

Und sie bewegen sich doch - neue übergeschlossene Polyedermodelle

Otto Röschel

0. Einleitung. Die vorliegende Arbeit gibt eine kurze Zusammenfassung des bei der Arbeitstagung in Strobl 2001 präsentierten Vortrages. Im Rahmen dieser Kurzfassung sollen die Ideen und Überlegungen angerissen werden, die zur Konstruktion solcher Modelle führen. An detailreicheren Informationen Interessierte seien auf die Originalarbeiten [2] - [6] verwiesen. In Abschnitt 1 wird die Definition sogenannter übergeschlossener Mechanismen vorgestellt. Kapitel 2 ist Überlegungen zu besonderen äquiformen Zwangsläufen gewidmet, die in den folgenden Abschnitten zur Konstruktion übergeschlossener Polyedermodelle führen.

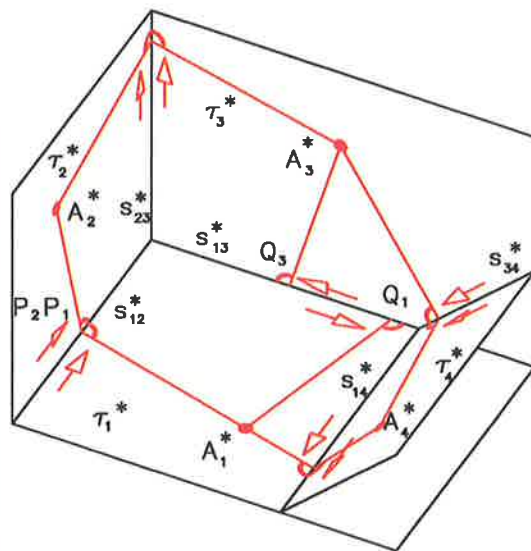


Abb.1: Twisted HEUREKA-Polyeder Abb.2: Gekoppelte lineare äquiforme Zwangsläufe

1. Übergeschlossene Mechanismen. Im dreidimensionalen euklidischen Raum läßt sich jede Kongruenztransformation durch sechs unabhängige Parameter erfassen. *Mehrgliedrige Mechanismen* entstehen durch die Koppelung von Festkörpern mittels Gelenken: Die Anzahl der unabhängigen Parameter, die zur Fixierung eines Gelenkes erforderlich sind, wird *Freiheitsgrad des Gelenkes* genannt. Wenn zwei feste Körper durch ein Gelenk mit dem Freiheitsgrad f gekoppelt werden, ist die gesamte Beweglichkeit des einen gegenüber dem anderen Festkörper auf den Wert f eingeschränkt.

Wenn wir eine Kette von n Festkörpern betrachten, die über r Gelenke mit den Freiheitsgraden f_i ($i = 1, \dots, r$) gekoppelt sind, läßt sich der theoretische Freiheitsgrad dieses Mechanismus zu

$$(1) \quad F = 6 \times (n - 1 - r) + \sum_{i=1}^r f_i$$

berechnen. Formel (1) ist die sogenannte *GRÜBLERsche Formel* (vgl. R. BEYER [1, S. 102]). $F \leq 0$ kennzeichnet theoretisch starre Mechanismen. Dieser Wert

ist aber rein theoretischer Natur und nimmt auf Redundanzen sowie geometrische Besonderheiten nicht Rücksicht. Sind alle Abmessungen des Mechanismus bekannt, so läßt sich der sogenannte *tatsächliche* Freiheitsgrad Φ eines Mechanismus angeben. Der kann größer als der theoretische sein. Ist nun der theoretische Freiheitsgrad $F \leq 0$, der tatsächliche hingegen ≥ 1 , so sprechen wir von einem *übergeschlossenen Mechanismus*. Er ist zumindest einparametrig beweglich, obwohl sein theoretischer Freiheitsgrad $F \leq 0$ ist.

Ein berühmtes Beispiel für ein übergeschlossenes Modell dieser Art ist das sogenannte *HEUREKA-Polyeder* (vgl. Abbildung 1 in einer verallgemeinerten Form): Es besteht aus 8 prismatischen Körpern mit dreieckiger Grundfläche, die durch 12 *sphärische Doppelscharniere* - ihr Freiheitsgrad ist jeweils $f_i = 2$ - gekoppelt sind. Der theoretische Freiheitsgrad berechnet sich zu $F = 6 \times (7 - 12) + 12 \times 2 = -6$. Von H. STACHEL [6] stammt ein eleganter Beweis der einparametrischen Beweglichkeit jener Sonderform, die von einem regulären Oktaeder ausgeht.¹

