

# ‚Verallgemeinerte Antiprismen‘ mit Fünfecken als Seitenfassetten

Otto RÖSCHEL

**Anschrift:** Institut für Geometrie, TU Graz  
Kopernikusgasse 24, 8010 Graz.  
**E-mail:** [roeschel@tugraz.at](mailto:roeschel@tugraz.at).

*Das Studium von Polyedern ist in Verbindung mit dem Einsatz von CAD – Paketen ein lohnendes Gebiet für den Schulunterricht. Es verbindet raumgeometrische Überlegungen und Konstruktionen mit Methoden der analytischen Geometrie. Die vorliegende Arbeit soll anhand der Erstellung sogenannter verallgemeinerter Antiprismen Anregungen für Projekte zu diesem Themenbereich geben. Sie bestehen wie die Antiprismen aus zwei kongruenten regulären  $n$ -Ecken als Basis- und Deckfassetten, während ihre Seitenfassetten aus  $2n$  kongruenten Fünfecken gebildet werden. Wir werden Erzeugungen dieser Polyeder angeben, ihre Symmetrien studieren und uns dann besonderen Beispielen zuwenden. Wir geben an, unter welchen Bedingungen alle Kanten dieser Polyeder gleich lang sind (und daher ein Stabmodell aus gleich langen Stäben realisierbar ist). Weiters werden wir zeigen, dass für jedes  $n$  Beispiele existieren, bei denen alle Kanten des Polyeders eine gemeinsame Kugel berühren.*

**1. Einleitung.** Gegeben sei ein regelmäßiges  $n$ -Eck ( $n > 2$ ) mit Drehachse  $d$  und eine Kopie, die um die Achse  $d$  um den halben Zentriwinkel des  $n$ -Ecks verdreht und längs  $d$  verschoben wurde. Damit liegen Boden- und Deckfasette eines Antiprismas vor, dessen Seitenfassetten aus  $2n$  kongruenten Dreiecken gebildet werden. Modellieren lässt sich das Antiprisma durch Extrusion der Bodenfasette ( $n$ -Eck) zu einer geeigneten regulären Pyramide bzw. zu einem Pyramidenstumpf. Nach geeigneter Drehspiegelung mit Achse  $d$  und geeigneter Schiebung längs  $d$  entsteht daraus ein kongruenter Pyramidenstumpf, der im Durchschnitt mit dem ersten ein Volumensmodell eines Antiprismas ergibt (Abb. 1). Seine Seitenfassetten sind neben den regulären  $n$ -Ecken in den Ebenen normal zu  $d$  noch  $2n$  kongruente, gleichschenkelige Dreiecke.

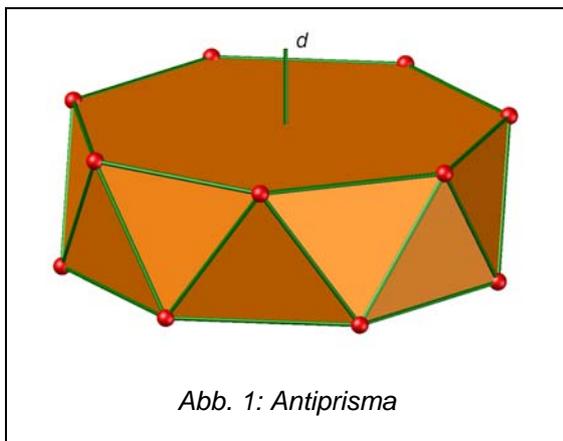


Abb. 1: Antiprisma

Wird die Schiebung längs  $d$  nicht wie oben gewählt, kann im Durchschnitt ein Polyeder entstehen, dessen Seitenfassetten aus  $2n$  kongruenten Fünfecken gebildet werden. Diese Polyeder wer-

den hier als ‚verallgemeinerte Antiprismen‘ angesprochen und sind Gegenstand der folgenden Überlegungen. Ihre Fassetten sind die beiden  $n$ -Ecke und  $2n$  kongruente ‚Seitenfünfecke‘ bilden.

Diese verallgemeinerten Antiprismen sind ein lohnendes Objekt fürs Modellieren in CAD-Paketen sowie für geometrische Untersuchungen, die durchaus im Schulunterricht der DG durchgeführt werden können. Die Abbildungen 2 und 3 zeigen Beispiele dieser zwei Varianten.

