

# Ausgewählte Beispiele für Ornamente und Stabmodelle der Ikosaedergruppe

Sybille MICK und Otto RÖSCHEL

Anschrift: Institut für Geometrie, TU Graz  
Kopernikusgasse 24, 8010 Graz.  
E-mail: [mick@tugraz.at](mailto:mick@tugraz.at), [roeschel@tugraz.at](mailto:roeschel@tugraz.at).

## Abstract

*Das Studium von regulären Polyedern und Ornamenten wird mit dem Einsatz von CAD – Paketen wieder ein lohnendes Gebiet für den Schulunterricht. Im Vordergrund können nun die Einsicht in die räumliche Struktur und Symmetrie der geometrischen Objekte stehen. Den Aufwand der Darstellung übernimmt das CAD – Paket. Die vorliegende Arbeit soll diese Überlegungen anhand der beispielhaften Erstellung von Ornamenten und Stabmodellen der Ikosaedergruppe demonstrieren.*

## 1. Einleitung

Abbildung 1 zeigt ein C-60-Molekül. Vom geometrischen Standpunkt interessant ist seine hohe Symmetrie, die durch die Ikosaedergruppe erzeugt wird. Das zugehörige reguläre Ikosaeder ist in der Abbildung mit dargestellt. In der vorliegenden Arbeit wird der Aufbau dieser Transformationsgruppe<sup>1</sup> studiert und zur Erzeugung von Ornamenten und Stabmodellen herangezogen. Dabei sind abstraktes Denken und ein strukturiertes geometrisches Arbeiten mit Kongruenztransformationen im Raum unverzichtbar.

Allgemein bestimmt jedes reguläre Polyeder eine Gruppe von automorphen Kongruenztransformationen. Anwendung aller Transformationen dieser Gruppe auf ein geometrisches Ausgangsobjekt erzeugt ein **Ornament der Gruppe**. Hier soll klar zwischen dem **geometrischen Grundobjekt** und den **Transformationen der Gruppe** unterschieden werden. Mittels eines **hierarchischen Aufbaus der Transformationsgruppe** übersichtlich und ökonomisch zu arbeiten. Die vorliegende Arbeit soll das obige Anliegen bei der Erstellung von Ornamenten und Stabmodellen der **Ikosaedergruppe  $I$**  demonstrieren.

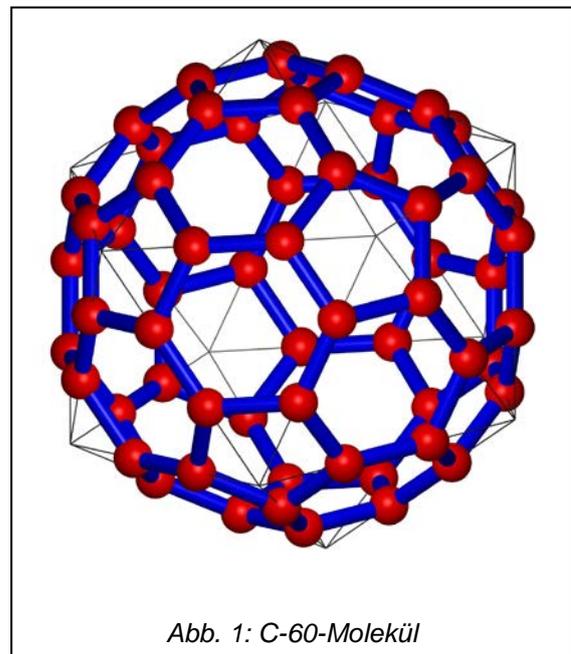


Abb. 1: C-60-Molekül

---

<sup>1</sup> Die hier verwendete **Ikosaedergruppe  $I$**  enthält bereits 60 gleichsinnige Kongruenztransformationen.

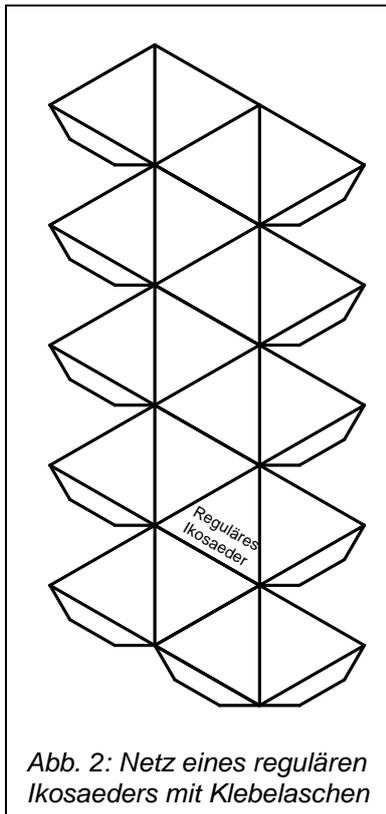


Abb. 2: Netz eines regulären Icosaeders mit Klebelaschen

Sie folgt Beispielen, die im Rahmen des Seminars „Neuer Oberstufenlehrplan Darstellende Geometrie“ (2004/05) eingesetzt wurden. Für die folgenden Überlegungen ist ein **Modell des regulären Icosaeders** hilfreich. Es lässt sich einfach aus einem Netz aus (kongruenten) gleichseitigen Dreiecken herstellen, die etwa der Anordnung von Abb.2 genügen.

In CAD – Paketen lässt sich Beides leicht mit Hilfe von **Blöcken** bzw. **Modellen** realisieren.<sup>2</sup>

*Wir wollen im Folgenden ein reguläres Iksaeder mit einem CAD-Paket erzeugen und kurz seine Symmetriegruppe studieren. Wir werden eine hierarchischen Aufbau geschachtelter Modelle (bzw. Blöcke) vorstellen, der die gleichsinnigen Kongruenztransformationen der Iksaedergruppe in CAD-Paketen einfach implementiert. Danach werden wir „Grundobjekte“ diesen Transformationen unterwerfen. Als Beispiele werden wir Pflasterungen und Stabmodelle zur Iksaedergruppe erzeugen.*

## 2. Erzeugung der Ecken eines regulären Iksaeders in einem CAD- Paket (Vorschlag):

<sup>2</sup> Die in der Arbeit gezeigten Abbildungen wurden mit den CAD – Paketen AutoCAD bzw. MicroStation hergestellt.

