BÖSCHUNGSLINIEN - ZWANGLÄUFE

O. RÖSCHEL

Institut für Mathematik und Angewandte Geometrie, Montan - universität Leoben, Franz - Josef - Straße 18,
A - 8700 Leoben, Austria

Zusammenfassung - Es wird gezeigt, daß außer den räumlichen Zwangläufen mit durchwegs ebenen Bahnkurven nur noch die Schiebungen längs Böschungslinien und die einparametrigen Schraubungsgruppen zu jenen Zwangläufen des dreidimensio - nalen euklidischen Raumes $\mathbb{E}_3$ zu zählen sind, die alle Punkte des Gangraumes auf Böschungslinien führen.

EINLEITUNG

Für den Praktiker ist es unter Umständen von Bedeutung, räumliche Zwangläufe anzugeben, bei denen sämtliche Punkte des Gangraumes Σ Bahnkurven konstanter Steigung (*Böschungslinien*) besitzen; der Sonderfall jener Zwangläufe, bei denen alle Bahnkurven eben sind (Steigung = 0), hat ja bekanntlich große Bedeutung erlangt (vgl. G. DARBOUX [2]). Hier soll in Verallgemeinerung der DARBOUX'schen Fragestellung geklärt werden, ob es neben bekannten Beispielen auch weitere räumliche Zwangläufe Σ/Σ' gibt, bei denen *alle* Punkte des Gangraumes Σ *Böschungslinien als Bahnkurven* besitzen. Diese Arbeit schließt so an Untersuchungen von H.R. MÜLLER [6] an, der räumliche Zwangläufe studierte, bei denen die Punkte einer Geraden bzw. Ebene des Gangraumes Σ Böschungslinien als Bahnkurven besitzen. Dabei wurden allerdings nur Böschungslinien bezüglich einer rastfesten Richtung zugelassen; eine Voraussetzung, die hier fallengelassen werden muß. Auch H. SCHAAL hat sich in [8] mit Problemen dieser Art beschäftigt : Er gibt *Affinbewegungen* an, bei denen die Punkte des Gangraumes Σ auf Böschungslinien von Quadriken geführt werden.

1. GRUNDLAGEN

Im reellen dreidimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}_3$ - wir werden fallweise auch die komplexe Erweiterung vornehmen - weisen wir den Punkten die üblichen homogenen Koordinaten $(x_0:x_1:x_2:x_3) \neq (0:0:0:0)$ zu. Dann wird durch

$$x_0'(t) = x_0$$
$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix} = x_0 \cdot \begin{bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \\ d_3(t) \end{bmatrix} + A(t) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

mit reeller orthogonaler 3x3 - Matrix $A(t) = (a_{ij}(t))$ und reellwertigen, analytischen Funktionen $d_i(t)$, $a_{ij}(t)$ $(i,j = 1,2,3;\ t \in (-\infty,+\infty))$ ein *analytischer räumlicher Zwanglauf* Σ / Σ' im Sinne eines im $\mathbb{P}_3$ eingebetteten *euklidischen Raumes* $\mathbb{E}_3$ erklärt †), der sich auf den in der *Fernebene* ω $(x_0 = 0)$ gelegenen *absoluten Kegelschnitt* m

$$x_0 = 0\ , \quad (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 0 \qquad (2)$$

als Maßgebilde stützt. Im folgenden setzen wir für $t = 0$ die Anfangsbedingungen

$$a_{ij}(0) = \delta_{ij},\ d_i(0) = 0 \qquad (i,j = 1,2,3) \qquad (3)$$

mit den Kroneckersymbolen δ_{ij} voraus. Gemäß [1, S. 33] kann dann der Zwanglauf (1) in der Umgebung von $t = 0$ in der Normalform

---

†) Bei diesem Ansatz wollen wir Momentanschiebungen ausschließen; sie spielen im folgenden keine wesentliche Rolle.