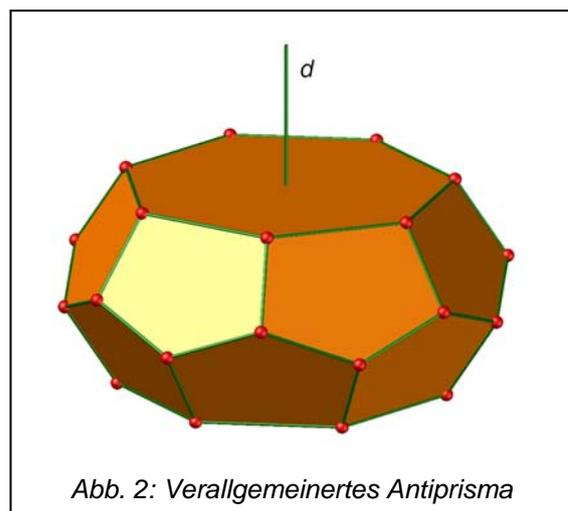


Abb. 2: Verallgemeinertes Antiprisma

Dabei existieren konvexe und nicht konvexe Spielarten – ja nachdem, ob die Boolesche Operation Durchschnitt oder Vereinigung eingesetzt wurde. Auf den nicht konvexen verallgemeinerten Antiprismen sind die Seitenfünfecke nicht konvex.

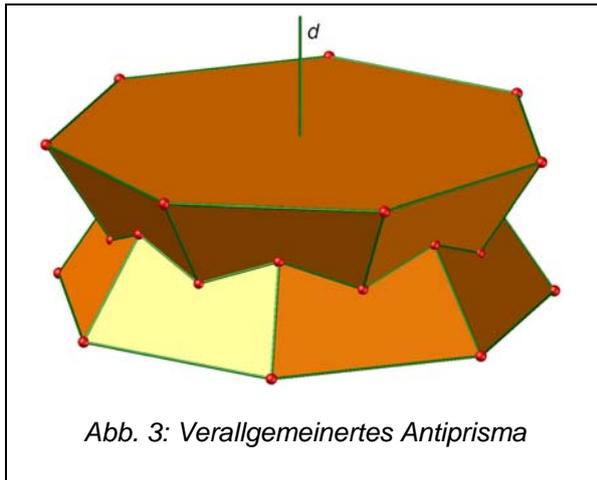


Abb. 3: Verallgemeinertes Antiprisma

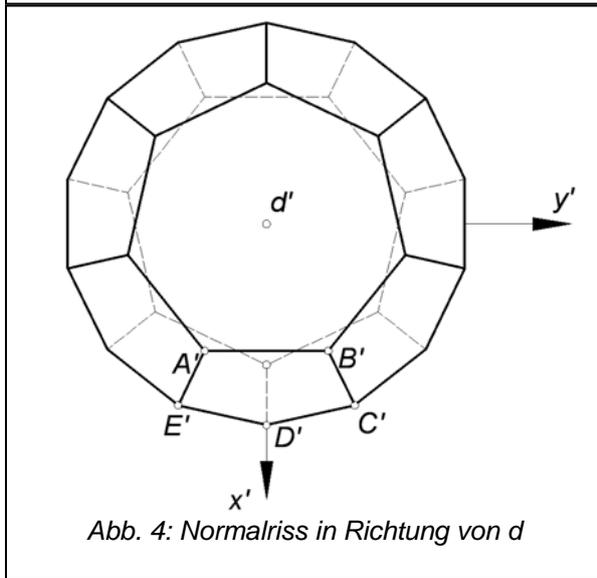


Abb. 4: Normalriss in Richtung von  $d$

Abbildung 4 zeigt den typischen Normalriss eines verallgemeinerten Antiprismas in Richtung der Achse  $d$  (Grundriss).

**2. Symmetrien der verallgemeinerten Antiprismen.** Allen verallgemeinerten Antiprismen gemeinsam sind Drehsymmetrien mit der Achse  $d$  (Winkel  $360^\circ/n$  und ganzzahlige Vielfache) sowie Spiegelsymmetrien: Jede Ebene durch  $d$  und eine Ecke oder einen Kantenmittelpunkt des regulären  $n$ -Ecks der Basis (oder des Deckels) ist Symmetrieebene des Polyeders (sie erscheinen in Abbildung 3 projizierend). Es existieren auch Drehspiegelungen (Achse  $d$ ) und  $180^\circ$ -Drehungen um zu  $d$  orthogonale Drehachsen des Polyeders in sich. Diese Drehachsen treffen die Kanten des ‚mittleren Zick – Zack - Bandes‘ des verallgemeinerten Antiprismas in ihren Mittelpunkten. Für spezielle Abmessungen können auch weitere Symmetrien auftreten.

