Bemerkungen zum Satz von ABRAMESCU in der euklidischen und der isotropen Ebene

von

Otto Röschel

Leoben

1. Euklidische Ebene. Zu einem gegebenen wendepunktfreien C^3 - Kurvenstück c der euklidischen Ebene, das in der kom - plexen Darstellung

$$z(t) = x(t) + i.y(t) \tag{1}$$

$(t \in (-\infty,+\infty),\ x(t),\ y(t) \in C^3)$ gegeben ist, kann nach N. ABRAMESCU [1] und S. BILINSKI [3] aus dem Umkreis $\bar{u}$ eines Tangentendreiecks t, t_1, t_2 von c durch Grenzübergang ein Kreis u

$$u = \lim_{t_1,t_2 \longrightarrow t} \bar{u} \quad \text{(längs c)} \tag{2}$$

gefunden werden, den wir *ABRAMESCU - Kreis* von c im Berühr - punkt P von t nennen wollen. Für den Mittelpunkt M von u gilt nach [1] beziehungsweise [3]

$$\vec{PM} = \frac{1}{4}\cdot \vec{PM}^* \quad , \tag{3}$$

wobei M^* den Krümmungsmittelpunkt von c in P bezeichnet.
Da der Kreis $\bar{u}$ bekanntlich [1)] die Brennpunkte aller Parabeln trägt, die t, t_1 und t_2 berühren, können wir folgenden Satz beweisen :

Satz 1 : *Die Brennpunkte aller ein gegebenes wendepunktfreies* C^2 *- Kurvenstück c in einem regulären Punkt P oskulierenden Parabeln liegen auf dem ABRAMESCU - Kreis von c in P.*

---

1) Vergleiche [12, S. 216].

Beweis : Nach W. KICKINGER [5, S.28] ist der Ort der Brenn - punkte aller Parabeln mit einem gemeinsamen Krümmungselement $\{P, M^*\}$ ein Kreis, der durch zentrische Streckung mit Zentrum P und Streckfaktor $\frac{1}{4}$ aus dem gemeinsamen Krümmungskreis her - vorgeht. Daraus folgt unmittelbar Satz 1. □

Die ABRAMESCU - Kreise u aller Punkte P von c werden von c und einer weiteren Kurve h eingehüllt; der Berührpunkt von u und h heiße A. Längs c erfüllen die *Mittelpunkte* M der ABRAMESCU - Kreise die Kurve

$$m = z - i.z'.\frac{(i.z',z')}{4.(z',z'')} \quad [2] \tag{4}$$

mit $(a,b) := \frac{i}{2}.(a.\bar{b} - \bar{a}.b)$ $(a,b \in \mathbb{C})$[3] (vergleiche [2,S.248 ff.]).
Die *Verbindungsgerade* l = [A,P] der beiden Hüllpunkte von u ist bekanntlich die Normale der Tangente t_M von m in M und besitzt die Richtung

$$i.m' = iz'+z''\frac{(iz',z')}{4(z',z'')} + z'\frac{2(iz',z'')(z',z'')-(iz',z')(z',z''')}{4.(z',z'')^2}. \tag{5}$$

A ist damit Brennpunkt einer Parabel p, die c in P zumindest oskuliert. Als *Achsenrichtung* ergibt sich nach Spiegelung des Brennstrahls l an der Kurventangente t

$$b = iz'+z''\frac{(iz',z')}{4(z',z'')} + z'\frac{(iz',z')(z',z''')-4(iz',z'')(z',z'')}{4.(z',z'')^2}. \tag{6}$$

Die Richtung der *Affinnormalen* von c in P wird nach R. BEREIS [2, S. 249] durch

$$a = z'' - \frac{1}{3}.z'.\frac{(z',z''')}{(z',z'')} \tag{7}$$

beschrieben. Nach kurzer Rechnung bestätigt man

---

[2] Ableitungen nach t werden wir durch Striche kennzeichnen. m, z, z', z'' und z''' sind Funktionen von t.

