Eine affin - kinematische Erzeugung gewisser Flächen vierter Ordnung mit zerfallendem Doppelkegelschnitt II

von

Manfred Husty und Otto Röschel

Leoben

In [28] ist es gelungen, Flächen vierter Ordnung $F_4(d_1,d_2)$, deren Doppelkegelschnitt in zwei reelle Geraden d_1 und d_2 zerfällt, nach ihren *Achsenflächen* zu klassifizieren. Danach wurde für gewisse Flächen der Typen 1 und 2 eine *affin - kinematische* Erzeugung angegeben. In dieser Arbeit werden vorerst die in [28] aufgetretenen Zwangläufe spezialisiert; danach wird gezeigt, daß für alle Flächen des Typs 4 eine analoge Erzeugung möglich ist. Hierbei wird die Bezeichnungsweise von [28] konsequent beibehalten; die Numerierung wird lückenlos fortgesetzt.

3. Metrische Sonderformen der in [28] angegebenen Zwangläufe

Die in [28] durch (2.6), (2.8), (2.10), (2.12) und (2.14) erfaßten Zwangläufe besitzen die einheitliche Darstellung

$$\varphi'(u)=\begin{pmatrix} a_{11}(u) & 0 & 0 \\ a_{21}(u) & 1 & 0 \\ a_{31}(u) & \alpha.d_1(u) & a_{33}(u) \end{pmatrix}\varphi+\begin{pmatrix} d_1(u) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (3.1)$$

wobei $d_1(u)$ und $a_{33}(u)$ ein quadratisches Polynom

$$f(d_1(u),a_{33}(u)) = 0 \qquad \forall\, u \in I \in \mathbb{R} \qquad (3.2)$$

erfüllen, und $a_{11}(u)$, $a_{21}(u)$, $a_{31}(u)$, $a_{33}(u)$ sowie $d_1(u)$ beliebige Funktionen der Klasse $C^1(I)$ darstellen. Fordern wir, daß die *Achsenfläche* H ($z' = \alpha.x'.y'$) von (3.1) in sich transformiert wird, so erhalten wir die Bedingungen

$$a_{21}(u) = a_{31}(u) = 0 \quad \text{sowie } a_{11}(u) = a_{33}(u), \tag{3.3}$$

womit (3.1) die Gestalt

$$\varphi'(u) = \begin{pmatrix} a_{33}(u) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha d_1(u) & a_{33}(u) \end{pmatrix} \varphi + \begin{pmatrix} d_1(u) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

erhält. Für die Bahn eines nicht auf H gelegenen Punktes $P\ (x_o, y_o, z_o)$ $(z_o \neq \alpha x_o y_o)$ gewinnen wir

$$\begin{cases} x' = x_o a_{33}(u) + d_1(u) \\ y' = y_o \\ z' = \alpha d_1(u)\ y_o + a_{33}(u)\ z_o, \end{cases} \tag{3.5}$$

woraus sich

$$d_1(u) = \frac{x'z_o - z'x_o}{z_o - \alpha x_o y_o} \quad \text{und} \quad a_{33}(u) = \frac{z'x_o - \alpha x' y_o}{z_o - \alpha x_o y_o} \tag{3.6}$$

ergibt. Da $d_1(u)$ und $a_{33}(u)$ das quadratische Polynom (3.2) erfüllen, haben wir den

Satz 6: Die durch (3.4) beschriebenen affinen Zwangläufe Σ/Σ' führen die nicht auf der Achsenfläche gelegenen Punkte des Gangraumes auf Kurven zweiter Ordnung; Punkte der Achsenfläche H werden auf ihren die Doppelgerade d_2 treffenden Erzeugenden geführt.

