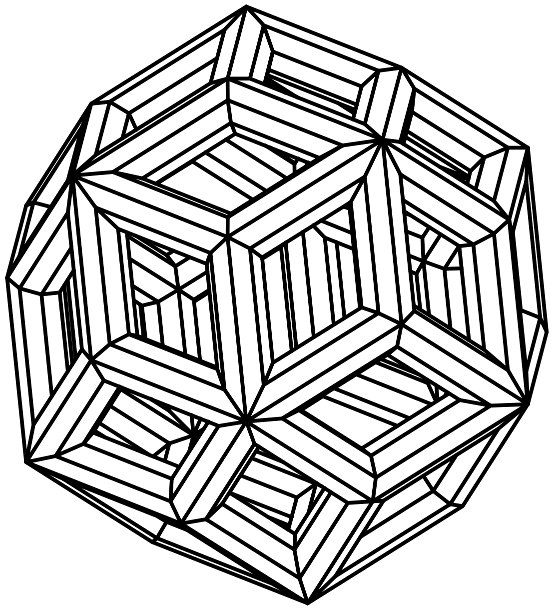
Im Bild des Polyeders sind einige Ikosaederkanten als (lange) Diagonalen der Rhomben zu sehen (sie sind aber keine Kanten des Rhomben-30-Flächners!).



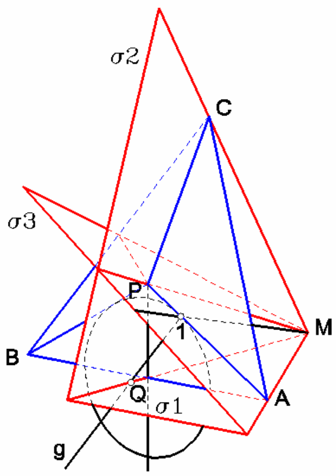
Die Symmetrieoperationen der Ikosaedergruppe I_h führen auch dieses Polyeder wieder in sich über. Als „Startpunkt“ zur Konstruktion eines Stabmodelles kann daher wieder die Facette des Ikosaeders mit dem Tetraederaufsatz (und den Symmetrieebenen von oben) dienen. Als „Elementarstück“ kann ein Prisma längs der Kante AP dienen, das an den Symmetrieebenen gekappt wird. Die folgende Abbildung zeigt der Reihe nach das „Elementarstück“, das „Facettenstück“ und das Stabmodell („Polyeder“).



