

DARBOUX- UND BRICARD-BEWEGUNGEN IM FLAGGENRAUM

Otto Röschel

In Euclidean kinematics the motions with point paths all being plane or spherical curves (DARBOUX-motions or BRICARD-motions) are well known. Here we determine the analogous motions in the three-dimensional flag space and show that these motions are at least two-parametric.

1. EINLEITUNG

In letzter Zeit wurden vermehrt Bewegungsvorgänge in dreidimensionalen nichteuklidischen Räumen untersucht (vgl. [2] und [11]). So hat J. TÖLKE in [10] alle DARBOUX-Bewegungen des einfach isotropen Raumes angegeben. Da neben der Differentialgeometrie (vgl. [4] und [9]) nun auch die Kinematik des Flaggenraumes studiert wurde (vgl. [7]), liegt es nahe, alle DARBOUX-Bewegungen des Flaggenraumes anzugeben. In der vorliegenden Note werden diese Bewegungsvorgänge als besondere BRICARD-Bewegungen erkannt, wobei wir als BRICARD-Bewegungen jene Bewegungsvorgänge innerhalb der Bewegungsgruppe B_6 des Flaggenraumes $I_3^{(2)}$ ansprechen, bei denen alle Punktbahnen im Sinne des $I_3^{(2)}$ konstanten Schmiegkugelradius besitzen und damit auf Punktkugeln des $I_3^{(2)}$ (vgl. [4, I, S. 125]) verlaufen. Dabei stellt sich heraus, daß diese Bewegungsvorgänge im Gegensatz zum euklidischen Fall (vgl. [3, S. 304f. und S. 324f.]) sogar zweiparametrisch sind.

2. DIE BEWEGUNGSGRUPPE B_6

In einem reellen dreidimensionalen projektiven Raum $P_3(\mathbb{R})$ - wir werden Punkte mit homogenen Koordinaten $x_0:x_1:x_2:x_3 \neq 0:0:0:0$

beschreiben - wird die neungliedrige Gruppe projektiver Kollineationen

$$\begin{aligned} x_0' &= x_0 \\ x_1' &= ax_0 + \alpha x_1 \\ x_2' &= bx_0 + cx_1 + \beta x_2 \\ x_3' &= dx_0 + ex_1 + fx_2 + \gamma x_3, \end{aligned} \quad \begin{aligned} a, b, c, d, e, f, \alpha, \beta, \gamma &\in \mathbb{R} \\ \alpha\beta\gamma &\neq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

die die absolute Ebene ω ($x_0 = 0$), die absolute Gerade f ($x_0 = x_1 = 0$) und den absoluten Punkt F ($0:0:0:1$) einzeln festlassen, als Ähnlichkeitsgruppe eines Flaggenraumes $I_3^{(2)}$ mit dem Absolutgebilde $\{\omega, f, F\}$ angesprochen. H. BRAUNER hat in [4] die in (1) durch $\alpha = \beta = \gamma = 1$ ausgezeichnete Untergruppe als Bewegungsgruppe B_6 dieses Flaggenraumes $I_3^{(2)}$ ausgezeichnet und die dazugehörige Geometrie studiert.¹⁾

Werden außerhalb der Fernebene ω die üblichen inhomogenen Koordinaten $1:x:y:z = x_0:x_1:x_2:x_3$ verwendet, so kann ein Zwangslauf Σ/Σ' im Sinne der Bewegungsgruppe B_6 in der Form

$$\begin{aligned} x'(t) &= a(t) + x \\ y'(t) &= b(t) + c(t)x + y \\ z'(t) &= d(t) + e(t)x + f(t)y + z \end{aligned} \quad (2)$$

angesetzt werden, wobei $a(t), b(t), c(t), d(t), e(t), f(t) \in C^4(I)$, $t \in I \subset \mathbb{R}$ und $a(0)=b(0)=c(0)=d(0)=e(0)=f(0) = 0$ als Anfangsbedingungen erfüllt sein sollen. Gilt $a(t) = 0$ für alle $t \in I$, so sind die Bahnkurven trivialerweise eben; wir wollen daher im folgenden $a(t) = t$ voraussetzen.²⁾

3. BRICARD-BEWEGUNGSVORGÄNGE

Einen Zwangslauf Σ/Σ' (2) des Flaggenraumes werden wir BRICARD-

¹⁾ Man vergleiche diesbezüglich auch H. SACHS [9] und die dort angegebene Literatur.