**3. Verallgemeinerte Antiprismen mit Kantenkugel.** Wir werden nachweisen, dass für jedes  $n > 2$  bis auf Ähnlichkeiten genau ein verallgemeinertes Antiprisma mit ‚Kantenkugel‘ (alle Kanten des Polyeders berühren eine gemeinsame Kugel) existiert.

tiert. Diese verallgemeinerten Antiprismen lassen sich einfach als Stabmodelle aus prismatischen Stäben mit regulären Vielecken als Querschnitt realisieren. Es muss das Prisma einzig durch die Spiegelung an der durch den Kugelmittelpunkt und die jeweilige Kante laufende Ebene in sich übergeführt werden (vgl. [5, S. 419 f]). Die Abbildungen 5 und 8 zeigen Beispiele für  $n = 4$  und für  $n = 6$ .



Abb. 5: Verallgemeinertes Antiprisma mit Kantenkugel – Stabmodell mit prismatischen Stäben für  $n = 4$

**Konstruktion** (vgl. Abb. 6 und 7): Wir gehen davon aus, dass eine Kantenkugel existiert. Die Kanten des ‚Zick-Zack-Bandes‘  $CDE\dots$  berühren diese Kugel in den Punkten eines Großkreises. Die Berührungspunkte liegen in den Mitten dieser Kanten (in Abbildung 6 durch kleine Kugeln gekennzeichnet) und bilden ein reguläres  $2n$ -Eck auf diesem Großkreis der Kantenkugel (nur die untere Hälfte wurde abgebildet). Dieser Großkreis liegt parallel zu den Ebenen der regulären  $n$ -Ecke des Bodens und des Deckels.

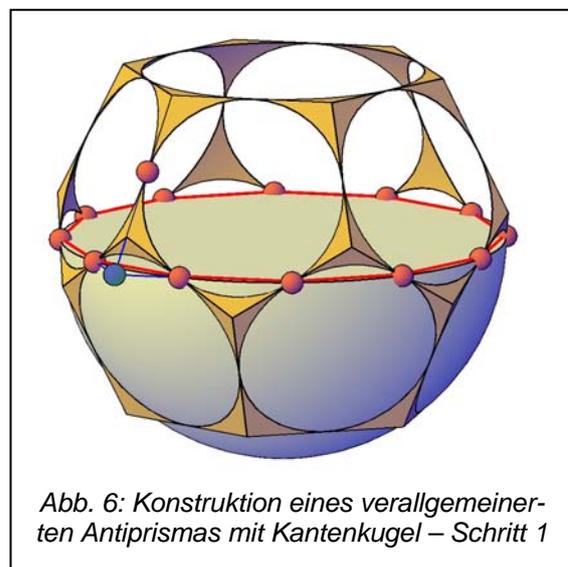


Abb. 6: Konstruktion eines verallgemeinerten Antiprismas mit Kantenkugel – Schritt 1

Die vom Zick-Zack-Band ‚nach oben‘ bzw. ‚nach unten‘ weisenden Fünfeckskanten müs-

sen aus Symmetriegründen die Ebene dieses  $2n$ -Ecks in den Verlängerungen der Kanten des  $2n$ -Ecks schneiden (einer dieser Schnittpunkte ist mit einer Kugel markiert). Wird aus einem dieser Punkte die in der Symmetrieebene des Polyeders gelegene Kugeltangente bestimmt (der Schnittkreis der Kugel mit der Symmetrieebene und einer der Berührungspunkte sind in der Abbildung markiert), so liegt damit eine der nach oben oder unten weisende Kante des Polyeders fest.

Durch 3 Berührungspunkte ist nun der Inkreis einer Fünfecksfasette fixiert (Abbildung 7). Parallel zum  $2n$ -Eck der anfänglich verwendeten Berührungspunkte liegt das  $n$ -Eck des Deckpolygons tangential an diesen Inkreis (sein Berührungspunkt ist wieder mit einer kleinen Kugel markiert). Damit sind Deck- und Bodenfasette wohlbestimmt.