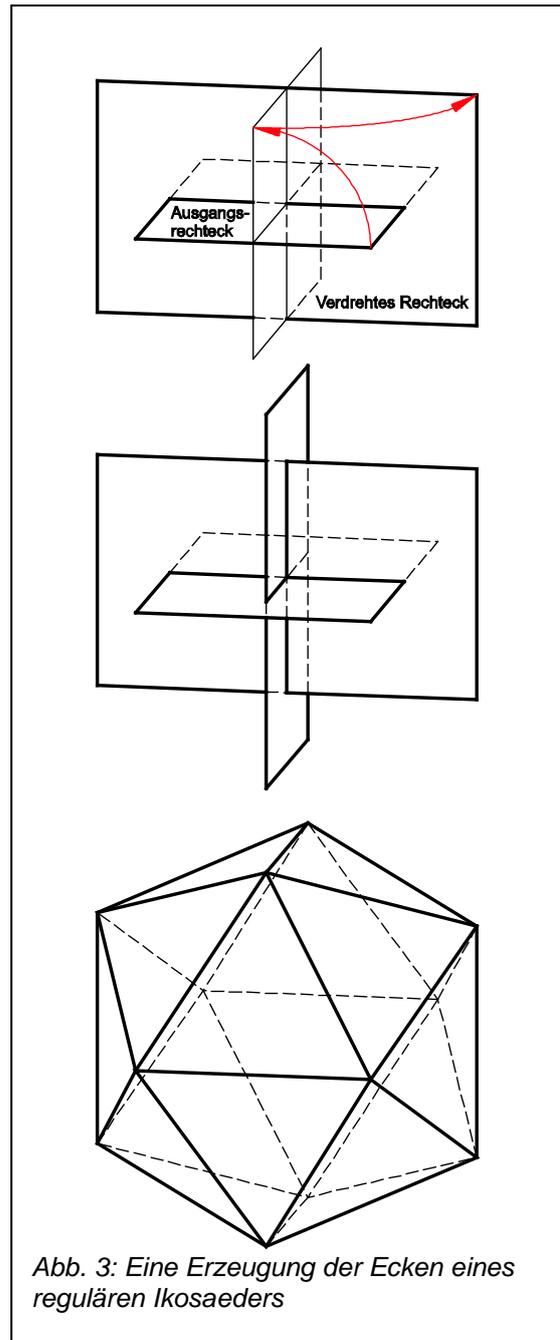


Abb. 3: Eine Erzeugung der Ecken eines regulären Iksaeders

Die Ecken eines regulären Iksaeders lassen sich als Ecken dreier geeigneter kongruenter Rechtecke gewinnen: Erstellen Sie ein Rechteck, dessen Seitenverhältnis  $a:b$  dem Goldenen Schnitt entspricht (Breite  $b$ , Länge  $a = b(1 + \sqrt{5})/2$ ). Durch zwei  $90^\circ$ -Drehungen positionieren wir ein zweites Rechteck (Drehachse jeweils in einer Mittellinie des Rechtecks – erste Drehachse parallel zur langen Seite des Rechtecks - siehe Abb. 3). Durch analoges Weiterdrehen entsteht daraus das dritte. Das reguläre Iksaeder ist die konvexe Hülle dieser Rechtecke und wird am günstigsten aus kongruenten Positionierungen gleichseitiger Dreiecke erzeugt. Der gemeinsame Mittelpunkt  $M$  der Rechtecke ist auch der Mittelpunkt des regulären Iksaeders.

### 3. Die Ikosaedergruppe $I$

Die Menge der Kongruenztransformationen, die das gegebene reguläre Ikosaeder in sich transformieren, bildet eine Gruppe. Sie wird als **volle Ikosaedergruppe**  $I_h$  ( $I_h = \{\text{Menge aller Kongruenztransformationen des regulären Ikosaeders mit Einschluss der ungleichsinnigen Kongruenztransformationen}\} - \#(I_h) = 120$ ) bezeichnet.

Für genaueres Studium der Elemente der Ikosaedergruppe  $I_h$  sei auf die angegebene Literatur [1], [2], [3] verwiesen.

Wir geben einen kurzen Überblick über einige wichtige Eigenschaften:

Die volle Ikosaedergruppe  $I_h$  enthält *ungleichsinnige* und *gleichsinnige* Kongruenztransformationen: Die gleichsinnigen Kongruenztransformationen bilden eine Untergruppe  $I$  in  $I_h$ , die als **Ikosaedergruppe** bezeichnet wird. Die **Ikosaedergruppe**  $I$  enthält die folgenden 60 Elemente:

1) Die  $\frac{2k\pi}{5}$  - Drehungen ( $k = 1, 2, 3, 4, 5$ ) um die Verbindungsgeraden der Ikosaederecken mit dem Ikosaeder-Mittelpunkt (z.B. a1) führen das Ikosaeder in sich über. Die entsprechende Drehachse wird als **fünzfählige Achse** bezeichnet und enthält die gegenüberliegende Polyederecke. Für  $k = 5$  erhalten wir die Identität  $id$ . Die fünfzähligen Achsen stimmen genau mit den 6 Diagonalen der zur Erzeugung des Ikosaeders verwendeten Rechtecke überein. Damit haben wir  $4 \cdot 6 = 24$  von der Identität verschiedene Drehungen gefunden.

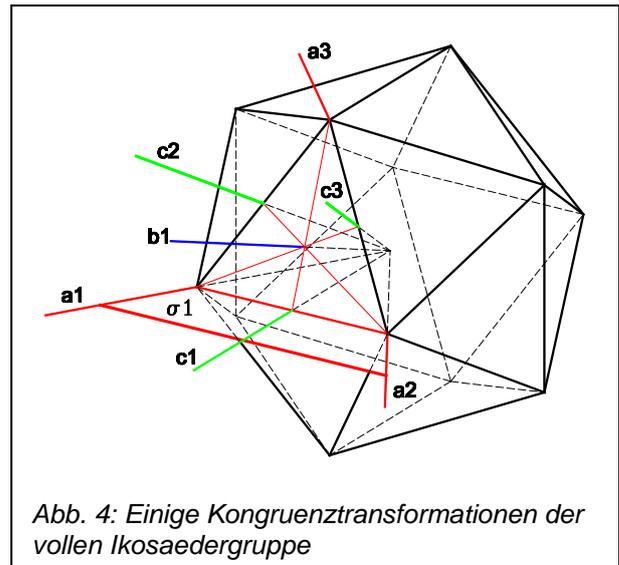


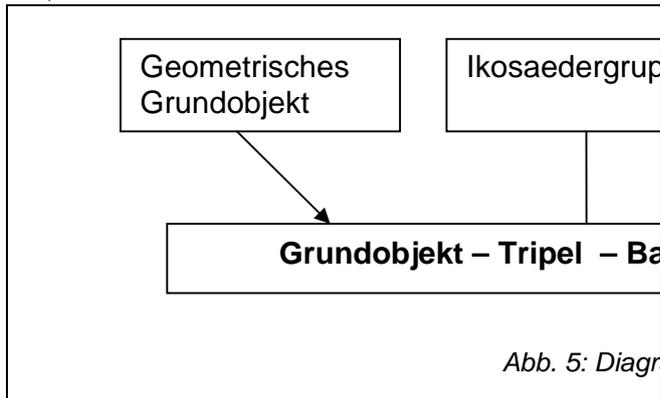
Abb. 4: Einige Kongruenztransformationen der vollen Ikosaedergruppe