Zum Zeitpunkt $u_o \in I$ gilt

$$\left.\frac{\partial \varphi'(u)}{\partial u}\right|_{u_o} = \dot{\varphi}'(u_o) = \begin{pmatrix} \frac{\dot{a}_{33}(u_o)}{a_{33}(u_o)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha[\dot{d}_1(u_o) - d_1(u_o)\frac{\dot{a}_{33}(u_o)}{a_{33}(u_o)}] & \frac{\dot{a}_{33}(u_o)}{a_{33}(u_o)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \dot{d}_1(u_o) - d_1(u_o)\frac{\dot{a}_{33}(u_o)}{a_{33}(u_o)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (3.7)$$

woraus unschwer die Bahnkurven der Momentanbewegung $\mathcal{M}(u_o)$ als

$$\begin{cases} x'(t) = -\beta + (x'_o + \beta)t \\ y'(t) = y_o' \\ z'(t) = -\alpha\beta y_o' + (z_o' + \alpha\beta y_o')\,t \end{cases} \qquad t \in (-\infty, +\infty) \qquad (3.8)$$

errechnet werden können, wobei abkürzend

$$\beta = \frac{\dot{d}_1(u_o)\, a_{33}(u_o) - d_1(u_o)\, \dot{a}_{33}(u_o)}{\dot{a}_{33}(u_o)} \qquad (3.9)$$

gesetzt wurde. $\mathcal{M}(u_o)$ führt damit allgemeine Punkte des Gangraumes auf Geraden, die die punktweise festbleibende Doppelgerade d_2 und die Fixpunktsgerade

$$f(u_o) \quad \begin{cases} x' + \beta = 0 \\ z' + \alpha\beta y' = 0 \end{cases} \quad (f(u_o) \subset H) \qquad (3.10)$$

treffen. Interpretieren wir H als Maßquadrik eines indefinit elliptischen bzw. für $\alpha = 0$ eines indefinit quasielliptischen Raumes (der dann die absoluten Punkte in den Fernpunkten der x'- und der y'-Achse besitzt), so stellt (3.8) eine einparametrige Cliffordsche Schiebungsgruppe dar. Der Bewegungsvorgang (3.4) kann als indefinit elliptische bzw. indefinit quasielliptische Schiebung längs einem geeigneten

Bahnkegelschnitt p_o aufgefaßt werden, bei der stets die Ferngerade d_2 der Bahnkegelschnittsebene von p_o punktweise fix bleibt, während die zweite Fixpunktsgerade f jene Erzeugendenschar der Achsenfläche H durchläuft, die zu d_2 windschief ist.[1] Die Kegelschnitte der beiden Schiebscharen sind dabei stets in Tangentialebenen der Maßquadriken enthalten. Wir haben damit den bemerkenswerten

Satz 7: Die in (3.4) angegebenen Zwangläufe können als Cliffordschiebungen in einem indefinit elliptischen bzw. indefinit quasielliptischen Raum aufgefaßt werden, in dem die Achsenfläche H als Maßquadrik dient. Die Clifford-Schiebung erfolgt im allgemeinen längs Kegelschnitten, deren Ebenen eine auf H gelegene Fixpunktsgerade von (3.4) enthalten.

Wir wollen im folgenden versuchen, auch weitere Flächen $F_4(d_1, d_2)$ auf ähnliche Weise zu erzeugen. Dafür kommen die übrigen Flächen $F_4(d_1, d_2)$ des Typs 1 und 2 offensichtlich nicht in Betracht:[2] Da der Startkegelschnitt k_1 den Punkt $D = (d_1, d_2)$ nicht enthält, schneidet die Kegelschnittsachse den Kegelschnitt k_1 in zwei unter Umständen konjugiert komplexen Punkten A und B, die auf der Achsenfläche geführt werden müssen. Andererseits wird gefordert, daß alle Punkte von k_1 in Ebenen durch die Doppelgerade d_2 gewegt werden, was offensichtlich nur dann möglich ist, wenn der Schnitt der Achsenfläche H mit $F_4(d_1 d_2)$ durchwegs aus Geraden besteht.

Auch Flächen des Typs 3 (1.10) lassen sich nicht auf diese Art erzeugen: Ihre Achsenfläche H ist der d_1 und d_2 enthaltende

---

1) Dieses Ergebnis schließt an das von H. BRAUNER [1] gefundene an; in [1] wurde gezeigt, daß sich für die Zwangläufe $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ in [28] bei der hier vorgenommen Spezialisierung Cliffordsche Schiebungen in einem indefinit quasielliptischen Raum einstellen.