²⁾ t ist dann die zweifach isotrope Bogenlänge der Bahnkurven.

Zwangslauf nennen³⁾, wenn die Bahnkurven aller Punkte des Gangraumes Σ sphärisch oder eben sind. Nach H.BRAUNER [4,II,S.137] ist für diese Zwangsläufe die Konstanz des Schmiegekugelradius der Punktbahnen

$$R = \frac{\dot{y}'(t)}{\dot{y}'(t)\ddot{z}'(t) - \ddot{y}'(t)\dot{z}'(t)} = \text{konst.} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \quad (3)$$

hinreichend, wobei Punkte Ableitungen nach t bedeuten. Ableitung von (3) nach t liefert

$$\dot{y}'(t)\ddot{z}'(t) = \ddot{y}'(t)\dot{z}'(t) \quad \forall t \in I, \forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (4)$$

als hinreichende Bedingung für diese Zwangsläufe.⁴⁾ Auswertung der Gleichung (4) führt auf das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \ddot{b}(t)\ddot{d}(t) &= \ddot{b}(t)\dot{d}(t), \quad \dot{b}(t)\ddot{f}(t) = \ddot{b}(t)\dot{f}(t), \\ \dot{c}(t)\ddot{e}(t) &= \ddot{c}(t)\dot{e}(t), \quad \dot{c}(t)\ddot{f}(t) = \ddot{c}(t)\dot{f}(t), \quad \forall t \in I \\ \ddot{b}(t)\ddot{e}(t) + \dot{c}(t)\ddot{d}(t) &= \ddot{b}(t)\dot{e}(t) + \ddot{c}(t)\dot{d}(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Die Lösung dieses Systems liefert fünf Fälle :

Fall 1 : $\dot{b}(t) = \dot{c}(t) = 0 \quad \forall t \in I$:

$$\begin{aligned} x'(t) &= t + x \\ y'(t) &= B_0 t + B_1 t^2 + (C_0 t + C_1 t^2)x + y \\ z'(t) &= d(t) + e(t)x + f(t)y + z \end{aligned} \quad (6)$$

($B_0, B_1, C_0, C_1 \in \mathbb{R}$; $d(t), e(t), f(t)$ beliebig $\in C^4(I)$).

Fall 2 : $\dot{b}(t) = 0, \dot{c}(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$:

$$\begin{aligned} x'(t) &= t + x \\ y'(t) &= B_0 t + B_1 t^2 + (C_0 t + C_1 t^2 + C_2 u(t))x + y \\ z'(t) &= D_0 t + D_1 t^2 + D_2 u(t) + (E_0 t + E_1 t^2 + E_2 u(t))x + \\ &\quad + (F_0 t + F_1 t^2 + F_2 u(t))y + z \end{aligned} \quad (7)$$

($B_0, B_1, C_i, D_i, E_i, F_i \in \mathbb{R}$; $i=0,1,2$; $u(t)$ beliebig $\in C^4(I)$).

³⁾ Diese Definition erfolgt in Analogie zum euklidischen (vgl. [3, S.324]). R.BRICARD hat in [5] gleichzeitig mit E.BOREL [1] die euklidischen Zwangsläufe mit durchwegs sphärischen Bahnkurven untersucht, wobei die analytische Beschreibung R.BRICARD geglückt ist.

⁴⁾ Alle anderen dabei auftretenden Bedingungen sind in (4) enthalten.