- 2) Die  $\frac{2k\pi}{3}$  - Drehungen ( $k = 1, 2, 3$ ) um die Verbindungsgeraden der Mittelpunkte der Ikosaederfacetten mit dem Ikosaeder-Mittelpunkt (z.B. b1) führen das Ikosaeder in sich über. Die entsprechende Drehachse wird als **dreizählige Achse** bezeichnet und enthält den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Ikosaederfacette. Für  $k = 3$  erhalten wir die Identität  $id$ . Die 20 Facetten bestimmen auf diese Art 10 Drehachsen - damit haben wir  $2 \cdot 10 = 20$  weitere von der Identität verschiedene Drehungen gefunden.
- 3) Die  $\frac{2k\pi}{2}$  - Drehungen ( $k = 1, 2$ ) um die Verbindungsgeraden der Mittelpunkte der Ikosaederkanten mit dem Ikosaeder-Mittelpunkt (z.B. c1) führen das Ikosaeder in sich über. Die entsprechende Drehachse wird als **zweizählige Achse** bezeichnet und enthält den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Ikosaederkante. Für  $k = 2$  erhalten wir die Identität  $id$ . Die 30 Kanten bestimmen auf diese Art 15 Drehachsen - damit haben wir die restlichen 15 von der Identität verschiedenen Drehungen gefunden.
- 4) Die Identität  $id$  ergänzt die aufgezählten Drehungen zur Ikosaedergruppe  $I$ .

Die **volle Ikosaedergruppe**  $I_h$  enthält zusätzlich 60 ungleichsinnige Kongruenztransformationen (Spiegelungen und Drehspiegelungen). Sie können durch Zusammensetzung der gleichsinnigen Kongruenztransformationen mit einer festen Ebenenspiegelung gewonnen werden. Als Spiegelebene kann dabei eine den Ikosaeder-Mittelpunkt mit einer Kante verbindende

Symmetrieebene des Ikosaeders dienen (z.B.  $\sigma_1$ ).

und nachfolgenden  $72^\circ$ -,  $144^\circ$ -,  $216^\circ$ - und  $288^\circ$ - Drehungen von Kopien um



Jede Transformation aus der vollen Ikosaedergruppe  $I_h$  lässt sich durch Hintereinanderausführen dreier geeignet und fest gewählter Ebenenspiegelungen erzeugen. Diese drei Ebenenspiegelungen bilden ein **Erzeugendensystem** von  $I_h$ . Dies werden wir später zur Erzeugung unserer Stabmodelle verwenden.

### 3. Vorschlag für eine hierarchische Struktur (Modelle bzw. Blöcke) zur Erzeugung von Ornamenten der Ikosaedergruppe $I$

Wir gehen von einem geometrischen Grundobjekt aus, das wir als Block bzw. Modell „**Grundobjekt**“ erzeugen. Durch die 60 Transformationen der Ikosaedergruppe  $I$  wird dieses Grundobjekt in 60 Exemplaren im Raum positioniert (siehe weiter unten). Das Resultat bezeichnen wir als **Ornament** der Ikosaedergruppe (Block bzw. Modell „**Ornament**“). Wenn die mathematische Struktur der Gruppe und die Möglichkeiten eines CAD – Paketes nicht genutzt werden, müssen diese 60 Kongruenztransformationen einzeln ausgeführt werden. Aber vernünftig ist ein strukturierter Aufbau, der z.B. wie folgt hierarchisch geordnet werden kann:

- Das Modell „**Tripel**“ entsteht durch Einfügen des Modells (Blocks) „**Grundobjekt**“ und nachfolgenden  $120^\circ$ - und  $240^\circ$ - Drehungen von Kopien um die dreizählige Achse  $b_1$ .
- Das Modell „**Band**“ entsteht durch Einfügen des Modells (Blocks) „**Tripel**“. Danach drehen wir eine Kopie dieses Modells um die Achse  $c_3$  um  $180^\circ$ . Ausgangs- und Drehlage werden gemeinsam in Kopie um  $180^\circ$  um die Achse  $c_1$  gedreht.
- Das Modell „**Ornament**“ entsteht durch Einfügen des Blocks (Modells) „**Band**“

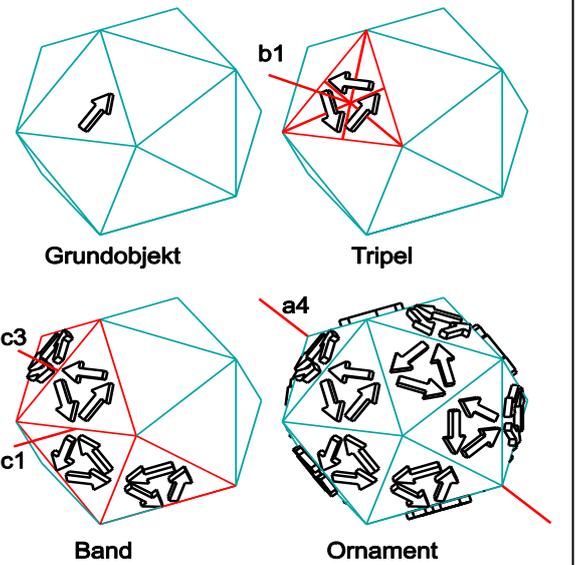


Abb. 6: Strukturierte Erzeugung eines Ikosaeder – Ornamentes

Die Blöcke bzw. Modelle „**Tripel**“, „**Band**“ und „**Ornament**“ bilden einen hierarchischen Aufbau der Ikosaedergruppe  $I$ . Unser Vorgehen garantiert, dass jedes beliebige im „**Grundobjekt**“ definierte Ausgangsobjekt im Modell „**Ornament**“ allen 60 Transformationen der Ikosaedergruppe  $I$  unterworfen ist. Das Diagramm (Abb. 5) soll unser Vorgehen veranschaulichen.