2) In [28] wurden genau jene Flächen $F_4(d_1, d_2)$ des Typs 1 und 2 kinematisch erzeugt, deren Schnitt mit der Achsenfläche H (1.3) durchwegs aus Geraden besteht.

Kegel zweiter Ordnung (1.9). Der Startkegelschnitt k_1 enthält den Punkt D und besitzt dort die Hauptachse $a_1 \subset H$ als Tangente. Sollte ein Zwanglauf der angegebenen Art existieren, müßte a_1 in der Ebene $[a_1, d_2]$ gleiten, was aber unmöglich ist, weil a_1 an den nichtzerfallenden Kegel (1.9) gebunden ist.
Da sich herausstellt, daß alle Flächen $F_4(d_1, d_2)$ des Typs 4 eine Erzeugung auf die oben angeführte Art gestatten, wollen wir im folgenden Abschnitt die Flächen dieses Typs etwas genauer studieren.

4. Klassifikation der Flächen $F_4(d_1, d_2)$ vom Typ 4:
Die Normalform dieses Flächentyps lautet gemäß (1.12)

$$x_1^2x_2^2+x_o^2(b_{oo}x_o^2 + 2b_{o1}x_ox_1 + b_{11}x_1^2 + 2b_{o2}x_ox_2 + b_{22}x_2^2 +$$

$$+ 2b_{12}x_1x_2) + 2x_ox_1x_2(Ax_1 + Bx_2 + Cx_3) = 0. \quad (C \neq 0) \qquad (4.1)$$

Die Achsenfläche H zerfällt in das Ebenenpaar $x_1x_2 = 0$ und schneidet (4.1) nach d_1, d_2 und den Geraden

$$\begin{cases} x_1 = 0, & b_{oo}x_o^2 + 2b_{o2}x_ox_2 + b_{22}x_2^2 = 0 \\ x_2 = 0, & b_{oo}x_o^2 + 2b_{o1}x_ox_1 + b_{11}x_1^2 = 0. \end{cases} \qquad (4.2)$$

Wir diskutieren nun zwei Fälle getrennt:

(a) $b_{oo} \neq 0$: Die x_3-Achse (= Schnittgerade der Achsenebenen) liegt nicht auf der Fläche.

(b) $b_{oo} = 0$: Die x_3-Achse liegt auf der Fläche $F_4(d_1, d_2)$.

Fall a: OBdA. können wir durch Streckung $b_{oo} = 1$ erreichen und danach (4.1) in der Gestalt

$$(x_o^2 + 2b_{o2}x_ox_2 + b_{22}x_2^2)(x_o^2 + 2b_{o1}x_ox_1 + b_{11}x_1^2) =$$

$$= x_1x_2 \{(b_{11}b_{22}-1)x_1x_2 + 2x_o^2 \cdot (2b_{o1}b_{o2}-b_{12}) + 2x_o \cdot \qquad (4.3)$$

$$\cdot[(b_{o2}b_{11}-A)x_1 + (b_{o2}b_{22}-B)x_2-Cx_3]\}$$

darstellen, die nach Ausübung der projektiven Kollineation

$$(x_o:x_1:x_2:x_3) \longrightarrow (x_o:x_1:x_2:2x_o(2b_{o1}b_{o2} - b_{12}) + 2x_1(b_{o2}b_{11} - A) + \\ + 2x_2(b_{o2}b_{22} - B) - 2Cx_3) = (x_o':x_1':x_2':x_3') \tag{4.4}$$

und der Bezeichnung $D = b_{11}b_{22} - 1$ die Normalform

$$x_1x_2(Dx_1x_2 + x_ox_3) = (x_o^2 + 2b_{o2}x_ox_2 + b_{22}x_2^2)\cdot(x_o^2 + \\ + 2b_{o1}x_ox_1 + b_{11}x_1^2) \tag{4.5}$$

annimmt.
Damit existieren in diesem Fall hinsichtlich der Lage der einzelnen Geraden (4.2) offensichtlich die folgenden 15 Flächentypen :