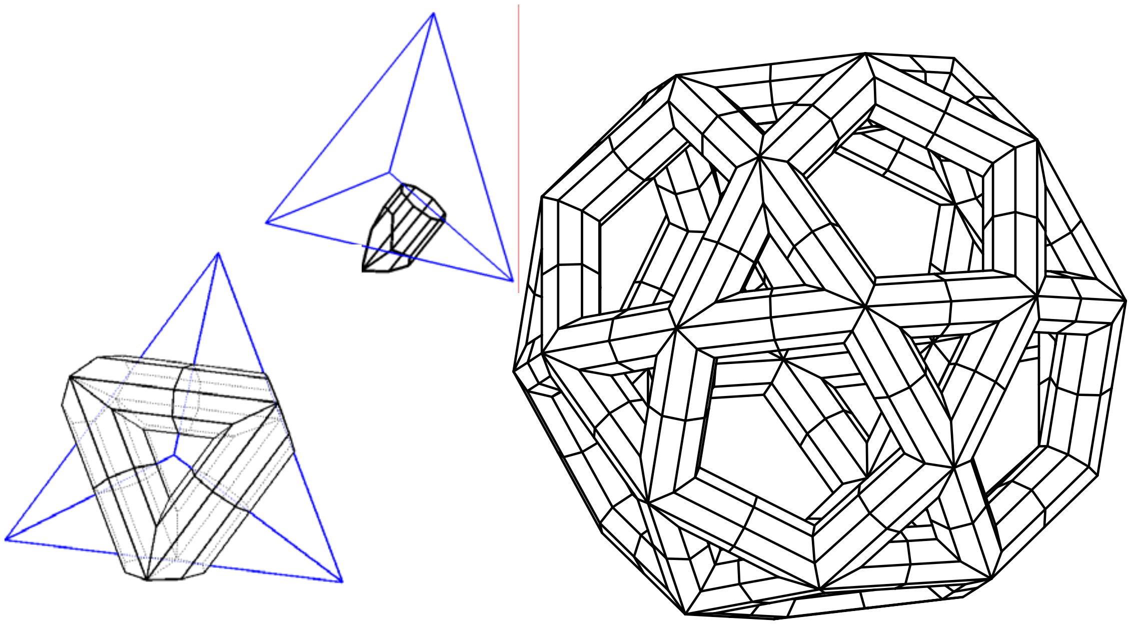




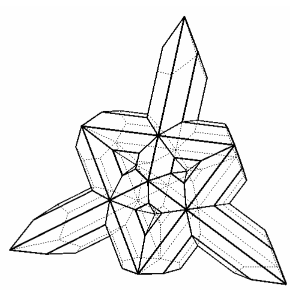
F) Das eckengestutzte reguläre Pentagondodekaeder als das zum Rhomben-30-Flächner polare Polyeder: Die Rhomben des 30-Flächners besitzen Inkreise (sie gehören der Kantenkugel des Rhomben – 30 – Flächners an - in der Abbildung unten wurde der Berührpunkt der 30-Flächner-Kante [AP] mit 1 bezeichnet). Wird die Gerade [AP] um die Verbindung dieses Berührpunktes 1 mit der Polyedermitte M um 90° gedreht, so entsteht eine Gerade g (normal zur Symmetrieebene $\sigma 3$). Sie geht bei den Transformationen der Gruppe I_h in die Trägergeraden der Kanten eines eckengestutzten regulären Pentagondodekaeders über. Der Schnittpunkt Q von g mit der Symmetrieebene $\sigma 1$ ist eine Ecke dieses zum Rhomben – 30 – Flächner polaren Polyeders.

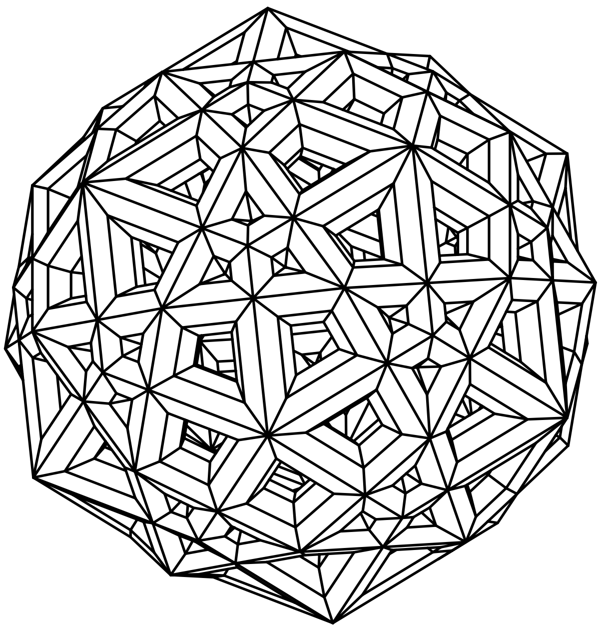


Die folgende Abbildung zeigt ein prismatisches Teilstück (Extrusion längs [Q1]), das als „Elementarstück“ für dieses Polyeder dienen kann, sowie das sich daraus ergebende „Facettenstück“ und das gesamte Stabmodell („Polyeder“).