Diese Konstruktion ist bis auf Ähnlichkeiten eindeutig. Wir fassen in folgendem **Resultat** zusammen:

*Zu jedem  $n > 2$  existiert bis auf Ähnlichkeiten ein eindeutig bestimmtes verallgemeinertes Antiprisma, bei denen alle Kanten eine feste Kugel berühren.*

Die Abbildungen 6 und 7 zeigen ein Volumensmodell eines so bestimmten Polyeders, aus dem die Kantenkugel herausgeschnitten wurde.

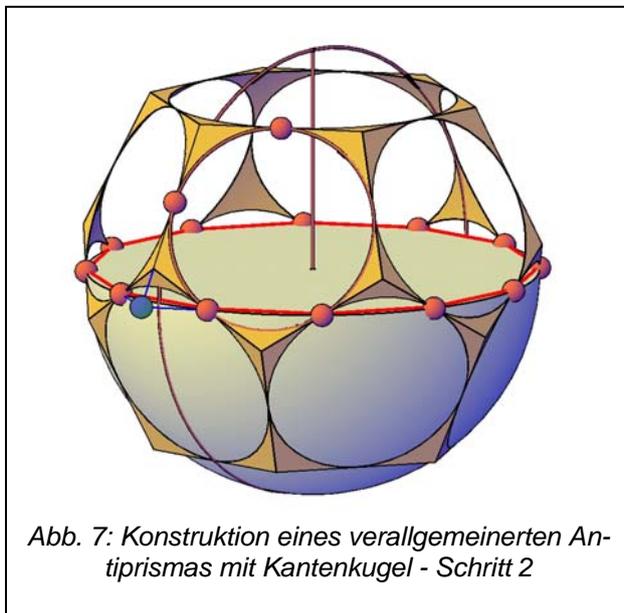


Abb. 7: Konstruktion eines verallgemeinerten Antiprismas mit Kantenkugel - Schritt 2

Ein Beispiel für ein Stabmodell zu einem verallgemeinerten Antiprisma mit Kantenkugel zu  $n = 6$  zeigt Abbildung 8.

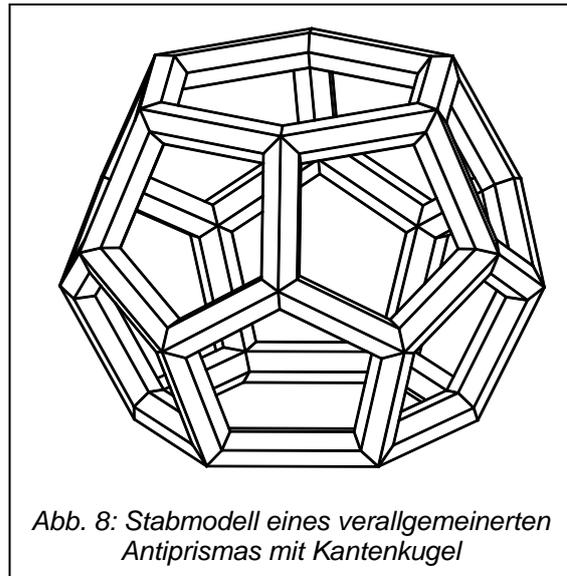


Abb. 8: Stabmodell eines verallgemeinerten Antiprismas mit Kantenkugel

#### 4. Seitenfünfecke mit gleicher Kantenlänge.

Wir wollen überlegen, dass es möglich ist, alle Seitenfünfecke eines verallgemeinerten Antiprismas mit einer einzigen Kantenlänge auszuführen.