(a1) $x_1x_2(Dx_1x_2 + x_ox_3) = (x_o-x_1)(x_o-Ax_1)(x_o-x_2)(x_o-Bx_2)$

(a2) $x_1x_2(Dx_1x_2 + x_ox_3) = (x_o-x_1)(x_o-Ax_1)(x_o^2 + (x_o-Bx_2)^2)$

(a3) $x_1x_2(Dx_1x_2 + x_ox_3) = (x_o-x_1)(x_o-Ax_1)(x_o-x_2)^2$

(a4) $x_1x_2(Dx_1x_2 + x_ox_3) = (x_o-x_1)(x_o-Ax_1)\ x_o(x_o-x_2)$

(a5) $x_1x_2(Dx_1x_2 + x_ox_3) = x_o^2(x_o-x_1)(x_o-Ax_1)$

(a6) $x_1x_2(Dx_1x_2 + x_ox_3) = (x_o^2 + (x_o-Ax_1)^2)(x_o^2 + (x_o-Bx_1)^2)$

(a7) $x_1x_2(Dx_1x_2 + x_ox_3) = (x_o^2 + (x_o-Ax_1)^2)(x_o-x_2)^2$

(a8) $x_1x_2(Dx_1x_2 + x_ox_3) = x_o(x_o^2 + (x_o-Ax_1)^2)(x_o-x_2)$ (4.6)

(a9) $x_1x_2(Dx_1x_2 + x_ox_3) = x_o^2(x_o^2 + (x_o-Ax_1)^2)$

(a10) $x_1x_2(Dx_1x_2 + x_ox_3) = (x_o - x_1)^2(x_o - x_2)^2$

(a11) $x_1x_2(Dx_1x_2 + x_0x_3) = x_0(x_0 - x_1)^2(x_0 - x_2)$

(a12) $x_1x_2(Dx_1x_2 + x_0x_3) = x_0^2(x_0 - x_1)^2$

(a13) $x_1x_2(Dx_1x_2 + x_0x_3) = x_0^2(x_0 - x_1)\ (x_0 - x_2)$

(a14) $x_1x_2(Dx_1x_2 + x_0x_3) = x_0^3(x_0 - x_1)$

(a15) $x_1x_2(Dx_1x_2 + x_0x_3) = x_0^4$

mit $A, B \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ [3]

Für $D \neq 0$ sind diese Flächen im allgemeinen von vierter Ordnung; für $D = 0$ zerfallen die Typen (a4)(a5) (a8) (a9) und (a11) - (a15) - es gibt im Fall a daher 21 verschiedene Flächentypen.[4]

Fall b: $b_{oo} = 0$. Die Fläche (4.1) mit $b_{oo} = 0$ wird von den Ebenen $x_1 = ux_o$ $(u\in(-\infty,+\infty))$ bzw. $x_2 = vx_o (v\in(-\infty,+\infty))$ nach d_1 bzw. d_2 und den Kegelschnitten

$$x_o^2[u^2+2b_{o1}u+b_{11}u^2] + 2x_ox_2[b_{o2} + b_{12}u + Au^2] + x_2^2[b_{22}+2Bu] + 2uCx_2x_3 = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$x_o^2[v^2+2b_{o2}v + b_{22}v^2] + 2x_ox_1[b_{o1} + b_{12}v + Bv^2] + x_1^2[b_{11} + 2Av] + 2vCx_1x_3 = 0 \qquad (4.7)$$

3) Für $D = 1$ bzw. $D = AB$, $D = AB^2$, $D = A$, $D = A^2B^2$ zerfallen einige dieser Flächen.