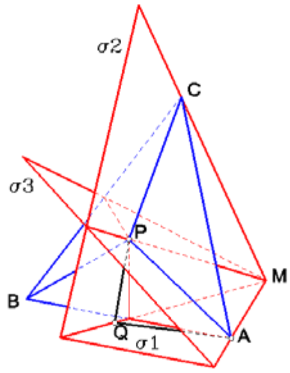


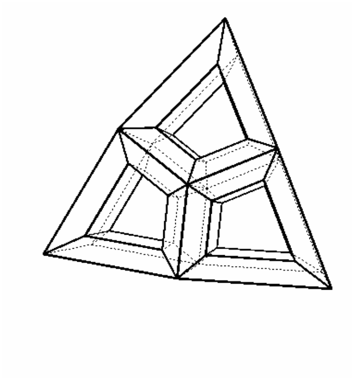
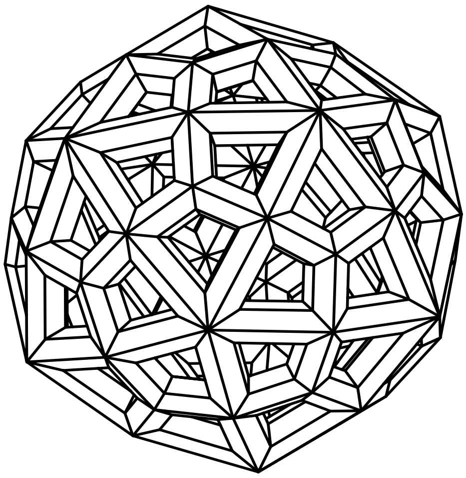
Der Rhomben – 60 - Flächner und das bzgl. seiner Kantenkugel polare eckengestutzte Pentagondodekaeder sind in der folgenden Abbildung gemeinsam mit dem zugehörigen Facettenstück dargestellt.





G) Deltoid – 60- Flächner: Dieses Polyeder bildet die konvexe Hülle der beiden eben erzeugt Polyeder. Seine Facetten sind 60 kongruente Deltoide. Seine Kanten werden wie folgt ermittelt: Das Dreieck AQP (siehe Abb.) stellt eine Hälfte eines Deltoides dar. Positionieren Sie längs des Kantenzuges A,Q,P einen Rohling, der nach dem Kappen an unseren 3 Symmetrieebenen als „Elementarstück“ für das zugehörige Polyeder dient.



Die Abb. zeigt das Facettenstück und das so erzeugte Kantenmodell des Deltoid – 60 – Flächners.

Bemerkungen: 1) Dieses Polyeder besitzt keine Kantenkugel mehr! Erzeugt man das Elementarstück wie bisher durch Extrusion längs des Kantenzuges A,Q,P, so ensteht beim Spiegeln an den Symmetrieebenen $\sigma 1, \sigma 2, \sigma 3$ wohl ein Stabmodell des Polyeders. Seine Stäbe sind aber keine Prismen mit regelmäßigen Normalschnitten mehr! Dies ist auch bei unserer Abbildung der Fall: Hier wurde ein längs der Kante AQ verlaufendes Prisma an der Symmetrieebene von $\sigma 1$ und $\sigma 2$ gekappt. Der entstehende Schnitt wurde längs QP extrudiert. Danach erfolgte das Kappen an allen 3 Symmetrieebenen $\sigma 1, \sigma 2, \sigma 3$.
2) Will man nicht darauf verzichten, das Stabmodell aus Prismen mit regelmäßigen Normalschnitten zu erzeugen, so ist die erzeugende Gruppe zu verkleinern.

Viel Spaß und Erfolg bei der Erstellung dieser Stabmodelle!

Literatur:

J. Böhm – E. Quaisser: Schönheit und Harmonie geometrischer Formen. Akademie Verlag, Berlin 1991.

H. S. M. Coxeter: Regular Polytopes. Dover, New York 1973.

P. R. Cromwell: Polyhedra. Cambridge Univ. Press, Cambridge 1997.

L. Fejes – Toth: Regular Figures. Int. Series of Monogr. in Pure and Appl. Math. 48, Pergamon, Oxford 1964.

Eine ganze Reihe von Stabmodellen dieser Art wurden von G. Schröpfer hergestellt. Sie können auf der Website http://geometrie.asn-graz.ac.at/geof/ aufgerufen werden.

Mit **Fragen und Anregungen** wenden Sie sich via E-mail an roeschel@tugraz.at oder mick@tugraz.at.