2. Gekoppelte lineare äquiforme ebene Zwangläufe. Als möglicher Ausgangspunkt (vgl. auch H. STACHEL [6], [7]) für die Konstruktion übergeschlossener Polyedermodelle erweist sich das Studium sogenannter *ebener äquiformer Zwangläufe*. Es sind dies einparametrische Bewegungsvorgänge innerhalb der Ähnlichkeitsgruppe der euklidischen Ebene. Wir definieren in einer Ebene τ_1^* einen *ebenen äquiformen Zwanglauf* $\zeta_1^* := \zeta_1^*(t)$ ($t \in I \subset \mathbb{R}$) mit *globalem Fixpunkt* A_1^* , bei dem ein Punkt P_1 der Gangebene ϵ_1 auf einer A_1^* nicht enthaltenden Geraden s_{12}^* geführt wird. ζ_1^* führt dann alle Punkte von ϵ_1 auf Geraden von τ_1^* (vgl. I.M. Yaglom [13, S. 71]). Bei Verwendung kartesischer Normalkoordinaten $\{A_1^*, x^*, y^*\}$ in τ_1^* and $\{A, x, y\}$ in ϵ_1 zur Beschreibung der Punkte können wir $\zeta_1^*(t) : (x, y) \longrightarrow (x^*, y^*)$ etwa durch

$$(2) \quad \begin{aligned} x^*(t, x, y) &:= (x \cos t - y \sin t) / \cos t \quad \text{mit } t \in (-\pi/2, +\pi/2) \\ y^*(t, x, y) &:= (x \sin t + y \cos t) / \cos t \end{aligned}$$

erfassen. Dieser äquiforme Zwanglauf wird durch Überlagerung einer Drehung um A_1^* (Winkel t) mit einer Ähnlichkeit (Zentrum A_1^* und Ähnlichkeitsfaktor $1/\cos t$) gewonnen. Bei dieser Parametrisierung befinden sich die Punkte von ϵ_1 zum Zeitpunkt $t = 0$ gerade in den Fußpunkten der Lote aus A_1^* auf die entsprechenden Bahngeraden. Abbildung 2 zeigt die Situation - die Pfeile deuten die Fortschreitrichtung für abnehmendes t an. Jede Gerade g_1^* von τ_1^* , die A_1^* nicht enthält, tritt als Bahngerade genau eines Punktes $X_1 \in \epsilon_1$ auf.²

Nun drehen wir τ_1^* samt dem darin ablaufenden äquiformen Zwanglauf ζ_1^* um die Gerade $s_{12}^* \subset \tau_1^*$ in eine Position τ_2^* (vgl. Abbildung 2). Der Punkt A_1^* gelangt in eine Position $A_2^* \in \tau_2^*$ - $\zeta_1^*(t)$ wird zum linearen äquiformen Zwanglauf $\zeta_2^*(t)$ einer Gangebene ϵ_2 gegenüber der Rastebene τ_2^* mit dem globalen Fixpunkt A_2^* . Sowohl in der ersten als auch in der zweiten Gangebene gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt $P_{1,2}$, der von ζ_1^* bzw. ζ_2^* auf s_{12}^* geführt wird - $\forall t \in I \subset \mathbb{R}$ fallen deren Positionen unter ζ_1^* und ζ_2^* zusammen - eine Koppelung der Zwangläufe ζ_1^* und ζ_2^* läßt sich über diese gemeinsame Punktbahn realisieren.

¹Vgl. auch die von K. WOHLHART in [8] - [12] angegebenen Verallgemeinerungen.

²Eine Konstruktion ist zum Zeitpunkt $t = 0$ leicht möglich (Ermittlung des Lotfußpunktes für das Lot aus A_1^* !).

Diese Vorgangsweise iterieren wir und erhalten eine Serie von gekoppelten ebenen linearen äquiformen Zwangsläufen. Sie sind untereinander inklusive Parametrisierung euklidisch kongruent, da sie alle durch fortgesetzte Drehungen aus dem ersten $\zeta_1^*(t)$ hervorgegangen sind.

Durch geeignetes Vorgehen kann unter Umständen eine *geschlossene Konfiguration* hergestellt werden (vgl. Abbildung 2). Dabei versuchen wir, zwei so erzeugte Zwangsläufe über eine gemeinsame Punktbahn zu koppeln. Dies gelingt nur, wenn von beiden beteiligten Zwangsläufen auf der gemeinsamen geradlinigen Punktbahn (i. A. in der Schnittgeraden der beiden Trägerebenen der Zwangsläufe) je ein Gangpunkt in derselben Art bewegt wird. Abbildung 2 zeigt eine Möglichkeit dieser Koppelung zwischen den Zwangsläufen ζ_1^* und ζ_4^* . Zwischen ζ_1^* und ζ_3^* ist so eine Koppelung nicht möglich, da die gemeinsame Punktbahn bei diesen beiden Zwangsläufen gegenläufig überstrichen wird (Punkte Q_1 und Q_3 !).