Dieses Prinzip demonstrieren wir anhand des folgenden Beispiels (Abb. 6): Wir wählen als „**Grundobjekt**“ einen Pfeil in einer Facette des Ikosaeders und extrudieren ihn etwas. Abbildung 6 zeigt die dann entstehenden Blöcke bzw. Modelle sowie als Orientierungshilfe das Ikosaeder.

**Bemerkung:** Ein Facettenmodell des Ikosaeders ist hier leicht zu gewinnen, wenn Sie im Block (Modell) „**Tripel**“ eine Dreiecksfacette ausführen.

Achten Sie darauf, dass die hier verwendeten Kongruenztransformationen alle aus der Gruppe der gleichsinnigen Kongruenztransformationen  $I$  stammen! Die Spiegelungen ließen sich bei Bedarf in das Modell „**Grundobjekt**“ integrieren.

Abbildung 7 zeigt ein weiteres Beispiel, bei dem als Grundobjekt ein Stück einer HP-Schale über einem windschiefen Viereck gewählt wurde. Die Abbildung zeigt links das Grundobjekt und eine Ikosaederfacette – die

Ecken A1, C3, B1 und C1 des Vierecks wurden wie im Bild auf eine fünf- eine zwei-, eine drei- und wieder eine zweizählige Drehachse gelegt. Das aus dem Grundobjekt entstehende Ornament hat weder Lücken noch Überdeckungen, weil die Punkte C1 und C3 bei Drehung um die Achse  $a_1=[M, A_1]$  sowie  $b_1=[M, B_1]$  ineinander übergeführt werden können. Abbildung 7 zeigt zwei Ansichten dieses Objektes, das aus 60 kongruenten HP-Schalen zusammengefügt ist.

#### 4. Eine Kugelpflasterung zur Ikosaedergruppe

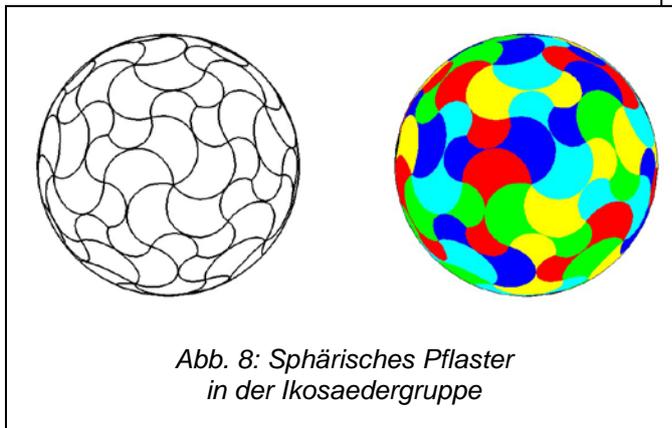


Abb. 8: Sphärisches Pflaster in der Ikosaedergruppe

Besonders hübsch sind **Pflasterungen der Kugel**, die auf diese Art entstehen. Als **Beispiel** erzeugen wir im Modell „Grundobjekt“ folgenden Pflasterstein aus einer dünnwandigen Umkugel des Ikosaeders (Abb. 8 und 9):

Wir bezeichnen die Schnittpunkte der Drehachsen  $a_2$ ,  $b_1$  und  $c_1$  mit der Umkugel des Ikosaeders mit A, B und C. Auf der Umkugel zeichnen wir die Kreise  $k_1$  und  $k_2$  mit den Durchmessern AC und BC ein, die wir als Basiskreise für Drehkegel mit Scheitel M verwenden.

Durch  $120^\circ$ -Drehung um die Achse  $b_1$  geht der Pflasterstein in einen Nachbarstein über, der an unser Grundobjekt lückenlos anschließen muss. Bei dieser Drehung geht der Pflastersteinrand  $k_2$  in den Nachbarrandkreis  $k_2^*$  über, der damit dem Rand unseres Ausgangspflastersteines angehören muss.<sup>3</sup> Analog wird  $k_1$  bei  $72^\circ$ -Drehung um die Achse  $a_2$  in ein Kreisstück  $k_1^*$  übergehen, das wieder

<sup>3</sup> Für dieses Vorgehen ließen sich die Kreise  $k_1$  und  $k_2$  durch eine beliebige andere Kurve ersetzen. Achten Sie aber darauf, dass beim beschriebenen Verfahren keine Unterschnitte der Drehlagen auftreten – diese würden die Erzeugung des Pflastersteines unmöglich machen.

dem Rand unseres Pflastersteines angehören muss. Damit liegen die Randkreisbögen dieses Pflastersteines fest (Abbildung 9 - Mitte zeigt diese 4 Kreise). Dabei entsteht ein kleines Loch auf der Kugel, das durch einen weiteren kleinen Kreis überdeckt wird (siehe Abb.). Nun materialisieren wir durch Drehkegel und bilden den Durchschnitt mit einer dünnwandigen Kugel um den Polyedermittelpunkt M – damit haben wir einen sphärischen Pflasterstein erzeugt, der mit der Ikosaedergruppe  $I$  verträglich ist. Abbildung 9 zeigt rechts drei dieser Pflastersteine, die aus dem eben erzeugten durch Drehung um die dreizählige Achse  $b_1$  entstehen.