$$\begin{cases} x_o'(t) = x_o \\ x_1'(t) = x_1 - t.x_2 + \frac{t^2}{2}.(\varepsilon.x_3 - x_1) + \frac{t^3}{6}.((1+\varepsilon^2)x_2 + \gamma_2 x_3 + d_{31}x_o) + \ldots \\ x_2'(t) = x_2 + t.x_1 + \frac{t^2}{2}(\mu.x_o - x_2) + \frac{t^3}{6}(-(1+\varepsilon^2)x_1 + (\frac{3}{2}\varepsilon - \gamma_1)x_3 + d_{32}x_o) + \ldots \\ x_3'(t) = x_3 + t\sigma x_o + \frac{t^2}{2}(\lambda.x_o - \varepsilon x_1) + \frac{t^3}{6}(-\gamma_2 x_1 + (\frac{3}{2}\varepsilon + \gamma_1)x_2 + d_{33}x_o) + \ldots \end{cases} \quad (4)$$

dargestellt werden, wobei alle auftretenden Koeffizienten γ_1, $\gamma_2, \varepsilon, \lambda, \mu, \sigma, d_{31}, d_{32}, d_{33}$ reelle Konstanten sind.

Punkte des Gangraumes Σ, die zum Zeitpunkt $t = 0$ *Wendepunkte ihrer Bahnen durchlaufen*, liegen im allgemeinen auf einer Raumkurve dritter Ordnung $w(0)$ (vgl. [1, S. 165]). Genau für $\varepsilon = \lambda = \sigma = 0$ ist $w(0)$ eine zweiparametrige Mannigfaltigkeit. Es handelt sich dabei mit [11, S. 358] im allgemeinen um den *Drehzylinder $W(0)$*

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 = \mu.x_o.x_2 \;, \quad (5)$$

der die Momentanachse $a(0)$ enthält. $\varepsilon = \lambda = \sigma = 0$ kennzeichnet eine Getriebestellung, in der eine *oskulierende Zylinderrollung* vorliegt.

Punkte des Gangraumes Σ, die zum Zeitpunkt $t = 0$ *Henkelpunkte ihrer Bahnen durchlaufen* - sie besitzen momentan stationäre Schmiegebenen -, sind durch

$$\det \begin{vmatrix} -x_2 & \varepsilon x_3 - x_1 & (1+\varepsilon^2)x_2 + \gamma_2 x_3 + d_{31}x_o \\ x_1 & \mu x_o - x_2 & -(1+\varepsilon^2)x_1 + (\frac{3}{2}\varepsilon - \gamma_1)x_3 + d_{32}x_o \\ \sigma x_o & \lambda x_o - \varepsilon x_1 & -\gamma_2 x_1 + (\frac{3}{2}\varepsilon + \gamma_1)x_2 + d_{33}x_o \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

gekennzeichnet. Liegt für $t = 0$ in (1) ein Zwanglauf Σ / Σ' vor, der von einem *Zwanglauf mit durchwegs ebenen Punktbahnen* †)

†) Solche Zwangläufe werden wir E - Zwangläufe nennen. Sie wurden unter anderem von G. DARBOUX [2], G.R.VELDKAMP [11] und H. VOGLER [12] studiert.

hyperoskuliert wird, so ist (6) für alle Punkte des Gangraumes Σ erfüllt. Ist das nicht der Fall, so stellt (6) im allgemeinen eine Fläche dritter Ordnung dar, die wir *Henkelpunktsfläche* $X(0)$ von Σ / Σ' zum Zeitpunkt $t = 0$ nennen wollen. $X(0)$ kann auch *zerfallen*, wobei für uns nur ein Typ von Bedeutung ist : $X(0)$ *zerfällt in die Fernebene* ω *und einen weiteren Bestand - teil* $X^*(0)$: Dies ist mit (6) genau für $\varepsilon = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ der Fall, was zur Folge hat, daß der Zwanglauf (1) zum Zeitpunkt $t = 0$ von einer *Zylinderschrotung hyperoskuliert wird* (vgl. [1, S. 312 ff.])[†] $X^*(0)$ ist dann entweder ein Drehzylinder parallel zur Momentanachse $a(0)$ - der auch in zwei konjugiert komplexe Ebenen zerfallen kann - oder besteht nur aus einer zur Momentanachse parallelen reellen Ebene.