In [3] und [5] ist es gelungen, diese geschlossenen Konfigurationen zu charakterisieren. Erste Beispiele stellen sich dann ein, wenn wir τ_i^* als Tangentialebenen einer fest gewählten Kugel mit Berührungspunkten A_i^* ansetzen. Die Geraden $s_{i,i+1}^*$ sind dann die Schnittgeraden $\tau_i^* \cap \tau_{i+1}^*$.³ Abbildung 3 zeigt, wie auf diese Art in den einzelnen Ebenen τ_i^* Polygone (in der Ebene τ_1^* ein Viereck, in der Ebene τ_2^* ein Dreieck) entstehen, die bei unseren äquiformen Zwangsläufen gekoppelt werden können.

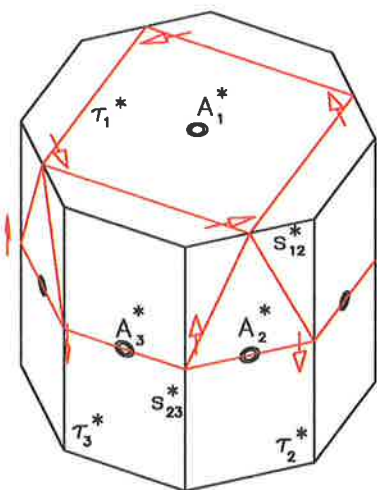


Abb.3: Bewegte Polygone

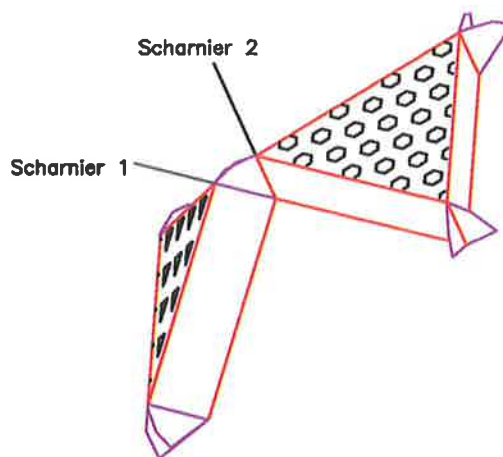


Abb.4: Sphärische Doppelscharniere

3. Gekoppelte Zwangsläufe im Sinne der euklidischen Bewegungsgruppe.

Wir setzen voraus, dass uns die oben angeführte Konstruktion einer Serie gekoppelter ebener äquiformer Zwangsläufe gelungen ist. Sie sind inklusive Parametrisierung euklidisch kongruent mit dem gemeinsamen Skalierungsfaktor $1/\cos t$. Einer Idee von H. STACHEL [6] folgend überlagern wir diese äquiformen Zwangsläufe mit einer von der Zeit abhängigen zentrischen Streckung oder Stauchung aus einem festen Punkt O^* mit Faktor $\cos t$. Die ebenen äquiformen Zwangsläufe werden dabei zu räumlichen Zwangsläufen hinsichtlich der Gruppe der euklidischen Kongruenztransformationen, die ebenfalls wieder (auch hinsichtlich der Parametrisierung) untereinander kongruent sind.

³Diese Beispiele sind aber nicht die einzigen (vgl. [5]).

Die Koppelung der Punkte zweier Systeme, die ehemals auf einer gemeinsamen Bahngeraden geführt wurden, bleibt aufrecht. Da der Winkel zwischen den Ebenen τ_i^* bei unserer Streckung nicht verändert wird, kann die Koppelung nach der Skalierung durch sphärische Doppelscharniere (Drehachsen in den Normalen der ehemaligen Gangebenen) realisiert werden. Sollten benachbarte Ebenen zusammenfallen, kann sogar ein gewöhnliches Scharnier (1R-Gelenk) zur Koppelung verwendet werden. Zur Realisierung der Gangsysteme eignen sich daher gerade Prismen gut, die über den zu koppelnden Punkten (und damit den Basispolygonen - vgl. Abb. 3) in den Ebenen τ_i^* errichtet werden. Ihre Kanten stellen bereits die Scharniere (1R-Gelenke) unserer Mechanismen dar (vgl. Abb. 4).