Zur Klärung dieser Frage wählen wir ein geeignetes kartesisches Koordinatensystem (vgl. Abb. 3): Die Drehachse des Polyeders liege in der  $z$ -Achse, die  $[x,y]$ -Ebene sei die Spiegelebene für die Drehspiegelungen, die das Objekt in sich überführen. Eine Ecke des Bodenvielecks liege in der  $[x,z]$ -Ebene. Wir verwenden die Bezeichnungen der Abbildung 3. Nach Ausüben einer Ähnlichkeit ist es möglich, den Umkreisradius des  $n$ -Ecks der Deckebene (Mitte auf  $d$ , Ecken  $A, B$  usw.) auf 1 zu setzen. Dann haben wir

$$A(\cos \alpha, -\sin \alpha, c), B(\cos \alpha, \sin \alpha, c), \\ C(a \cos \alpha, a \sin \alpha, b), E(a \cos \alpha, -a \sin \alpha, b), \\ D(a, 0, -b)$$

mit  $\alpha = 180^\circ / n$  und geeigneten Höhen  $a, b \in \mathbb{R}$  und dem Umkreisradius  $c \in \mathbb{R}^+$  des regulären  $2n$ -Ecks ( $C'D'E'...$ ). Das ergibt

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{BC} = \begin{pmatrix} (a-1) \cos \alpha \\ (a-1) \sin \alpha \\ b-c \end{pmatrix}, \vec{CD} = \begin{pmatrix} a(1-\cos \alpha) \\ -a \sin \alpha \\ -2b \end{pmatrix}.$$

Das Fünfeck  $ABCDE$  ist genau dann eben, wenn  $\det(\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}) = 0$  gilt, was wegen  $\sin 180^\circ / n \neq 0$  für  $n > 1$  auf die Beziehung

$$(1) \quad a(b-c) + (ab + ac - 2b) \cos \alpha = 0$$

führt. Die Forderung der Längengleichheit ergibt für  $\vec{AB}^2 = \vec{BC}^2$  die Bedingung

$$(2) \quad c = b \pm \sqrt{4 \sin^2 \alpha - (a-1)^2},$$

während  $\overline{AB} = \overline{CD}$  auf die Bedingung

$$(3) \quad 2b^2 = (1 - \cos \alpha)(2 + 2 \cos \alpha - a^2)$$

führt. Wird die Lösung für  $c$  aus (3) in (1) eingesetzt, so erhalten wir

$$(4) \quad \begin{aligned} 2b \cos \alpha (a-1) &= \\ &= \pm a(1 - \cos \alpha) \sqrt{4 \sin^2 \alpha - (a-1)^2}. \end{aligned}$$

Daraus und unter Verwendung von (3) erhalten wir schließlich nach einigen Umformungen unter Berücksichtigung von  $\cos \alpha = \cos(180^\circ/n) \neq -1$  (für alle  $n > 2$ ) die folgende Gleichung für die Bestimmung von  $a$ :

$$(5) \quad \begin{aligned} f(a) := a^2(a+1)(a-3)(1-2 \cos \alpha) + \\ + 4 \cos^2 \alpha (1-2a) = 0. \end{aligned}$$

Dies ist i.A. eine Gleichung 4. Grades für die Variable  $a$ . Ihre Lösungen werden wir nun bestimmen und dann aus Gleichung (2) und (3)  $b$  und  $c$  ermitteln. Da  $a < -2$  in Gleichung (2) mit  $n > 2$  wegen  $\sin(180^\circ/n) < 1$  auf  $4 \sin^2 \alpha - (a-1)^2 < 0$  und daher komplexe Werte für  $c-b$  führt, kann für etwaige Lösungen  $a < -2$  kein reelles Polyeder konstruiert werden. Lösungen  $a < -2$  können wir daher im Folgenden von unseren Betrachtungen ausschließen.

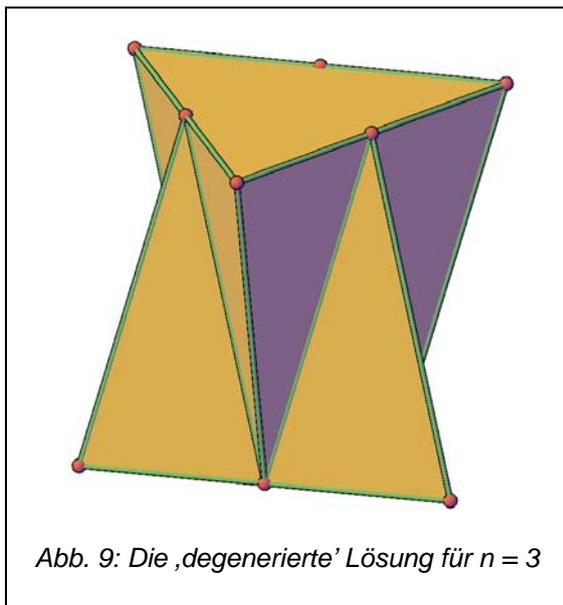


Abb. 9: Die ‚degenerierte‘ Lösung für  $n = 3$

Zwei **Sonderfälle** diskutieren wir vorab:

**Sonderfall**  $n = 3$ :

Dann ist  $\cos \alpha = \cos(180^\circ/3) = 1/2$ . Die Gleichung (5) nimmt die Sonderform

$$(6) \quad g(a) := 1 - 2a = 0$$

mit der einzigen Lösung  $a = 1/2$  an. Das so entstehende verallgemeinerte Antiprisma ist *einspringend* und gehört nach (2) und (3)  $b = \mp \sqrt{11}/2, c = 0$ . Es ist insofern *degeneriert*, als bei diesem Objekt die Seitenfünfecke in je zwei Dreiecke zerfallen. Abbildung 9 zeigt dieses Beispiel.

**Sonderfall**  $n = 4$ :

Hier ist  $\cos \alpha = \cos(180^\circ/4) = \sqrt{2}/2$ . Die Gleichung (5) besitzt zwei reelle Lösungen  $a_1 = -2.10885$  und  $a_2 = 0.696039$  (gerundet) sowie ein Paar konjugiert komplexer Lösungen. Da die Lösung  $a_1 < -2$  für unsere Antiprismen nicht zulässig ist, bleibt nur die Nullstelle  $a_2$  als interessant. Sie liefert ein eingedrücktes Antiprisma (siehe Abb. 10).

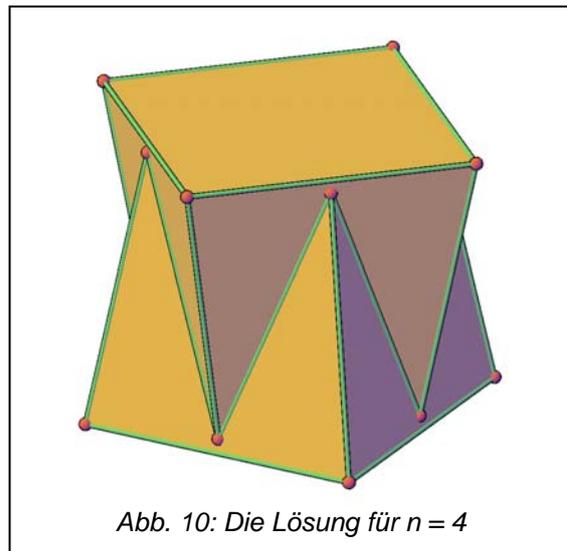


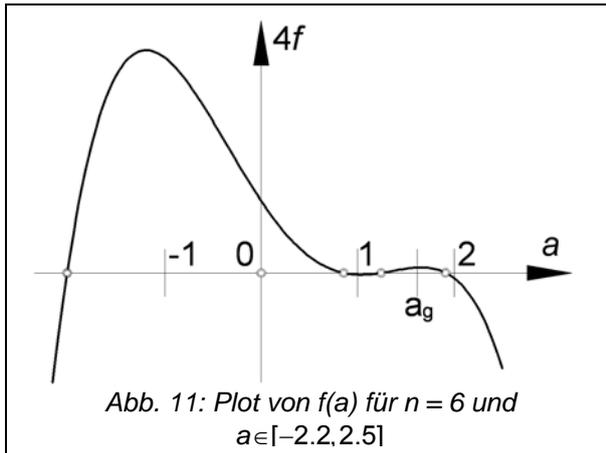
Abb. 10: Die Lösung für  $n = 4$

**Der ‚allgemeine Fall‘**  $n > 4$ :

Wir diskutieren vorab den zum ‚*goldenen Schnitt*‘  $a_g := (1 + \sqrt{5})/2$  gehörenden Funktionswert

$$(7) \quad f(a_g) = -(5 + 2\sqrt{5})(1 - 2 \cos \alpha) - 4\sqrt{5} \cos^2 \alpha$$

und ermitteln  $\cos \alpha$  so, dass  $f(a_g) = 0$  gilt. Wird  $f(a_g)$  als Polynom in  $\cos \alpha$  aufgefasst, so besitzt dieses die Nullstellen  $\cos \alpha_1 = (1 + \sqrt{5})/4$  und  $\cos \alpha_2 = (3 + \sqrt{5})/4 \approx 3.23607$ . Die erste Nullstelle führt wegen  $2 \cos(180^\circ/5) = a_g$  auf den zu  $n = 5$  gehörenden Winkel  $\alpha_1 = 180^\circ/5$ , zur zweiten gehört kein reeller Winkel.