Die Fernkurve $k(0)$ der Henkelpunktsfläche $X(0)$ (6) wird im allgemeinen durch

$$x_0=0,\quad ((x_1)^2+(x_2)^2)(-\gamma_2 x_1+(\tfrac{3}{2}\varepsilon+\gamma_1)x_2)-3.\varepsilon^2 x_1 x_2 x_3=0 \quad (7)$$

beschrieben. Sie besitzt für $(\varepsilon,\gamma_1,\gamma_2)\neq(0,0,0)$ stets einen Doppelpunkt $A_u(0)$ im *Fernpunkt der Momentanachse* $a(0)$ (vgl. [1, S. 214]). Nach kurzer Diskussion der Gleichung (7) erkennt man unschwer, daß für $(\varepsilon,\gamma_1,\gamma_2)\neq(0,0,0)$ $k(0)$ höchstens drei verschiedene Doppelpunkte trägt. Ebenso zeigt man rasch, daß im Fall $\varepsilon = \lambda = \sigma = 0$ (oskulierende Zylinderrollung) die ganze Wendepunktsfläche $W(0)$ (5) Teil der Henkelpunktsfläche $X(0)$ ist (vergleiche Abb.1).

$\boxed{\text{Abbildung 1}}$

[†] Zylinderschrotungen wurden vor allem von A. SCHÖNFLIES [10] eingehend studiert.

2. BÖSCHUNGSLINIEN ALS BAHNKURVEN

Ein C^3- Kurvenstück c des reellen dreidimensionalen euklidischen Raumes $\mathbb{E}_3$, das durch $(x_0'(t):x_1'(t):x_2'(t):x_3'(t))$ $(x_i'(t) \in C^3;\ t \in (-\infty,+\infty);\ i = 0,1,2,3)$ gegeben ist, heißt *Böschungslinie*, wenn für alle Punkte P von c das Verhältnis von Krümmung $\varkappa(t)$ und Torsion $\tau(t)$

$$\frac{\varkappa(t)}{\tau(t)} = \text{konst.} \in \mathbb{R} \qquad \forall\ t \in (-\infty,+\infty) \tag{8}$$

ist. Diese Kurven sind unter anderem dadurch gekennzeichnet, daß ihre Tangentenflächen einen *Richtdrehkegel* oder eine *Richtebene* besitzen (vgl. [5, S. 154 ff.]) †).

Im folgenden werden wir euklidische Zwangläufe Σ/Σ' (1), deren Punktbahnen durchwegs *Böschungslinien* sind, als *Böschungslinien - Zwangläufe* ansprechen. Da alle ebenen Kurven Böschungslinien sind, existieren folgende Beispiele solcher Böschungslinien - Zwangläufe :

Satz 1

Alle räumlichen Zwangläufe mit durchwegs ebenen Bahnkurven (E - Zwangläufe) sind Böschungslinien - Zwangläufe des dreidimensionalen euklidischen Raumes $\mathbb{E}_3$; ebenso alle euklidischen Schiebungen längs einer festen Böschungslinie.

---

†) Böschungslinien des $\mathbb{E}_3$ wurden vielfach studiert. So z.B. von H. SCHAAL in [8] und [9] bzw. von W. WUNDERLICH in [13] und [14]. Weitere Literatur zu diesem Themenkreis findet sich in [6] bzw. [7].