Die Ausgangsebenen τ_i^* lassen sich als Facettenebenen von - nicht notwendig konvexen - Polyedern ansehen. Unsere Konstruktion greift in diesem Sinn auf Polyeder zurück. Wenn wir die geschilderte Vorgangsweise zur Erzeugung eines Mechanismus wählen, werden wir daher von *zwangsläufig beweglichen Polyedermodellen* sprechen. Bei den Beispielen werden wir die Ausgangspolyeder angeben.

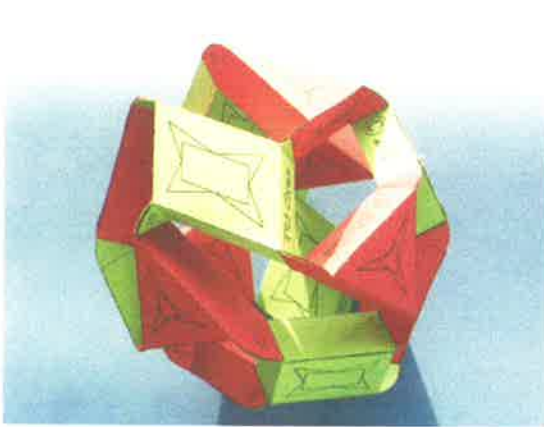


Abb.5: Modell Eckengestützter Würfel



Abb.6: Kantengestütztes Pentagondodekaeder

4. Beispiele für übergeschlossene Polyedermodelle. Für vier topologisch verschiedene Varianten sollen hier Beispiele von geschlossenen Anordnungen vorgestellt werden:

Typ I - Topologischer Typ der Kugel: Die fraglichen Ebenen τ_i^* lassen sich hier im Allgemeinen als Facettenebenen eines konvexen Polyeders deuten. Falls sich die vorhin angegebene Prozedur schließen läßt, haben wir zumindest zwangsläufig bewegliche Polyedermodelle ermittelt. Abbildungen 5 und 6 zeigen typische Beispiele dieser Art. Das erste Modell hat die Struktur eines *eckengestützten Würfels* und führt auf insgesamt 14 prismatische Festkörper (6 mit Vierecksbasis, 8 mit Dreiecksbasis), die über 24 sphärische Doppelscharniere gekoppelt sind. Der theoretische Freiheitsgrad errechnet sich damit zu $F = -18$.

Im zweiten Beispiel (Abbildung 6) bilden die Ebenen τ_i^* ein gestütztes Pentagondodekaeder, bei dem die von zwei gegenüberliegenden Fünfecken ausgehenden Kanten mittels Tangentialebenen der Inkugel des Polyeders abgeschnitten wurden. Demgemäß entstehen 22 prismatische Festkörper (2 mit Fünfecksbasis, je 10 mit Vierecks- und mit Dreiecksbasis), die über 40 sphärische Doppelscharniere gekoppelt sind. Der

Grübler-Wert (1) dieses hochgradig übergeschlossenen Mechanismus berechnet sich zu $F = -34$.

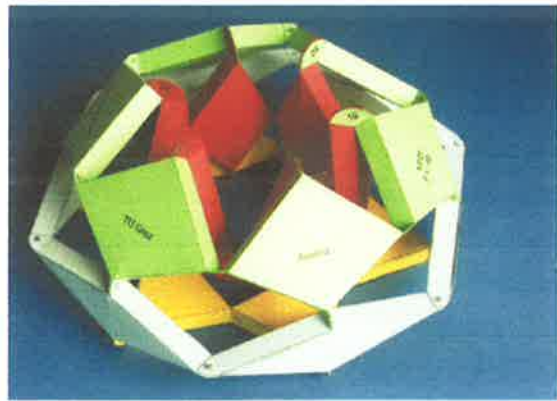


Abb.7: Variante zum Twisted HEUREKA-Polyeder Abb.8: Topologischer Torustyp

Typ II - Topologischer Typ des Zylinders: Dazu gehören alle Varianten des HEUREKA-Polyeders (siehe Abbildung 1). Ein weiteres Beispiel zeigt Abbildung 7: Vier Prismen über Vierecksbasis und vier entartete Prismen (einfache Stege) sind durch 12 sphärische Doppelscharniere verbunden. Auch hier ist der Grübler-Wert $F = -6$.

Typ III - Topologischer Typ des Torus: Als Beispiel zeigen die Abbildungen 8 und 9 zwei Ansichten eines übergeschlossenen Modelles, das aus insgesamt $4 \times 6 = 24$ prismatischen Festkörpern mit viereckiger Grundfläche besteht. Sie sind über 42 sphärische Doppelscharniere sowie 6 einfache Scharniere gekoppelt. Ihr Grübler-Wert beträgt daher $F = -60$.