[3] $\bar{a}$ ist die zu a konjugiert komplexe Zahl. (a,b) ist genau der Flächeninhalt eines Parallelogrammes mit den Seiten a und b.

$$(a,b) = 0, \tag{8}$$

woraus folgt, daß die Achsenrichtung von p mit der Affin - normalen übereinstimmt. Damit gilt der

Satz 2 : *Längs einem wendepunktfreien C^3 - Kurvenstück c werden die ABRAMESCU - Kreise von c und einer Kurve h ein - gehüllt, die den zu einem regulären Punkt P von c gehörenden ABRAMESCU - Kreis u in P und dem Affinparabelbrennpunkt A von c in P berühren.*[4)]

Abbildung 1

2. Isotrope Ebene. Gegeben sei ein wendepunktfreies C^3 - Kurvenstück c der isotropen Ebene, das von isotropen Tan - genten frei sein soll. Durch eine ebene isotrope Bewegung aus der Gruppe B_3

$$\begin{cases} \bar{x} = a + x \\ \bar{y} = b + c.x + y \end{cases} \qquad (a,b,c \in R) \tag{9}$$

gelingt es, c auf die *Normalform*

$$y = y(x) \quad \text{mit} \quad y(0) = y'(0) = 0 \qquad y(x) \in C^3 \tag{10}$$

zu transformieren [5)].

Nach H. SACHS [8, S. 662 ff.] kann in jedem Punkt P (x/y(x)) von c ein *isotroper Kreis von ABRAMESCU* gefunden werden, der

---

4) Nach A. CAZAMIAN [4, S.264 f.] liegen die Brennpunkte aller Kegelschnitte, die c in P hyperoskulieren, auf einer rationalen Kurve dritter Ordnung. Diese *Brennpunktskubik* besitzt in P einen Doppelpunkt mit der Kurventangente t und der Kurvennormalen als Tangente. Sie schneidet den zugehörigen ABRAMESCU - Kreis in P und dem Affinparabelbrennpunkt A von c in P.

5) Striche bedeuten nun die Ableitung nach der isotropen Bogenlänge x.

durch

$$\begin{cases} \bar{x} = x + t \\ \bar{y} = y(x) + y'(x).t + 2.y''(x).t^2 \end{cases} \qquad (11)$$

beschrieben wird. Da nach J. TÖLKE [11, S. 15] die isotropen Brennpunkte aller c in P oskulierenden Parabeln genau auf einem Kreis der Bauart (11) liegen, gilt

Satz 3 : *Die isotropen Brennpunkte aller ein gegebenes wende - punktfreies* C^3 *- Kurvenstück c in einem regulären Punkt P (mit nichtisotroper Tangente) oskulierenden Parabeln liegen auf dem isotropen Kreis von ABRAMESCU von c in P.*

Die längs c auftretenden isotropen ABRAMESCU - Kreise be - sitzen c und eine weitere Kurve h als Hüllkurven; Berühr - punkt ist stets der Kurvenpunkt P und ein im allgemeinen von P verschiedener Punkt A, für den man nach kurzer Rechnung

$$\begin{cases} \bar{x} = x + \frac{3}{2}.\frac{y''(x)}{y'''(x)} \\ \bar{y} = y(x) + y'(x).\frac{3}{2}.\frac{y''(x)}{y'''(x)} + \frac{9}{2}.\frac{y''(x)^3}{y'''(x)^2} \end{cases} \qquad (12)$$

findet. Das ist genau der in [7] gefundene *isotrope Affin - parabelbrennpunkt* von c in P.

Satz 4 : *Die isotropen ABRAMESCU - Kreise eines wendepunkt - freien* C^3 *- Kurvenstückes c, das keine isotropen Tangenten besitzt, umhüllen c und eine weitere Kurve h, deren Berühr - punkte mit dem zu P gehörenden ABRAMESCU - Kreis der isotrope Brennpunkt der Affinparabel von c in P und P selbst sind.*

3. Das isotrope Gegenstück zur Kubik von CAZAMIAN. Im Punkt P(O/O) besitzt die Affinparabel von c (10) die Darstellung

$$\left(\bar{x} + \bar{y}.\frac{y'''(0)}{3.y''(0)^2}\right)^2 = \frac{2.\bar{y}}{y''(0)} \qquad (13)$$