Ist nun das C^3 - Kurvenstück c eine Böschungslinie, für die an einer Stelle $t_o \in (-\infty,+\infty)$ wohl $\tau(t_o) = 0$, nicht aber $\varkappa(t_o) = 0$ gilt, so ist c mit (8) eine *ebene Kurve*. Wenn (1) einen von den in Satz 1 genannten verschiedenen Böschungs - linien - Zwanglauf darstellen soll, müssen daher bei (1) alle Punkte P der *Henkelpunktsfläche* X(0) (6), die nicht gleichzeitig der *Wendepunktskurve* w(0) angehören, *ebene Bahnkurven* besitzen; X(0) muß in Σ stationär sein. Nur wenn w(t) im ganzen betrachteten Zeitraum $t \in (-\infty,+\infty)$ eine Fläche zweiter Ordnung W(t) (5) wird, und der Zwanglauf Σ / Σ' daher stets von einer *Zylinderrollung oskuliert* wird, ist dieser Schluß nicht zulässig. Dann liegt aber in (1) eine *Zylinderrollung* vor, bei der X(t) stets den ganzen Gangraum Σ umfaßt. Es gilt somit der

Satz 2

Bei Böschungslinien - Zwangläufen des dreidimensionalen euklidischen Raumes $\mathbb{E}_3$ müssen die Henkelpunktsflächen X(t) bzw. alle Zerfallskomponenten von X(t) im Gangraum Σ stationär sein.

Wir haben in Abschnitt 1 festgestellt, daß für $(\varepsilon,\gamma_1,\gamma_2) \neq (0,0,0)$ die Fernkurve k(0) der Henkelpunktsfläche X(0) (6) einen Doppelpunkt im Momentanachsenfernpunkt $A_u(0)$ hat. Soll nun X(t) im Gangraum Σ stationär sein, so muß wegen des diskreten Auftretens der Doppelpunkte von k(0) (vgl. Abschnitt 1) das *Gangaxoid ein Zylinder mit Fernpunkt $A_u(0)$ sein - der Zwanglauf ist damit eine Zylinderschrotung*. Wir erhalten so den

Satz 3

Die von den in Satz 1 genannten verschiedenen Böschungsli - nien - Zwangläufe des dreidimensionalen euklidischen Raumes müssen Zylinderschrotungen mit gangfester Henkelpunktsfläche $X^*(t) = X^*$ sein.

Zylinderschrotungen können wir nach [1, S. 312 ff.] in der Normalform

$$\begin{cases} x_0'(t)=x_0 \\ x_1'(t)=x_0.d(t)+x_1.\cos t - x_2.\sin t \\ x_2'(t)=x_0.e(t)+x_1.\sin t + x_2.\cos t \\ x_3'(t)=x_0.f(t) + x_3 \end{cases} \tag{9}$$

ansetzen, wobei d(t), e(t) und f(t) reelle analytische Funk - tionen von $t \in (-\infty,+\infty)$ sein sollen. Außerdem seien die An - fangsbedingungen

$$\begin{cases} d(0) = e(0) = f(0) = 0 \\ \dot{d}(0) = \dot{e}(0) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

erfüllt †). Da $\dot{f}(t)$ nicht für alle $t \in (-\infty,+\infty)$ Null werden kann - (9) wäre dann ein hier uninteressanter E - Zwanglauf-, können wir

$$\dot{f}(t) \neq 0 \quad \forall\, t \in (t_0,t_1) := T \in (-\infty,+\infty) \quad (0 \in T) \tag{11}$$

annehmen. Wir versuchen nun, d(t), e(t) und f(t) so zu be - stimmen, daß (9) einen von E - Zwangläufen verschiedenen Böschungslinien - Zwanglauf darstellt.

---

†) Durch Punkte werden wir Ableitungen nach t kennzeichnen.

Den Punktbahnen von (9) sind zum Zeitpunkt $t \in T$ Bahntangenten mit den Fernpunkten $Q(t;x_o:x_1:x_2:x_3)$

$$(0:x_o\dot{d}(t)-x_1\sin t -x_2\cos t:x_o\dot{e}(t)+x_1\cos t -x_2\sin t:x_o\dot{f}(t)) \quad (12)$$