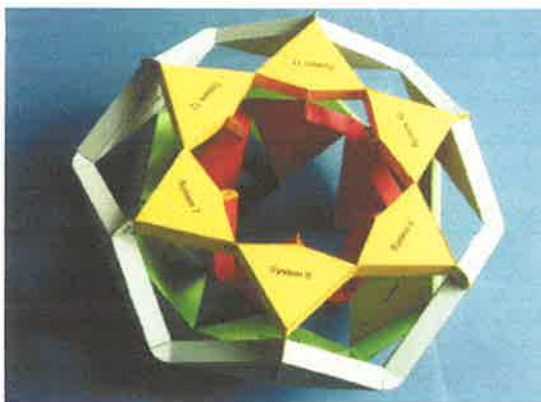


Abb.9: Topologischer Typ eines Torus Abb.10: Reduzierter Möbius-Mechanismus

Typ IV - Topologischer Typ des MÖBIUS-Bandes: Solche Beispiele sind mit wenigen Festkörpern ohne Selbstdurchdringungen nicht zu realisieren. Um Selbstschnitte zu vermeiden, muß zumindest ein Gelenk eliminiert werden. Als interessantes Beispiel zeigt Abbildung 10 einen *reduzierten Möbius-Mechanismus*. Sein Ausgangspolyeder ist ein Würfel. Da ein Gelenk weggelassen wurde, entstehen statt der zu erwartenden 6 dreieckigen Prismen nur 4 - die beiden anderen Prismen entarten zu Stegen. Dieses einfache Modell gestattet neben der aus der Konstruktion folgenden einparametrischen Beweglichkeit noch verschiedene zweiparametrische Bewe-

gungsvorgänge, die sich in Verzeigungslagen von den Zwangläufen abspalten. Der Grübler- Wert dieses Modelles beträgt $F = -2$.

Literatur

- [1] Beyer, R. (1963), Technische Raumkinematik. Springer, Berlin - Göttingen - Heidelberg.
- [2] Röschel, O., (1995), Zwangläufig bewegliche Polyedermodelle I. *Math. Pannonica*, **6/1**, pp. 267 - 284.
- [3] Röschel, O., (1996), Zwangläufig bewegliche Polyedermodelle II. *Studia Sci. Math. Hung.*, **32**, pp. 383 - 393.
- [4] Röschel, O., (2000), Möbius mechanisms. In: J. Lenarcic - M.M. Stanisic (eds.): *Advances in Robot Kinematics*, 375 - 382, Kluwer Acad. Publ., Netherlands.
- [5] Röschel, O., (2001), Zwangläufig bewegliche Polyedermodelle III. *Math. Pann.*, **12/1**, pp. 55 - 68.
- [6] Stachel, H., (1991), The HEUREKA-Polyhedron. *Proceedings of Coll. Math. Soc. J. Bolyai*, pp. 447 - 459.
- [7] Stachel, H., (1992), Zwei bemerkenswerte bewegliche Strukturen. *Journ. of Geom.*, **43**, pp. 14 - 21.
- [8] Wohlhart, K., (1993), Dynamics of the Turning Tower. *Proc. d. IV. Ogolnopska Konf. Maszyn Wlokiennicznych i Dzwigowych*, pp. 325 - 332.
- [9] Wohlhart, K., (1993), Heureka Octahedron and Brussels folding cube as special cases of the turning tower. *Proc. 6th IFToMM Symp. Bucuresti*, pp. 303 - 312.
- [10] Wohlhart, K., (1995), Das dreifach plansymmetrische Oktoid und seine Punktbahnen. *Math. Pannonica*, **6/2**, pp. 243 - 265.
- [11] Wohlhart, K., (1995), New Overconstrained Spheroidal Linkages. *Proc. 9th World Congr. on the Theory of the Machines and Mechanisms, Milano*, pp. 149 - 155.
- [12] Wohlhart, K., (1998), The kinematics of Röschel polyhedra. pp. 277 - 286. In: *Advances in Robot Kinematics (J. Lenarcic - M. Husty, eds.)*, Kluwer Acad. Pbl., Netherlands.
- [13] Yaglom, I. M., (1968), Geometric transformations II. *Random House*, Washington.

Anschrift des Autors:

Institut für Geometrie, TU Graz, Kopernikusgasse 24, A-8010 Graz

email: roeschel@tugraz.at