Fall 3 : $\ddot{b}(t) \neq 0, \ddot{c}(t) = 0 \forall t \in I$:

$$\begin{aligned} x'(t) &= t + x \\ y'(t) &= B_0 t + B_1 t^2 + B_2 u(t) + (C_0 t + C_1 t^2)x + y \\ z'(t) &= D_0 t + D_1 t^2 + D_2 u(t) + (E_0 t + E_1 t^2 + E_2 u(t))x + \\ &\quad + (F_0 t + F_1 t^2 + F_2 u(t))y + z \end{aligned} \quad (8)$$

$(C_0, C_1, B_i, D_i, E_i, F_i \in \mathbb{R}; i=0,1,2; u(t) \text{ beliebig} \in C^4(I))$.

Fall 4 : $\ddot{b}(t) \neq 0, \ddot{c}(t) \neq 0, \ddot{f}(t) = 0 \forall t \in I$:

4a) $\ddot{b}(t)\ddot{c}(t) \neq \ddot{b}(t)\ddot{c}(t) \forall t \in I$:

$$\begin{aligned} x'(t) &= t + x \\ y'(t) &= b(t) + c(t)x + y \\ z'(t) &= D_0 t + D_1 t^2 + D_2 b(t) + (E_0 t + E_1 t^2 + D_2 c(t))x + \\ &\quad + (F_0 t + F_1 t^2)y + z \end{aligned} \quad (9)$$

$(D_i, E_i, F_0, F_1 \in \mathbb{R}; i=0,1,2; b(t), c(t) \text{ beliebig} \in C^4(I))$.

4b) $\ddot{b}(t)\ddot{c}(t) = \ddot{b}(t)\ddot{c}(t) \forall t \in I$:

$$\begin{aligned} x'(t) &= t + x \\ y'(t) &= B_0 t + B_1 t^2 + B_2 u(t) + (C_0 t + C_1 t^2 + C_2 u(t))x + y \\ z'(t) &= D_0 t + D_1 t^2 + D_2 u(t) + (E_0 t + E_1 t^2 + E_2 u(t))x + \\ &\quad + (F_0 t + F_1 t^2)y + z \end{aligned} \quad (10)$$

$(B_i, C_i, D_i, E_i, F_0, F_1 \in \mathbb{R}; i=0,1,2; u(t) \text{ beliebig} \in C^4(I); B_2 C_2 F_2 \neq 0)$.

Fall 5 : $\ddot{b}(t) \neq 0, \ddot{c}(t) \neq 0, \ddot{f}(t) \neq 0 \forall t \in I$:

$$\begin{aligned} x'(t) &= t + x \\ y'(t) &= B_0 t + B_1 t^2 + B_2 u(t) + (C_0 t + C_1 t^2 + C_2 u(t))x + y \\ z'(t) &= D_0 t + D_1 t^2 + D_2 u(t) + (E_0 t + E_1 t^2 + E_2 u(t))x + \\ &\quad + (F_0 t + F_1 t^2 + F_2 u(t))y + z \end{aligned} \quad (11)$$

$(B_i, C_i, D_i, E_i, F_i \in \mathbb{R}; i=0,1,2; u(t) \text{ beliebig} \in C^4(I); B_2 C_2 F_2 \neq 0)$.

Insgesamt erhalten wir damit drei Typen von BRICARD-Bewegungen im Flaggenraum :

Typ I : Besitzt die Normalform (6) und ist sogar vierparametrig.

Typ II : Wird durch Formel (9) beschrieben und ist dreiparametrig.