zugewiesen, die stets die gesamte Fernebene ω erfüllen. Für festes $(x_o:x_1:x_2:x_3)$ $(x_o\neq 0)$ bilden die Punkte $Q(t;x_o:x_1:x_2:x_3)$ eine Fernkurve $q(x_o:x_1:x_2:x_3)$, die als Fernkurve *der Tangentenfläche der Bahnkurve des Punktes $(x_o:x_1:x_2:x_3)$ bei* (9) anzusehen ist. Den Punkten des absoluten Kegelschnitts m (2) entsprechen dabei im Gangraum Σ zum Zeitpunkt $t \in T$ Punkte $(\bar{x}_o:\bar{x}_1:\bar{x}_2:\bar{x}_3)$, die

$$(\bar{x}_o\dot{d}(t)-\bar{x}_1\sin t -\bar{x}_2\cos t)^2+(\bar{x}_o\dot{e}(t)+\bar{x}_1\cos t -\bar{x}_2\sin t)^2+ + (\bar{x}_o\dot{f}(t))^2 = 0 \quad (13)$$

erfüllen. Sie gehören wegen $\dot{f}(t) \neq 0$ in T stets einem komplexen *Drehzylinder* $\Delta(t)$ des Gangraumes Σ an. Die Momentanachse $a(t)$ des Zwanglaufs (9) ist Drehachse dieses Drehzylinders. Da (9) kein E - Zwanglauf sein soll, ist damit $\Delta(t)$ für $t\in T$ stets von der Henkelpunktsfläche X^* unseres Böschungslinien-Zwanglaufs (9) verschieden und auch nicht Teil von X^*. Mit

$$\begin{cases} i.\dot{f}(t).\cos\varphi := -\bar{x}_1\sin t -\bar{x}_2\cos t +\dot{d}(t).\bar{x}_o \\ i.\dot{f}(t).\sin\varphi := \bar{x}_1\cos t -\bar{x}_2\sin t +\dot{e}(t).\bar{x}_o \\ \psi := \bar{x}_3 \end{cases} \quad (14)$$

$((\varphi,\psi)\in R^2;\ i^2 = -1)$ erhält $\Delta(t)$ die Parameterdarstellung

$$(1:i.\dot{f}(t)\sin(\varphi-t)+\dot{d}(t).\sin t -\dot{e}(t).\cos t : :-i.\dot{f}(t)\cos(\varphi-t) +\dot{e}(t).\sin t +\dot{d}(t).\cos t : \psi). \quad (15)$$

Bei einem Böschungslinien - Zwanglauf (9) müssen die Fernkurven $q(x_o:x_1:x_2:x_3)$ $(x_o\neq 0)$ stets eine *Gerade* oder einen

Kreis im Sinne der vom absoluten Kegelschnitt m (2) in der Fernebene ω induzierten *elliptischen Maßbestimmung* darstellen. Tangenten an $q(x_o:x_1:x_2:x_3)$ werden durch $r(t,q)=$ $=[Q(t;x_o:x_1:x_2:x_3),\dot{Q}(t;x_o:x_1:x_2:x_3)]$ mit $\dot{Q}(t;x_o:x_1:x_2:x_3)$

$$(0:x_o\ddot{d}(t)-x_1\cos t+x_2\sin t:x_o\ddot{e}(t)-x_1\sin t-x_2\cos t:\ddot{f}(t)) \quad (16)$$

festgelegt.

$\boxed{\text{Abbildung 2}}$

Den Punkten $(\bar{x}_o:\bar{x}_1:\bar{x}_2:\bar{x}_3)$ des Drehzylinders $\Delta(t)$, die nicht gleichzeitig X^* angehören, entsprechen so Punkte $\bar{Q}(t;\bar{x}_o:\bar{x}_1:\bar{x}_2:\bar{x}_3)$ auf $\bar{q}(\bar{x}_o:\bar{x}_1:\bar{x}_2:\bar{x}_3)$, die zum Zeitpunkt t dem absoluten Kegelschnitt m angehören. Ist (9) ein Böschungslinien - Zwanglauf, aber kein E - Zwanglauf, so müssen die Tangenten $r(t,\bar{q})$ von $\bar{q}(\bar{x}_o:\bar{x}_1:\bar{x}_2:\bar{x}_3)$ zum Zeitpunkt t den absoluten Kegelschnitt m berühren. Das hat zur Folge, daß alle Punkte von $\Delta(t)$, die nicht X^* angehören, zum Zeitpunkt t Minimalebenen als Bahn - schmiegebenen besitzen. $Q(t;\bar{x}_o:\bar{x}_1:\bar{x}_2:\bar{x}_3)$ wird in diesem Fall durch

$$(0:i.\dot{f}(t).\cos\varphi : i.\dot{f}(t).\sin\varphi : \dot{f}(t)), \quad (17)$$