(vergleiche [7]). Alle c in P hyperoskulierenden Kegel - schnitte bilden das Büschel

$$\lambda.(\bar{x} + A.\bar{y})^2 + \bar{y}^2 = 2.\lambda.B.\bar{y} , \qquad (14)$$

wobei λ einen reellen Parameter bezeichnet, und $A := \frac{y'''(0)}{3.y''(0)^2}$ sowie $B := \frac{1}{y''(0)}$ gesetzt wurde. Die *isotropen Hauptachsen* (vergleiche [10, S. 389]) dieser Kegelschnitte erfüllen das Geradenbüschel

$$\lambda.(A.(\bar{x} + A.\bar{y}) - B) + \bar{y} = 0 \tag{15}$$

mit dem Scheitel S ($\frac{B}{A}$ / 0), woraus sich als Ort der isotropen Brennpunkte die Kurve f

$$B.\bar{y} = \bar{x}.(\bar{x} + A.\bar{y}) \tag{16}$$

ergibt. Die isotrope Bewegung

$$\begin{cases} x^* = \bar{x} - \frac{B}{A} \\ y^* = \bar{x}.\frac{1}{A} + \bar{y} + \frac{B}{A^2} \end{cases} \tag{17}$$

transformiert (16) auf die Normalform

$$x^*.y^* = -\frac{B^2}{A^3} = -\frac{27.y''(0)^4}{y'''(0)^3}. \tag{18}$$

Es ist dies nach [6, S.237 ff.] beziehungsweise [9, § 5] eine spezielle *Hyperbel erster* ($y'''(0) < 0$) beziehungsweise *zweiter Art* ($y'''(0) > 0$) oder ein *isotroper Kreis* (P ist *isotroper Scheitel* von c ($y'''(0) = 0$)). Eine Hyperbel erster beziehungsweise zweiter Art liegt genau dann vor, wenn der isotrope Winkel[6)]

$$\delta = -\frac{3.y''(0)^2}{y'''(0)} \tag{19}$$

zwischen der Kurventangente und der Affinnormalen in P positiv beziehungsweise negativ ist.

---

6) Vergleiche [7].

Dieser Kegelschnitt f berührt in P die Kurventangente t und schneidet den zu P gehörenden isotropen ABRAMESCU - Kreis neben P noch im isotropen Affinparabelbrennpunkt A. Daraus folgt

Satz 5 : *In einem regulären Punkt P eines wendepunktfreien* C^3 *- Kurvenstückes c der isotropen Ebene liegen die isotropen Brennpunkte aller c in P hyperoskulierenden Kegelschnitte im allgemeinen auf einem Kegelschnitt, der c in P berührt - c darf dabei in P keine isotrope Tangente besitzen.*

$\boxed{\text{Abbildung 2}}$

LITERATUR

[1] ABRAMESCU, N.: Limita razei cercului circumscris triunghiului format de trei tangente infinite vecine la o curbă plană. Gaz. Mat. 41, 31 - 32 (1935).

[2] BEREIS, R.: Aufbau einer Theorie der ebenen Bewegung mit Verwendung komplexer Zahlen. Österr. Ing. - Archiv 5, 246 - 266 (1951).

[3] BILINSKI, S.: Über einen kurventheoretischen Satz von N. Abramescu. Glasnik Mat. 3 (23), 253 - 256 (1968).

[4] CAZAMIAN, A.: Note sur la strophoide. Nouv. Ann. (3) 13, 264 - 265 (1894).

[5] KICKINGER, W.: Einfacher Beweis eines Satzes von F. Lau - renti über Parabeln mit gemeinsamem Krümmungselement. Elem. Math. 18, 28 - 29 (1963).

[6] МАКАРОВА, Н. М.: Кривые второго порядка в плоской пара - болической геометрии. Ученные записки МГУ, 222 - 251 (1963).

[7] RÖSCHEL, O.: Zur Kinematik der isotropen Ebene II. (In Vorbereitung).

[8] SACHS, H.: Ein isotropes Analogon zu einem Satz von Abramescu und einige Grenzwertformeln. Arch. Math. 23, 661 - 668 (1972).

[9] SACHS, H.: Lehrbuch der isotropen Geometrie. Vieweg (1984).