Mit Hilfe der Bewegung $(x, y, z) \longrightarrow (x, y, z - D_2 y)$ entsteht aus (6) die Normalform

$$\begin{aligned}x'(t) &= t + x \\y'(t) &= b(t) + c(t)x + y \\z'(t) &= D_0 t + D_1 t^2 + (E_0 t + E_1 t^2)x + (F_0 t + F_1 t^2)y + z\end{aligned}\quad (12)$$

$(D_i, E_i, F_i \in \mathbb{R}; i=0,1; b(t), c(t) \text{ beliebig } \in C^4(I)).$

Typ III : Formeln (7), (8), (10) und (11) lassen sich gemeinsam in der Gestalt

$$\begin{aligned}x'(t) &= t + x \\y'(t) &= B_0 t + B_1 t^2 + B_2 u(t) + (C_0 t + C_1 t^2 + C_2 u(t))x + y \\z'(t) &= D_0 t + D_1 t^2 + D_2 u(t) + (E_0 t + E_1 t^2 + E_2 u(t))x + \\&\quad + (F_0 t + F_1 t^2 + F_2 u(t))y + z\end{aligned}\quad (13)$$

$(B_i, C_i, D_i, E_i, F_i \in \mathbb{R}; i=0,1,2; u(t) \text{ beliebig } \in C^4(I))$ darstellen.

Typ I stellt den *trivialen Fall* dar; alle Bahnkurven liegen auf Punktgrenzkugeln des Flaggenraumes. Der bei Projektion aus F auf die Ebene $z'=0$ in dieser Ebene induzierte *Grundrißzwanglauf* E/E' ist ein *isotropes Schubkurbelgetriebe* (vgl. [8, S.151]), bei dem die Bahnkurven im allgemeinen *isotrope Kreise* sind. Typ II stellt die Normalform aller jener Bewegungsvorgänge dar, bei denen die Punkte des Gangraumes Σ auf Punktkugeln mit derselben Spitze geführt werden (diese Spitze fällt für die Normalform (12) in den Punkt $(0:0:1:0)$). Beim nichttrivialen Fall III (13) werden genau die Punkte der *vollisotropen Ebene*

$$B_2 + C_2 x = 0 \quad (14)$$

auf Punktgrenzkugeln (parabolische Zylinder mit der Spitze F) geführt. Für den Schmiegekugelpunkt der Bahnkurven finden wir mit (3) den tatsächlich von t und $u(t)$ unabhängigen Wert

$$R = \frac{B_2 + C_2 x}{2[(B_2 + C_2 x)(D_1 + E_1 x + F_1 y) - (B_1 + C_1 x)(D_2 + E_2 x + F_2 y)]}, \quad (15)$$

woraus ersichtlich ist, daß genau die durch

$$(B_2 + C_2 x)(D_1 + E_1 x + F_1 y) = (B_1 + C_1 x)(D_2 + E_2 x + F_2 y) \quad (16)$$

erfaßten Punkte des Gangraumes Σ *ebene Bahnflächen* besitzen. (16) stellt im allgemeinen einen *hyperbolischen Zylinder* zweiter Ordnung mit f als *Fernerzeugender* und F als *Spitze* dar. Genau für $C_2 F_1 = C_1 F_2$ wird dieser Zylinder zu einer *Punktgrenzkugel*. Wir

haben damit den

Satz 1. Die BRICARD-Bewegungsvorgänge des Flaggenraumes besitzen die Normalformen (6), (12) und (13). Sie sind für Typ I (6) vier-, für Typ II (12) drei- und für Typ III (13) zweiparametrische Bewegungsvorgänge. Bei Typ III existiert im allgemeinen eine im Gangraum feste vollisotrope Ebene (14), deren Punkte Punktgrenzkugeln beschreiben. Jene Punkte des Gangraumes, die bei (13) Bahnebenen besitzen, erfüllen im allgemeinen den hyperbolischen Zylinder (16).

3. DARBOUX-BEWEGUNGSVORGÄNGE

Einen Zwangslauf Σ/Σ' des Flaggenraumes nennen wir DARBOUX-Bewegungsvorgang, wenn die Bahnkurven aller Punkte des Gangraumes Σ eben sind.⁵⁾ Diese Bewegungsvorgänge sind in (2) durch

$$\det \begin{pmatrix} \dot{x}'(t) & \ddot{x}'(t) & \ddot{\dot{x}}'(t) \\ \dot{y}'(t) & \ddot{y}'(t) & \ddot{\dot{y}}'(t) \\ \dot{z}'(t) & \ddot{z}'(t) & \ddot{\dot{z}}'(t) \end{pmatrix} = \ddot{y}'(t)\ddot{\dot{z}}'(t) - \ddot{\dot{y}}'(t)\ddot{z}'(t) = 0 \quad (17)$$