Wir suchen nun reelle Nullstellen des Polynoms 4. Grades  $f(a)$  (5) (vgl. Abb. 11). Für  $n > 4$  gilt  $\cos \alpha = \cos 180^\circ / n > \sqrt{2} / 2$  und daher

$$\begin{aligned}
 f(-3) &< 0 && \forall n > 4 \\
 f(-2) &= 20(1 - \cos \alpha)^2 > 0 && \forall n > 4 \\
 (8) \quad f(0) &= 4 \cos^2 \alpha > 0 && \forall n > 4 \\
 f(1) &= -4(1 - \cos \alpha)^2 < 0 && \forall n > 4 \\
 f(3) &= -20 \cos^2 \alpha < 0 && \forall n > 4
 \end{aligned}$$

Da  $f(a_g)$  für  $n = 5$  gleich 0 und für alle  $n > 5$  größer als 0 ist, gilt zusätzlich

$$(9) \quad f(a_g) = -(5 + 2\sqrt{5})(1 - 2\cos \alpha) - 4\sqrt{5} \cos^2 \alpha \geq 0 \quad \forall n > 4.$$

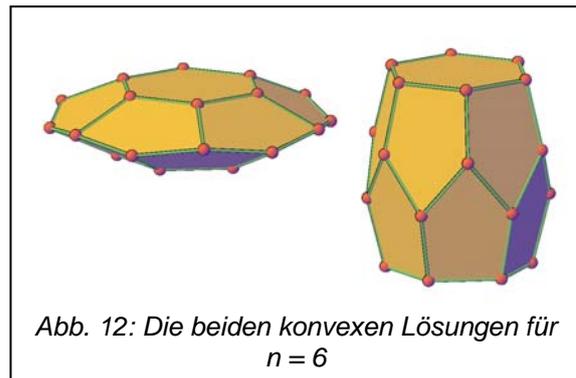
Die Funktion  $f(a)$  ist stetig und besitzt mit (8) und (9) daher in den Intervallen  $(-\infty, -2)$ ,  $(0, 1)$  und zusätzlich in  $(1, a_g]$  sowie  $[a_g, 3)$  für  $n > 4$  reelle Nullstellen. Die negative Nullstelle  $< -2$  kommt für uns nach obigen Überlegungen nicht in Betracht.

Die anderen Nullstellen sind für alle verallgemeinerte Antiprismen mit  $n > 4$  reell. Für sie ist auch die Differenz  $c-b$  reell. Die Nullstelle im Intervall  $(0, 1)$  führt auf „eingedrückte Versionen“, die in  $(1, a_g]$  sowie  $[a_g, 2)$  auf konvexe Polyeder. Genau für  $n = 5$  ist  $a_g$  doppelt zählende reelle Nullstelle von  $f(a)$ .

Dies fassen wir in folgendem **Resultat** zusammen: *Zu jedem  $n > 2$  existieren reelle verallgemeinerte Antiprismen, bei denen alle Kanten eine feste Länge besitzen. Eingedrückte Versionen existieren für alle  $n > 2$ , konvexe für jedes  $n > 4$ . Das einzige konvexe Polyeder zu  $n=5$  ist das reguläre Pentagondodekaeder. Für  $n > 5$  gibt es stets zwei konvexe verallgemeinerte Antiprismen mit einheitlicher Kantenlänge.*

$n$	Nullstellen (gerundet):
5	-2.03225, 0.79618, 1.61803 (doppelt)
6	-2.01353, 0.854236, 1.24391, 1.91538
7	-2.00677, 0.890803, 1.15505, 1.96092
8	-2.00379, 0.915263, 1.10974, 1.97879
9	-2.00229, 0.932399, 1.08256, 1.98734
10	-2.00147, 0.944852, 1.06469, 1.99193

Die obige Tabelle 1 enthält numerische Werte für die Nullstellen von  $f(a)$  für niedere Werte  $n$ . Abbildung 12 enthält die Darstellung der beiden konvexen Lösungen für  $n = 6$ . Für  $n \rightarrow \infty$  besitzt  $f(a)$  die Nullstellen  $\pm 2$  und 1 (doppelt).