$\dot{Q}(t;\bar{x}_o:\bar{x}_1:\bar{x}_2:\bar{x}_3)$ durch

$$(0:-i.\dot{f}(t)\sin\varphi+\dot{e}(t)+\ddot{d}(t):i.\dot{f}(t)\cos\varphi-\dot{d}(t)+\ddot{e}(t): \\ :\ddot{f}(t)) \quad (18)$$

beschrieben, woraus folgt, daß (9) nur dann ein Böschungs - linien - Zwanglauf ist, wenn

$$(\dot{e}(t)+\ddot{d}(t)).\cos\varphi+(\ddot{e}(t)-\dot{d}(t)).\sin\varphi = i.\ddot{f}(t) \quad (19)$$

für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ und $t \in T$ erfüllt ist. Auswertung von (19) liefert

$$\ddot{f}(t) = 0, \quad \dot{e}(t)+\ddot{d}(t)=0, \quad \ddot{e}(t)-\dot{d}(t)=0 \quad \forall\ t \in T, \tag{20}$$

woraus mit den Anfangsbedingungen

$$d(t) = e(t) = 0, \quad f(t) = p.t \qquad (t \in T) \tag{21}$$

mit einer reellen Integrationskonstanten p folgt.†) Damit gilt der folgende

Satz 4

Neben den euklidischen Zwangläufen mit durchwegs ebenen Bahnkurven und den Schiebungen längs Böschungslinien sind nur noch einparametrige Schraubungsgruppen zu den Böschungslinien - Zwangläufen des dreidimensionalen euklidischen Raumes $\mathbb{E}_3$ *zu zählen.*

---

†) Für p = O stellt sich eine einparametrige Drehungsgruppe ein, die zu den E - Zwangläufen zu zählen ist.

LITERATUR

[1] O. BOTTEMA and B. ROTH, Theoretical kinematics. North-Holland Series, Amsterdam 1979.

[2] G. DARBOUX, Sur le déplacement d'une figure invariable. Comptes rendus Paris, 92, 118 - 121 (1881).

[3] G. KOENIGS, Leçons de Cinématique. Lib. Scient. A. Hermann, Paris 1897.

[4] J. KRAMES, Zur kubischen Kreisbewegung des Raumes. Sitzungsber., Abt. II, österr. Akad. Wiss., Math. - Naturwiss. Kl. 146, 145 - 158 (1937).

[5] E. KRUPPA, Analytische und konstruktive Differential - geometrie. Springer, Wien 1957.

[6] H.R. MÜLLER, Zwanglaufbewegungen mit Böschungslinien als Punktbahnen. Abhandlungen der Braunschweiger wissenschaftlichen Gesellschaft 35, 65 - 73 (1983).

[7] H. POTTMANN, Zwei Verallgemeinerungen der Böschungs - linien. Sitzungsber., Abt. II, österr. Akad. Wiss., Math. - Naturwiss. Kl. 191, 311 - 324 (1982).

[8] H. SCHAAL, Zusammenhänge zwischen Böschungslinien auf Mittelpunktsquadriken und gewissen Affinbewegungen. Mh. Math. 67, 335 - 352 (1963).

[9] H. SCHAAL, Über die Böschungslinien auf Paraboloiden und Zylindern. Mh. Math. 69, 69 - 76 (1965).

[10] A. SCHÖNFLIES, Über Bewegungen starrer Systeme im Fall cylindrischer Axenflächen. Math. Ann. 40, 317 - 331 (1892).