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ und $\forall t \in I$ gekennzeichnet. (17) ist gleichbedeutend damit, daß in (3) der Nenner verschwindet. Die DARBOUX-Bewegungsvorgänge gewinnen wir daher als jene BRICARD-Bewegungsvorgänge, die (17) erfüllen. Zu diesen Bewegungsvorgängen kommen noch jene, die in (2) durch $a(t) = 0$ gekennzeichnet sind. Wir erhalten somit folgende Typen von DARBOUX-Bewegungsvorgängen im Flaggenraum :

Typ I : $a(t) = 0 \quad \forall t \in I$ in (2).

$$\begin{aligned} x'(t) &= x \\ y'(t) &= b(t) + c(t)x + y \\ z'(t) &= d(t) + e(t)x + f(t)y + z \end{aligned} \quad (18)$$

$(b(t), c(t), d(t), e(t), f(t) \text{ beliebig } \in C^3(I)).$

Typ II : Gleichung (17) liefert für die Normalform der BRICARD-Bewegungen (6) die Bedingungen $B_1 \ddot{\dot{d}}(t) = C_1 \ddot{\dot{d}}(t) + B_1 \ddot{\dot{e}}(t) = C_1 \ddot{\dot{e}}(t) = B_1 \ddot{\dot{f}}(t) = C_1 \ddot{\dot{f}}(t) = 0 \quad \forall t \in I$, die genau für $B_1 = C_1 = 0$ oder

⁵⁾ Die euklidischen Gegenstücke zu diesen Bewegungsvorgängen hat G. DARBOUX [6] untersucht. Eine ausführliche Zusammenfassung der zu diesem Themenkreis erschienenen Literatur befindet sich in [3].

$\ddot{d}(t) = \ddot{e}(t) = \ddot{f}(t) = 0$ erfüllt sind. Wir erhalten als Darstellungen der zugehörigen DARBOUX-Bewegungsvorgänge

$$\begin{aligned} x'(t) &= t + x \\ y'(t) &= B_0 t + C_0 t x + y \\ z'(t) &= d(t) + e(t)x + f(t)y + z \end{aligned} \quad (19)$$

$(B_0, C_0 \in \mathbb{R}; d(t), e(t), f(t) \text{ beliebig } \in C^3(I))$ beziehungsweise

$$\begin{aligned} x'(t) &= t + x \\ y'(t) &= B_0 t + B_1 t^2 + (C_0 t + C_1 t^2)x + y \\ z'(t) &= D_0 t + D_1 t^2 + (E_0 t + E_2 t^2)x + (F_0 t + F_1 t^2)y + z \end{aligned} \quad (20)$$

$(B_i, C_i, D_i, E_i, F_i \in \mathbb{R}; i=0,1).$

Typ III : Gleichung (17) liefert für die Normalform der BRICARD-Bewegungen (12) die Bedingungen $D_1=E_1=F_1=0$ oder $\ddot{b}(t) = \ddot{c}(t) = 0 \forall t \in I$. Die zugehörigen Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} x'(t) &= t + x \\ y'(t) &= b(t) + c(t)x + y \\ z'(t) &= D_0 t + E_0 t x + F_0 t y + z \end{aligned} \quad (21)$$

$(D_0, E_0, F_0 \in \mathbb{R}; b(t), c(t) \text{ beliebig } \in C^3(I))$ oder sind mit den in (20) erfaßten Bewegungsvorgängen identisch.