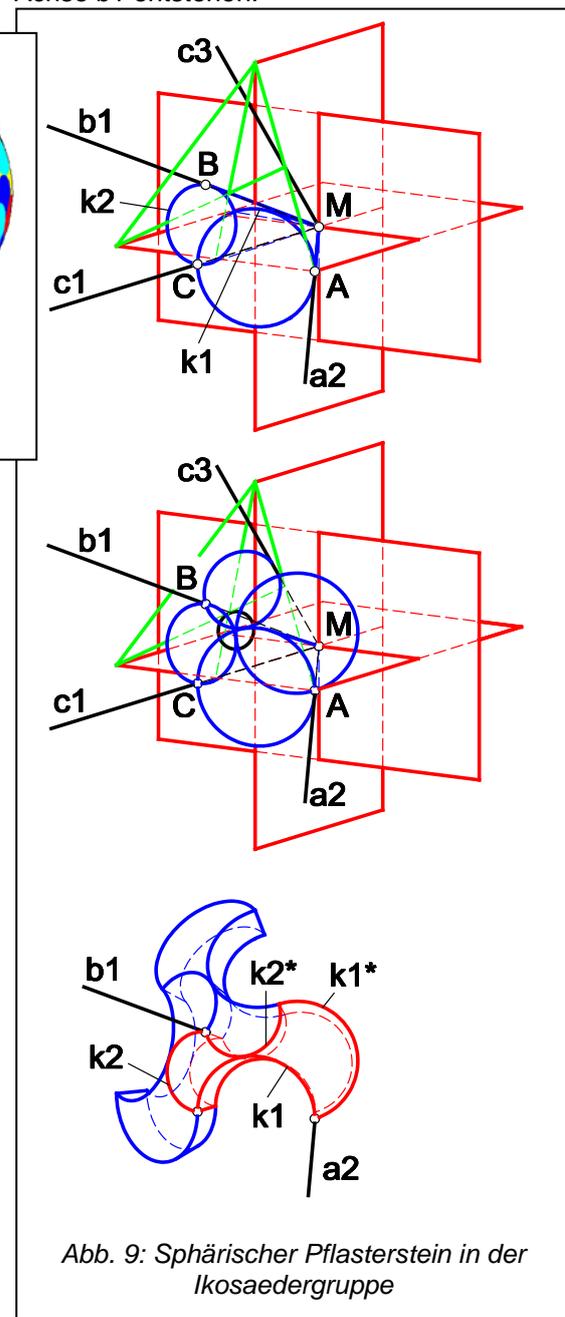


Abb. 9: Sphärischer Pflasterstein in der Ikosaedergruppe

**Bemerkung:** Von der vorliegenden Struktur ausgehend lassen sich auf viele Arten interessante geometrische Objekte erzeugen.

Abbildung 8 (rechts) soll Anregungen dazu geben: Links ist eine Pflasterung mit den eben erzeugten Pflastersteinen dargestellt, während die Pflastersteine rechts gefärbt wurden. Letztere Anordnung genügt allerdings dann wegen der Färbung nicht mehr der Ikosaedergruppe  $I$ .

## 5. Besondere Stabmodelle von Polyedern als Ornamente der Ikosaedergruppe $I$ .

Nun wählen wir als Ornament einen „Stab“ (etwa ein gerades Prisma mit Achse  $g$  – und einem regelmäßigen Normalschnitt) als Ausgangsstück. Nach Ausübung der Transformationen aus  $I$  entsteht so bei allgemeiner Wahl des Ausgangsstabes eine Menge von insgesamt 60 kongruenten Stäben, die sich nicht schneiden werden.

**Schnittpunkte** der gedrehten Stäbe mit der Ausgangsgeraden  $g$  treten in **zwei Fällen sicher** auf (es gibt noch weitere Möglichkeiten, auf die wir hier nicht eingehen wollen):

- 1) Die Ausgangsgerade  $g$  liegt normal zu einer der Drehachsen des Ikosaeders
- 2) Die Ausgangsgerade  $g$  trifft eine der Drehachsen des Ikosaeders

Diese beiden Möglichkeiten lassen sich auch kombinieren und führen zu verschiedenen Stabwerken. Bei den bekannten Beispielen von Stabwerken aus der Ikosaedergruppe (Ikosaeder, Pentagondodekaeder, Rhomben-Triakontaeder und den zugehörigen Sternpolyedern)<sup>4</sup> erfüllt die Ausgangsgerade  $g$  die obigen Bedingungen mehrfach. In den folgenden Abschnitten werden besonders instruktive Beispiele vorgestellt.

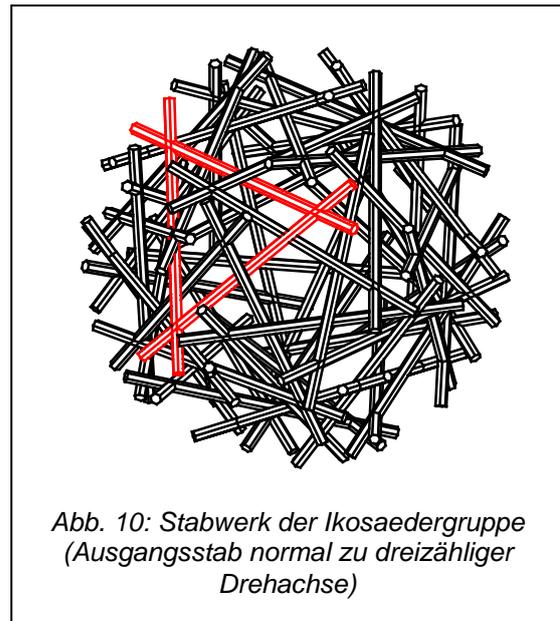
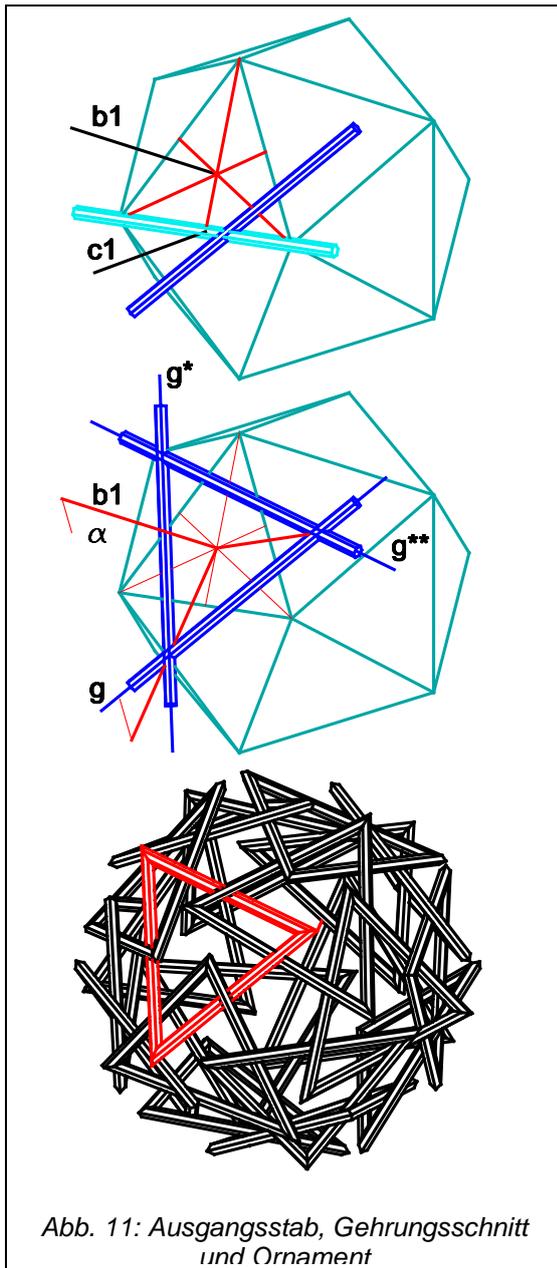


Abb. 10: Stabwerk der Ikosaedergruppe  
(Ausgangsstab normal zu dreizähliger Drehachse)

### 5a. Beispiel mit einer Ausgangsgeraden $g$ normal zu einer dreizähligen Achse:

<sup>4</sup> Mit zusätzlichen Modellen werden wir uns in einer weiteren Arbeit befassen.