[10] STRUBECKER, K.: Geometrie in einer isotropen Ebene. Math.-Nat. Unterr. 15, 297 - 306, 343 - 351, 385 - 394 (1962/63).

[11] TÖLKE, J.: Parabeln mit gemeinsamem isotropen Krümmungs - kreis. Elem. Math. 35, 14 - 15 (1980).

[12] WEYR, E.: Die Elemente der projectivischen Geometrie. 2. Heft, Wilhelm Braumüller , Wien (1887).

Anschrift des Verfassers : Dr. Otto Röschel, Institut für Mathematik und Angewandte Geometrie, MU - Leoben, Franz - Josef - Straße 18, A - 8700 Leoben.

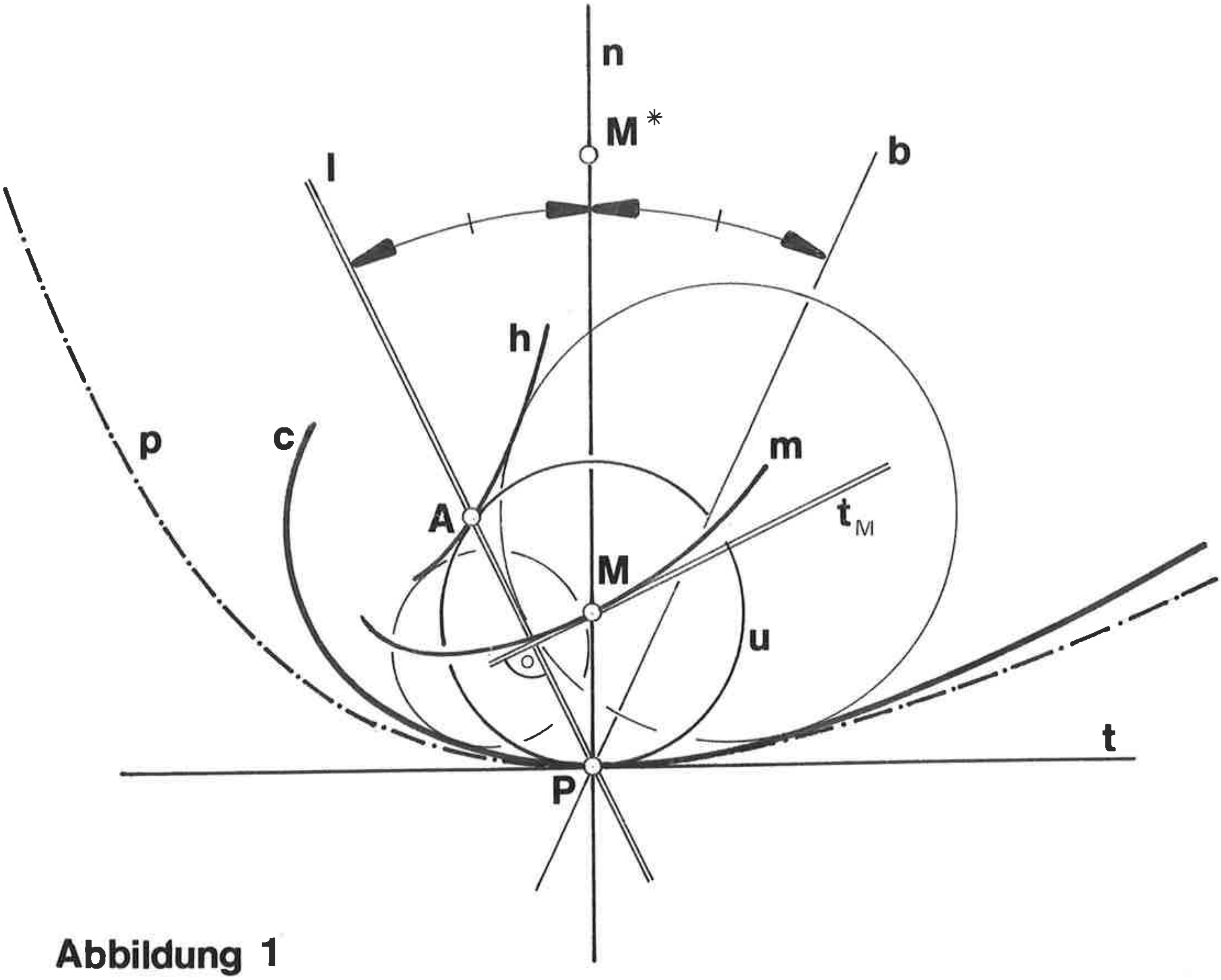

Abbildung 1

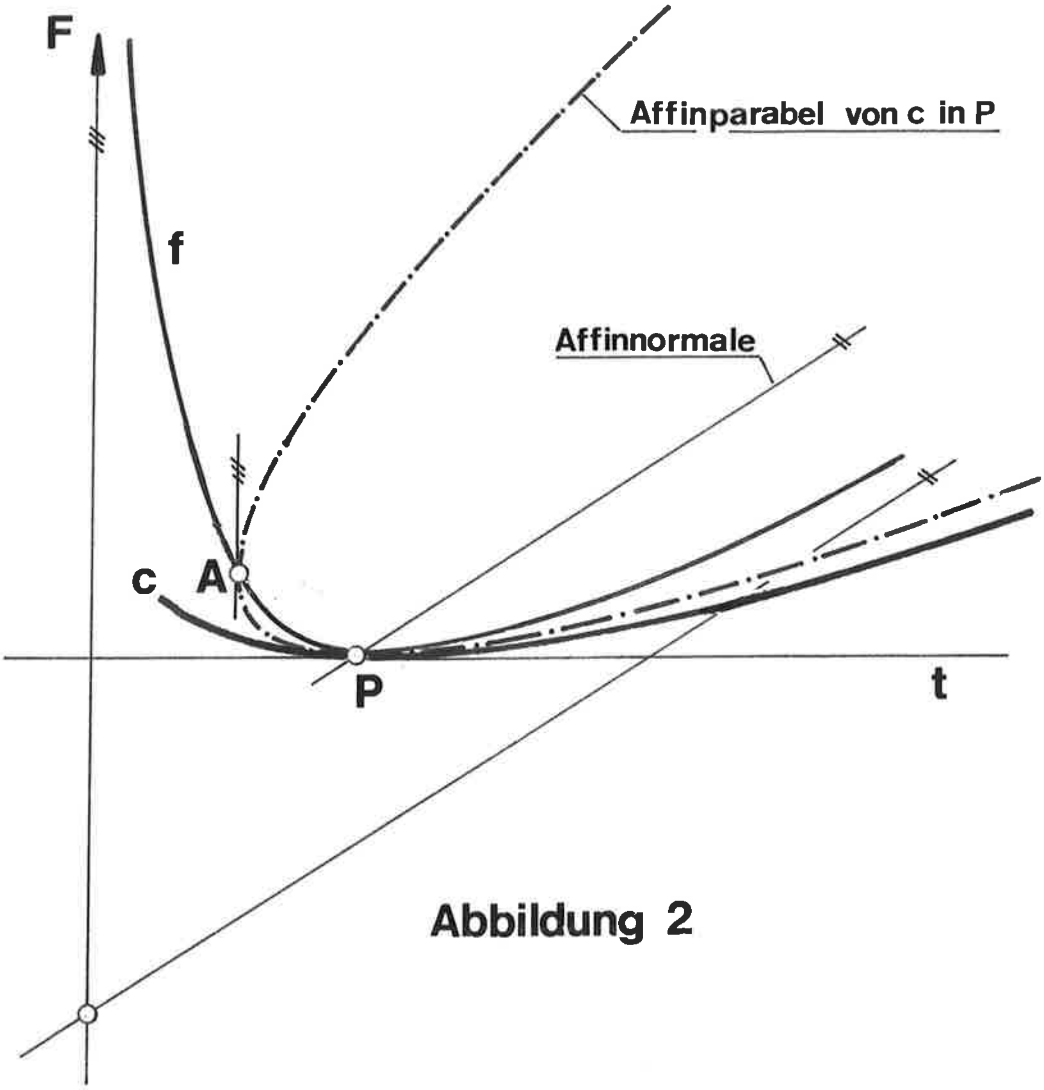

Abbildung 2