Typ IV : Für die Normalform der BRICARD-Bewegungen (13) gewinnen wir mit Hilfe von (17) die Bedingungen $\ddot{u}(t) = 0 \forall t \in I$ oder $C_1 E_2 - C_2 E_1 = C_1 F_2 - C_2 F_1 = B_1 F_2 - B_2 F_1 = B_1 E_2 - B_2 E_1 + C_1 D_2 - C_2 D_1 = B_1 D_2 - B_2 D_1 = 0$. Im ersten Fall erhalten wir wieder Bewegungsvorgänge der Gestalt (20), während sich im zweiten Fall die Darstellung

$$\begin{aligned} x'(t) &= t + x \\ y'(t) &= B_0 t + Bv(t) + (C_0 t + Cv(t))x + y \\ z'(t) &= D_0 t + Dv(t) + (E_0 t + Ev(t))x + (F_0 t + Fv(t))y + z \end{aligned} \quad (22)$$

$(B_0, B, C_0, C, D_0, D, E_0, E, F_0, F \in \mathbb{R}; v(t) \text{ beliebig } \in C^3(I))$ einstellt. Da die Bewegungsvorgänge (20) durch (22) miterfaßt sind, gilt der

Satz 2. Im Flaggenraum existieren vier Typen von DARBOUX-Bewegungsvorgängen. Sie werden in den Normalformen (18), (19), (21) und (22) erfaßt und sind im Gegensatz zum euklidischen Fall mindestens zweiparametrig.

Die Bahnebenen sind bei Typ I (18) *vollisotrop*, bei Typ II (19) *isotrop* (die Grundrißbewegung ist durch ein *isotropes Kreuzschiebergetriebe* realisierbar [8,I,S.149]), während sie bei der Normalform (21) des Typs III zur y' -Achse *parallel* sind. Nur bei Typ IV (22) *treten wirklich alle Ebenen des Rastraumes als Bahnebenen auf*.

Es ist zu bemerken, daß die von J.LANG [7] durch Zusammensetzung zweier Drehungen gewonnenen Zwangsläufe mit durchwegs kreisförmigen Bahnkurven dem hier gewonnenen Typ IV angehören (ihre allgemeine Form stellt die in (22) enthaltene Formel (20) dar).

LITERATUR

- [1] BOREL, E.: Mémoire sur les déplacements à trajectoires sphériques. Mém. savants étrangers Paris (2) 33, 1 - 128 (1908).
- [2] BOTTEMA, O.: De bijzondere bewegingen von DARBOUX in de elliptische ruimte. Ned. Akad. Wet. 53, 25 - 30 (1944).
- [3] BOTTEMA, O. und ROTH, B.: Theoretical Kinematics. North - Holland Series. Amsterdam 1979.
- [4] BRAUNER, H.: Geometrie des zweifach isotropen Raumes I, II, III. J. Reine Angew. Math. 224, 118 - 146 (1966), 226, 132 - 158 (1967), 228, 38 - 70 (1967).
- [5] BRICARD, R.: Mémoire sur les déplacements à trajectoires sphériques. J. Ec. Polyt. (2) 11, 1 - 93 (1906).
- [6] DARBOUX, G.: Sur les mouvements algébriques. Note III in KOENIGS, G.: Lecons de cinématique. Paris 1897.
- [7] LANG, J.: Zur Kinematik des Flaggenraumes. (In Vorbereitung).
- [8] RÖSCHEL, O.: Zur Kinematik der isotropen Ebene I, II. Journal of Geom. 21, 146 - 156 (1983), 24, 112 - 122 (1985).
- [9] SACHS, H.: Lehrbuch der isotropen Geometrie. Vieweg, Braunschweig - Wiesbaden 1986.
- [10] TÖLKE, J.: Die isotropen Gegenstücke der Darboux-Bewegungen. Sber. Österr. Akad. Wiss. 187, 289 - 296 (1978).
- [11] TÖLKE, J.: Eine Bemerkung zum gleichseitigen hyperbolischen Paraboloid als Bewegfläche bei Zylinderschrotungen. Elem. Math. 35, 118 - 119 (1980).

Otto RÖSCHEL

Institut für Mathematik und Angewandte Geometrie
 MU Leoben, Franz-Josef-Straße 18
 A - 8700 LEOBEN