**Zusatz:** Für welches  $n$  gelingt es, alle Seitenfünfecke sogar regulär auszuführen? Die Seitenfasseite  $ABCDE$  besitzt in allen unseren Fällen eine Symmetrieachse durch den Punkt  $D$ . Das Fünfeck mit der gleichen Kantenlänge ist daher regulär, wenn zusätzlich zu (4) für das Verhältnis der Kantenlängen  $\overrightarrow{CE}^2 : \overrightarrow{AB}^2 = a_g^2$  gilt (Goldener Schnitt). Auswertung dieser Beziehung liefert

$$(10) \quad a = \pm a_g.$$

Die positive Lösung führt nach obigen Überlegungen zu  $n = 5$ . Das so bestimmte verallgemeinerte Antiprisma mit durchwegs regulären Seitenfünfecken ist daher das reguläre **Pentagondodekaeder**.

**5. Zusammenfassung.** Wir haben in diesem Manuskript einige interessante Eigenschaften sogenannter „verallgemeinerter Antiprismen“ angegeben. Sie bestehen aus zwei verschie-

denen Fassetentypen: Zwei reguläre  $n$ -Ecke als Boden und Deckel sowie  $2n$  kongruente Fünfecke (mit einer Spiegelachse).

Die Bestimmung der Beispiele mit einer einzigen Kantenlänge lässt sich analytisch leicht angeben und führt auf die Ermittlung der Lösungen einer polynomialen Gleichung 4. Grades. Schön und überraschend ist, dass unabhängig von der Anzahl  $n$  der Ecken des regulären Polygons des Bodens und des Deckels des Polyeders Aussagen über die Existenz reeller Lösungen dieser Gleichung möglich sind. Eine Kurvendiskussion liefert die Argumentation zum Nachweise dieses Sachverhalts.

In einem weiteren Abschnitt der Arbeit wird eine konstruktive Lösung zur Ermittlung jener Polyeder dieser Klasse angegeben, bei denen alle Kanten eine gemeinsame Kugel berühren.

Die Arbeit soll als Anregung aufgefasst werden, anhand dieser Beispiele geometrische Überlegungen in Kombination von analytischen und konstruktiven Methoden durchzuführen und beim Modellieren in CAD-Paketen einzusetzen.

#### Literatur:

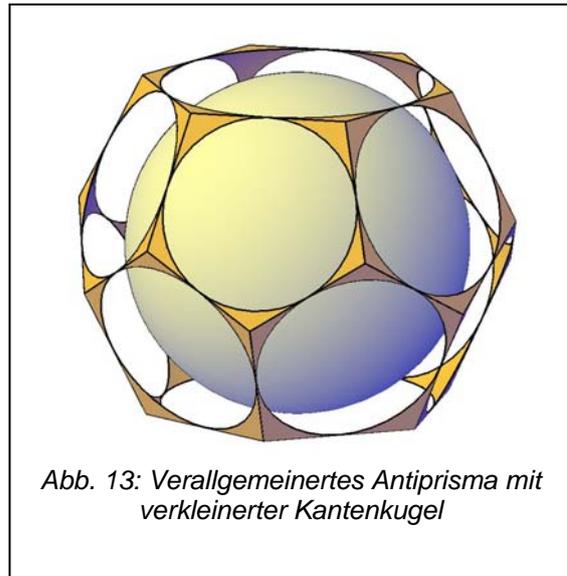
[1] J. Böhm – E. Quaisser: Schönheit und Harmonie geometrischer Formen. Akademie Verlag, Berlin 1991.

[2] P. R. Cromwell: Polyhedra. Cambridge Univ. Press, Cambridge 1997.

[3] L. Fejes – Toth: Regular Figures. Int. Series of Monogr. in Pure and Appl. Math. 48, Pergamon, Oxford 1964.

[4] B. Grünbaum: Convex Polytopes. Pure and Applied Mathematics vol. XVI, Wiley, London – New York – Sidney, 1967.

[5] H. Pottmann et al.: Architekturgeometrie. Bentley Inst. Press, Springer, Wien-New York, 2010.



*Abb. 13: Verallgemeinertes Antiprisma mit verkleinerter Kantenkugel*