Die Ausgangsgerade  $g$  liegt hier normal zur dreizähligen Drehachse  $b1$ , ohne jedoch eine Drehachse zu schneiden (oder zu einer parallel zu sein). Durch Drehung um  $b1$  entstehen gleichseitige Dreiecke – Abbildung 10 zeigt ein so erzeugtes Stabwerk. Dabei wurde eines der Modell „Tripel“ rot eingefärbt.

Eine hübsche Angabe für den Block bzw. das Modell „Grundobjekt“ ist in diesem Fall die folgende (vgl. Abb. 11): Erzeugen Sie einen prismatischen Stab längs einer Basiskante des Facettendreiecks und verdrehen Sie diesen um  $45^\circ$  um die 3-zählige Drehachse  $b1$ . Dieser verdrehte Stab dient als Rohling im Modell „Grundobjekt“. Das Modell „Tripel“ ist in dieser Abbildung ebenfalls dargestellt – die zweizählige Drehachse  $c1$  wird vom Stabdreieck umschlossen, sodass sich das gesamte Stabwerk aus insgesamt 20

Stabdreiecken zusammensetzt, bei denen Nachbarn ineinander stecken.

Um die Stabdreiecke ohne Überstände zu realisieren, verwenden wir **Gehrungsschnitte**. Die Konstruktion führen wir im Modell „Grundobjekt“ durch: Wir verdrehen Ausgangsgerade  $g$  und Ausgangsstab zwei Mal um  $120^\circ$  um die Drehachse  $b1$ . Wir erhalten Geraden  $g^*$  und  $g^{**}$ . Der Ausgangsstab wird nun an den  $b1$  enthaltenden Symmetrieebenen  $\alpha$  von  $g$  und  $g^*$  (vgl. Abb. 11) und  $\beta$  von  $g$  und  $g^{**}$  gestutzt. Abbildung 11 zeigt unten das Ergebnis im Modell „Stabwerk“.

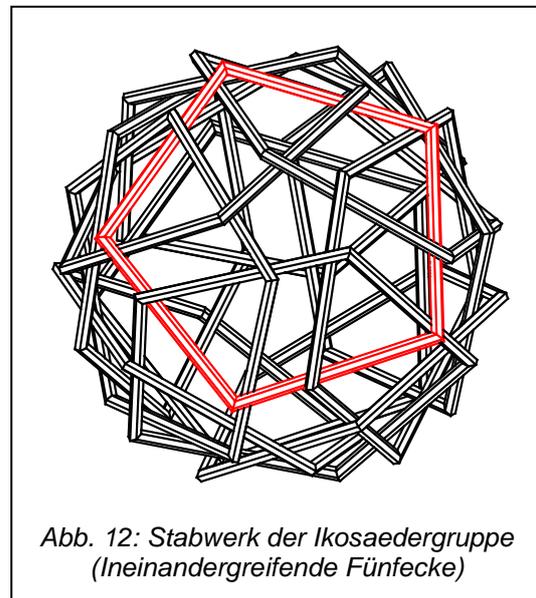
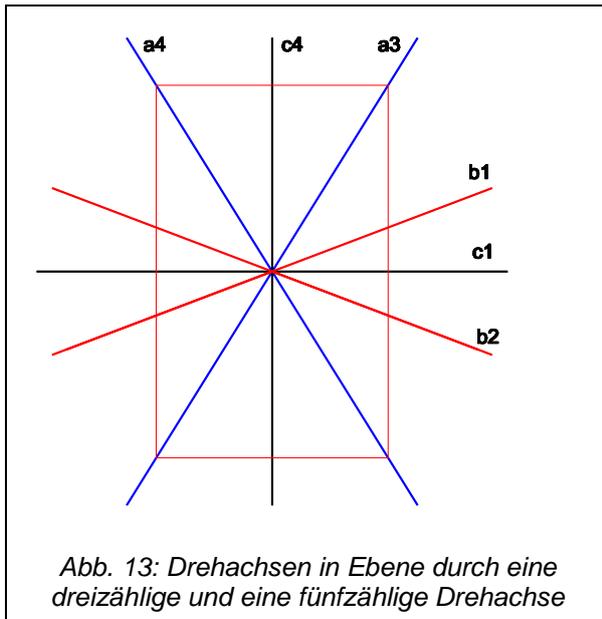


Abbildung 12 zeigt eine Variante: Die Ausgangsgerade  $g$  liegt hier normal zu einer fünfzähligen Drehachse, ohne jedoch eine Drehachse zu schneiden (oder zu einer parallel zu sein). Wir erhalten Objekte, auf denen regelmäßige Fünfecke auftreten. Abbildung 12 zeigt ein Beispiel, bei dem wieder Gehrungsschnitte vorgenommen wurden und die Fünfecke ineinander greifen.