[11] G.R. VELDKAMP, Canonical systems and instantaneous invariants in spatial kinematics. Journal of Mechan. 2, 329 - 388 (1967).

[12] H. VOGLER, Räumliche Zwangläufe mit ebenen Bahnkurven. Ber. Math. - Stat. Sekt. Forschungszent. Graz, 162, 1 - 17 (1981).

[13] W. WUNDERLICH, Über die Böschungslinien auf Flächen zweiter Ordnung. Sitzungsber., Abt. II, österr. Akad. Wiss., Math. - Naturwiss. Kl. 155, 309 - 331 (1947).

[14] W. WUNDERLICH, Algebraische Böschungslinien dritter und vierter Ordnung. Sitzungsber., Abt. II, österr. Akad. Wiss., Math. - Naturwiss. Kl. 181, 353 - 376 (1973).

CONSTANT - SLOPE - MOTIONS

O.RÖSCHEL

Abstract. It is shown, that the only motions of the three-dimensional euclidean space E_3 with the property, that all point - paths are curves of constant slope, are translations along a fixed curce of constant slope, motions for which all point - paths are plane curves or oneparametric groups of screws.

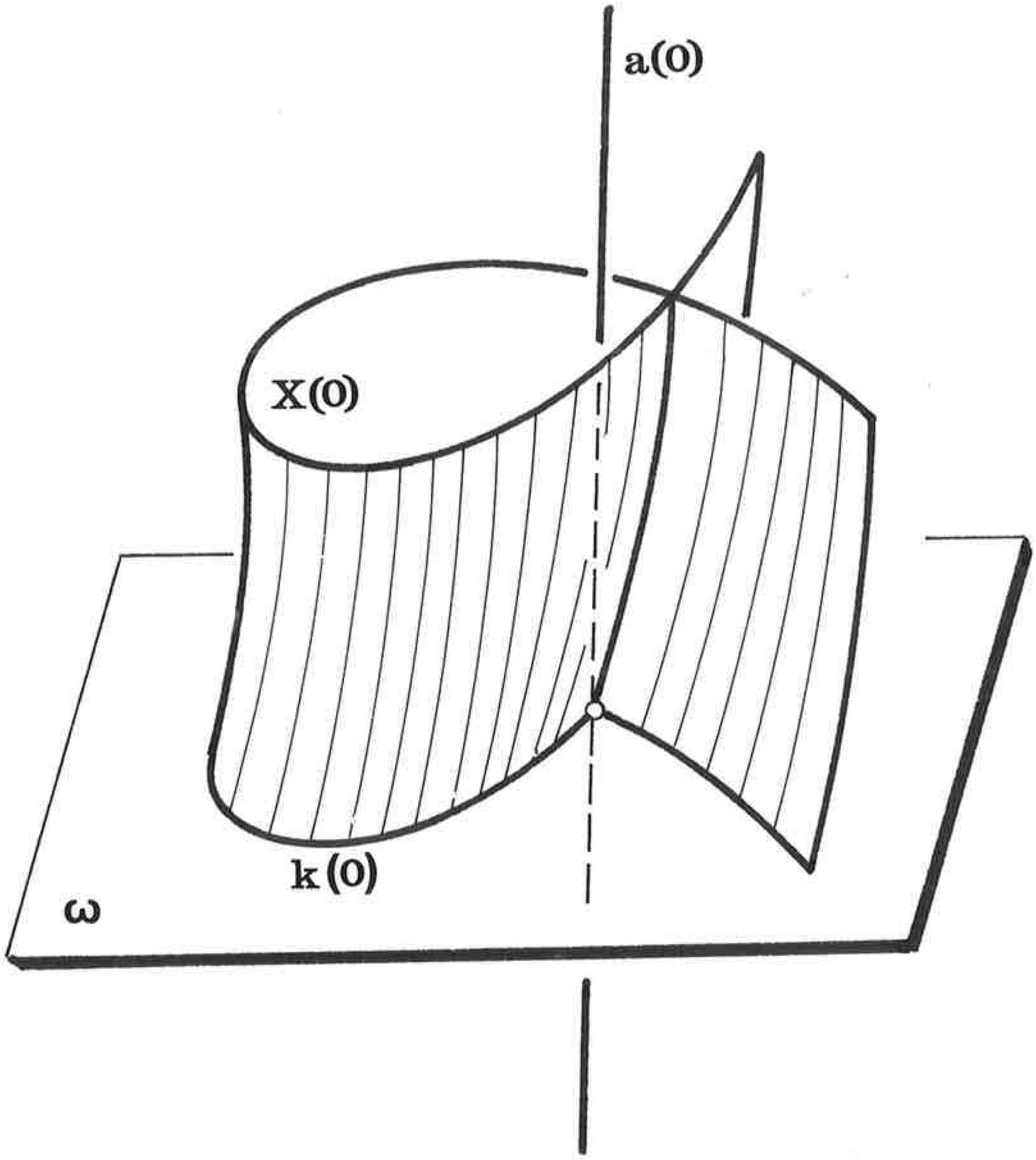

Abbildung 1

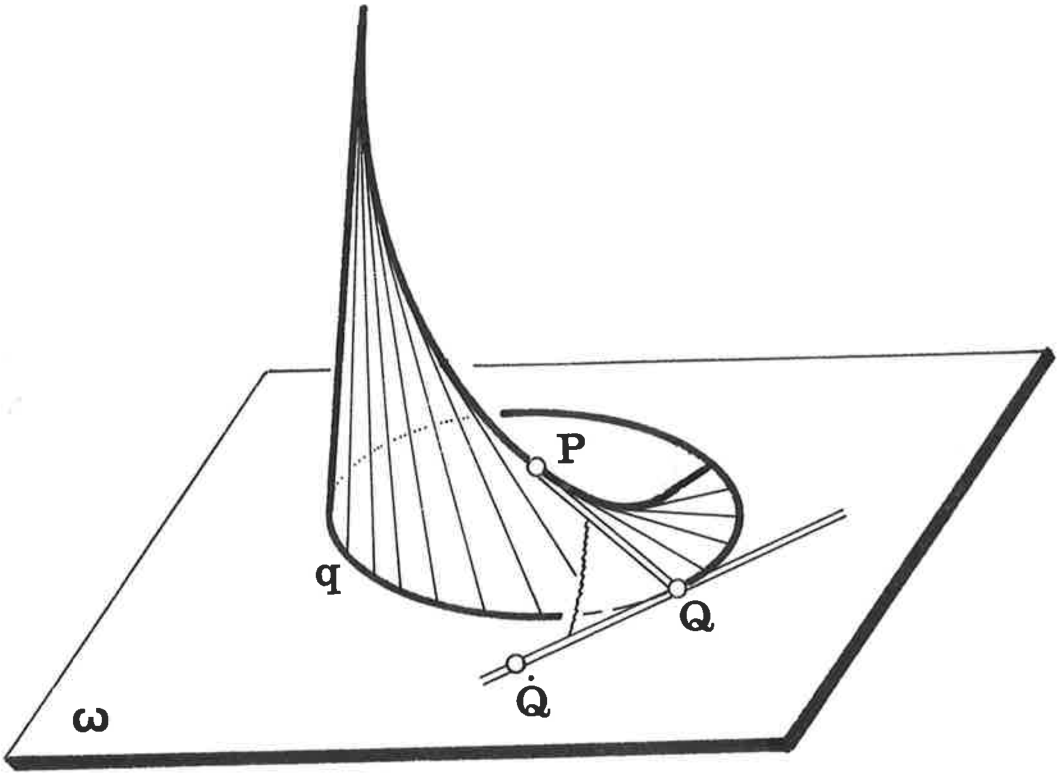

Abbildung 2

Die Bahnkurve von P soll Böschungslinie sein; die Fernkurve q der Tangentenfläche dieser Bahnkurve ist damit ein Kreis im Sinne der in der Fernebene ω herrschenden elliptischen Metrik.