**5b. Beispiele mit einer Ausgangsgeraden  $g$ , die eine dreizählige und eine fünfzählige Drehachse trifft.**

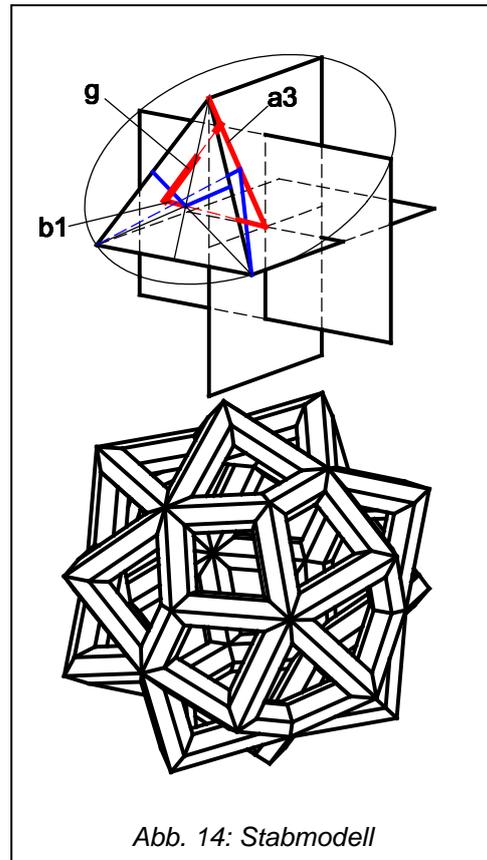


Die von der drei- und der fünfzähligen Drehachse aufgespannte Ebene  $\varepsilon$  enthält zusätzlich je eine weitere drei- und eine fünfzählige Achse sowie zwei zweizählige Achsen. Überdies liegt die Ebene  $\varepsilon$  normal zu einer zweizähligen Drehachse. Jede Ebene dieser Art enthält zwei parallele Iksaederkanten und kann durch eine Kongruenztransformation aus der Gruppe  $I$  in eine der Rechteckebenen unserer Iksaedererzeugung übergeführt werden. Abbildung 13 zeigt die Situation in der Ebene  $\varepsilon$ .

Je nach der Länge und Lage des auf der Geraden  $g$  in der Ebene  $\varepsilon$  ausgewählten Stabes entstehen die verschiedensten Modelle. Jeder Schnittpunkt der Geraden  $g$  mit den hier eingetragenen Drehachsen liefert im Raummodell einen Schnittpunkt mit 2-, 3- bzw. 5-facher Drehsymmetrie. Interessante Ergebnisse stellen sich daher für Stabstücke ein, deren Enden auf diesen Drehachsen liegen.

Wir wählen das Stabstück längs  $g$  so, dass es von einem Punkt der dreizähligen Achse  $b1$  ausgehend bis zum Normalenfußpunkt auf der fünfzähligen Achse  $a3$  reicht (siehe Abb. 14 oben). Wir werden den Stab wieder als Prisma ausbilden und Gehrungsschnitte vornehmen. Die beiden Gehrungsschnitte durch die Drehachse  $b1$  schneiden die in der Abbildung eingetragene Iksaederfacette in den Höhen dieses Dreiecks (in der Figur angerissen). Dem in der Abbildung angedeuteten Kreis ist am Iksaeder ein reguläres Fünfeck mit Drehachse  $a3$  eingeschrieben. Die für den Stab zuständigen Gehrungsschnitte durch die Achse  $a3$  sind in dieser Fünfecksebene in blauer Farbe angerissen. Abbildung 14 zeigt

unten eine Ansicht des so gewonnenen Stabmodells.



**Bemerkungen:** 1) Diese Stäbe erhalten wir auch, indem wir in einem regulären Pentagondodekaeder nur die Verbindungen der Fünfecksmitten mit den zugehörigen Ecken materialisieren. Die kurzen Diagonalen der so entstehenden (nicht ebenen!) Vierecke bilden das oben beschriebene Pentagondodekaeder, die langen ein reguläres Iksaeder. 2) Wählen wir die Ausgangsgerade  $g$  normal zu einer nicht in  $\varepsilon$  gelegenen zweizähligen Drehachse, so entstehen sogar ebene Rhomben – das Stabmodell wird das eines Rhomben-Triakontaeders.

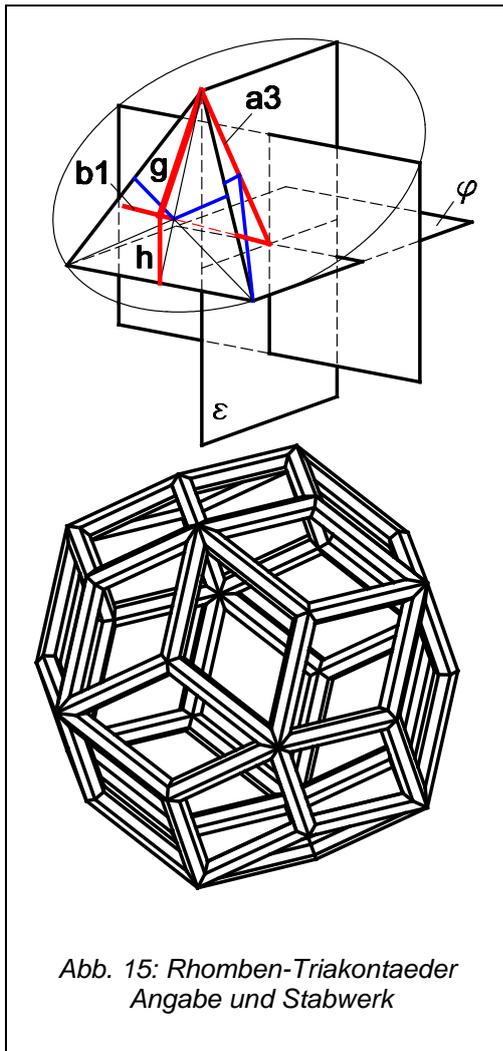


Abb. 15: Rhomben-Triakontaeder  
Angabe und Stabwerk

Zur Erzeugung des **Rhomben-Triakontaeders**: Da zu jeder zweizähligen Achse zwei weitere zweizählige Achsen so existieren, dass ein Tripel orthogonaler Geraden entsteht, erhalten wir die zugehörige Gerade  $g$  wie folgt: Wir errichten im Mittelpunkt der in der Rechtecksebene  $\varphi$  gelegenen Iksaederkante das in  $\varepsilon$  gelegene Lot  $h$  auf  $\varphi$  und schneiden mit der dreizähligen Achse  $b1$  ab. Abbildung 15 zeigt Konstruktion und Resultat.

## 6. Ausblick:

Vor allem interessant sind Fälle, in denen die Ausgangsgerade  $g$  normal auf zwei Drehachsen steht. Bis auf zwei Ausnahmen muss die Gerade  $g$  entweder parallel zu einer Iksaederkante oder parallel zu einer weiteren Drehachse liegen. Die beiden Ausnahmen sind:  $g$  ist entweder parallel zur Höhe einer

Iksaederfacette oder parallel zur Verbindung der Kantenmitten orthogonaler Iksaederkanten (einen Überblick verschaffen Sie sich am besten anhand eines Modelles). In beiden Ausnahmen liegt  $g$  normal zu je einer zwei – und einer dreizähligen Drehachse, nicht jedoch normal auf eine fünfzähligen Achse.

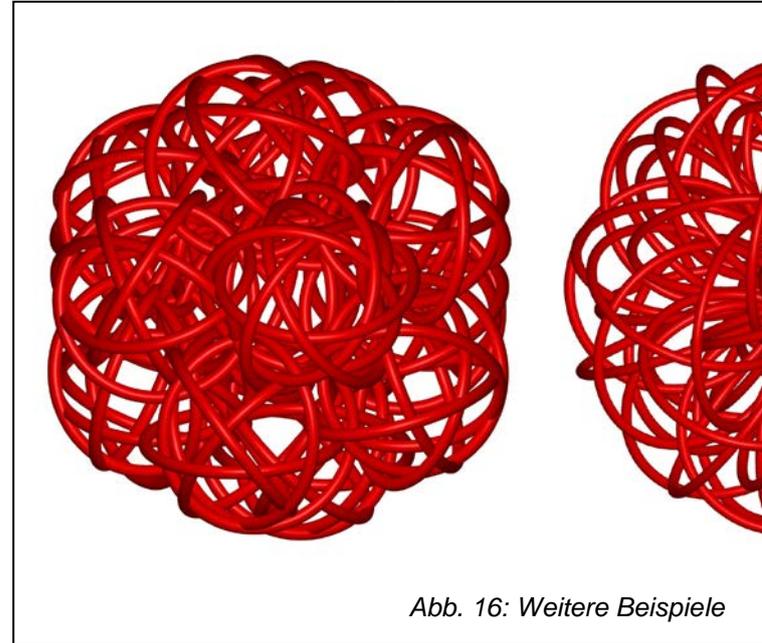


Abb. 16: Weitere Beispiele

Polyeder und ihre Symmetrien faszinieren seit alters her die Menschen. -> Man kommt ins Spielen!

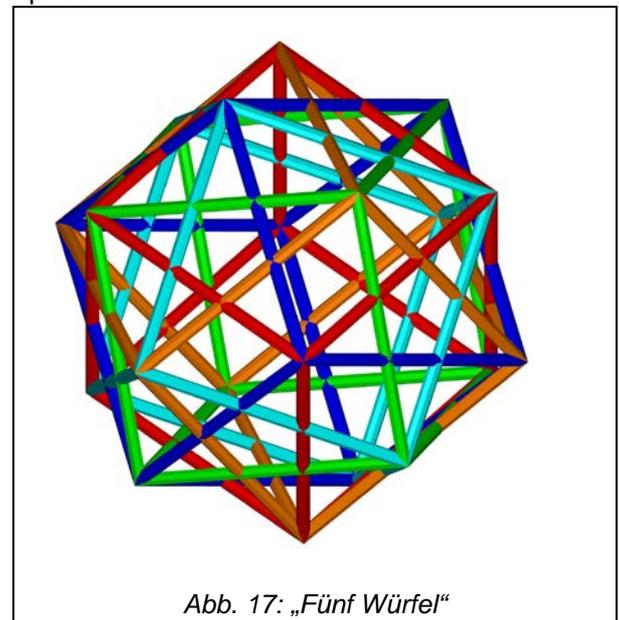


Abb. 17: „Fünf Würfel“

Ihre Darstellung ist ein Teil der Darstellenden Geometrie.

Leonardo da Vinci illustrierte *Luca Pacioli's* Werk „Divina Proportione“ mit Darstellungen der Platonischen Körper, (Cromwell S125),

Wenzeln Jamnitzer zeigt in seinem Werk „Perspectiva Corporum Regularium“ Tafeln Polyeder die von regulären Polyedern abgeleitet sind. (Cromwell S 133).

Johannes Kepler

Maurits Cornelis Escher

#### Literatur:

[1] J. Böhm – E. Quaisser: Schönheit und Harmonie geometrischer Formen. Akademie Verlag, Berlin 1991.

[2] H. S. M. Coxeter: Regular Polytopes. Dover, New York 1973.

[3] P. R. Cromwell: Polyhedra. Cambridge Univ. Press, Cambridge 1997.

[4] L. Fejes – Toth: Regular Figures. Int. Series of Monogr. in Pure and Appl. Math. 48, Pergamon, Oxford 1964.

[5] B. Grünbaum: Convex Polytopes. Pure and Applied Mathematics vol. XVI, Wiley, London – New York – Sidney, 1967.

[6] F. Hohenberg: Das abgestumpfte Dodekaeder des Archimedes und seine projektiven Eigenschaften. Sber. Österr. Akad. Wiss II, Bd. 192, 143 – 159 (1983).

[7] G. Schröpfer: Webseite <http://geometrie.asn-graz.ac.at/geof/> Hier finden Sie eine ganze Reihe von Stabmodellen dieser Art.

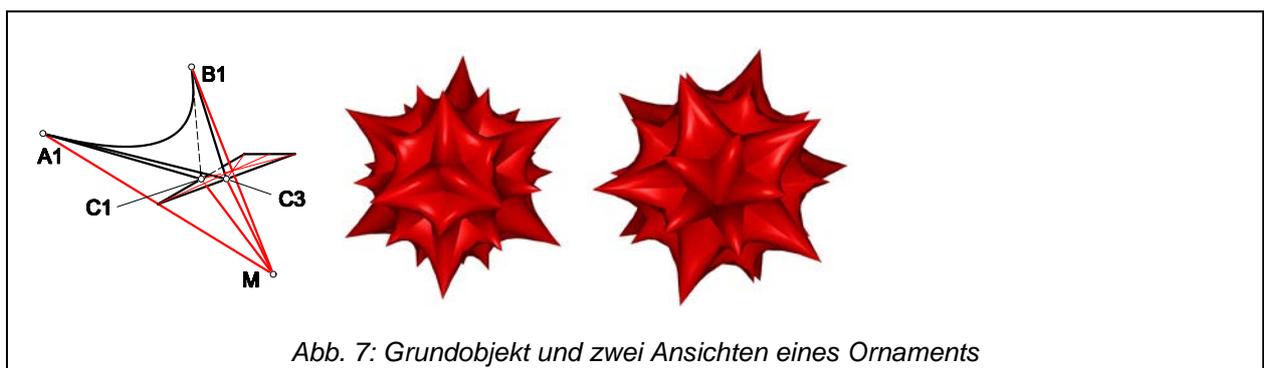


Abb. 7: Grundobjekt und zwei Ansichten eines Ornaments