4) A und B bestimmen im wesentlichen das Doppelverhältnis der Schnittgeraden der Fläche mit der Ebene $x_1 = 0$ $(x_2 = 0)$, der Achsenebenenschnittgeraden $(x_1 = x_2 = 0)$ und der Doppelgeraden $d_1(d_2)$. Unsere Typeneinteilung enthält damit in einzelnen Fällen sogar eine zweiparametrige Schar von projektiv verschiedenen Flächen, die sich nur durch das oben beschriebene Doppelverhältnis unterscheiden.

geschnitten; die Pole von d_1 bzw. d_2 bezüglich dieser Kegelschnitte liegen auf den Kurven zweiter Ordnung

$$\begin{cases} m_1 \dots x_2 = 0, & b_{02}x_o^2 + b_{12}x_o x_1 + x_1(Ax_1 + Cx_3) = 0 \text{ bzw.} \\ m_2 \dots x_1 = 0, & b_{01}x_o^2 + b_{12}x_o x_2 + x_2(Bx_2 + Cx_3) = 0, \end{cases} \tag{4.8}$$

die durch die projektive Kollineation $(x_o:x_1:x_2:x_3) \to (x_o':x_1':x_2':x_3') = (x_o:x_1:x_2:b_{12}x_o + Ax_1 + Bx_2 + Cx_3)$ - nach Weglassen Striche - auf die Normalform

$$\begin{cases} m_1 \dots x_2 = 0 & x_1x_3 + b_{02}x_o^2 = 0 \text{ bzw.} \\ m_2 \dots x_1 = 0 & x_2x_3 + b_{01}x_o^2 = 0 \end{cases} \tag{4.9}$$

transformiert werden können. Als Normalform der Flächengleichung (4.1) mit $b_{oo} = 0$ stellt sich somit

$$x_1x_2(x_1x_2 + 2x_ox_3) + x_o^2[x_1(2b_{01}x_o + b_{11}x_1) + x_2(2b_{02}x_o + b_{22}x_2)] = 0 \tag{4.10}$$

ein. Eine kurze Diskussion der Lage der Geraden (4.2) mit $b_{oo} = 0$ ergibt im Fall b die folgenden sechs Normalformen für Flächen dieses Typs:

$$\begin{aligned}
&\text{(b1)} \quad x_1x_2(x_1x_2 + 2x_ox_3) = x_o^2[x_1(ax_o - bx_1) + cx_2(x_o - x_2)] \\
&\text{(b2)} \quad x_1x_2(x_1x_2 + 2x_ox_3) = x_o^2[bx_1^2 + cx_2(x_o - x_2)] \\
&\text{(b3)} \quad x_1x_2(x_1x_2 + 2x_ox_3) = x_o^2[ax_ox_1 + cx_2(x_o - x_2)] \\
&\text{(b4)} \quad x_1x_2(x_1x_2 + 2x_ox_3) = x_o^2[bx_1^2 + cx_2^2] \\
&\text{(b5)} \quad x_1x_2(x_1x_2 + 2x_ox_3) = x_o^2[bx_ox_1 + cx_2^2] \\
&\text{(b6)} \quad x_1x_2(x_1x_2 + 2x_ox_3) = x_o^3(bx_1 + cx_2)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b4) ist dabei der bemerkenswerte Sonderfall einer Römerfläche (vgl. [29]), bei der die auf d_1 und d_2 gelegenen Zwickpunkte in D zusammengerückt sind.
Zusammen mit (4.6) haben wir nun den folgenden

Satz 8.: Unter den Flächen $F_4(d_1, d_2)$ vom Typ 4 existieren 27 projektiv verschiedene Flächenklassen, deren Normalformen in (4.6) und (4.11) dargestellt sind.

5. Eine affin-kinematische Erzeugung der Flächen (4.6).
Wir verwenden den Zwanglauf (3.1) und wählen als Bahnkurve p_o des Punktes (0, 0, 1) den D enthaltenden Kegelschnitt

$$y' = 0, \quad z' = \frac{\beta(x'+1)^2 + \gamma(x'+1) + 1-\beta-\gamma}{x'+1} \qquad (5.1)$$

$$\beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

womit wir (3.1) oBdA in der Gestalt

$$\mathfrak{y}'(u) = \begin{pmatrix} a_{11}(u) & 0 & 0 \\ a_{21}(u) & 1 & 0 \\ a_{31}(u) & \alpha u & \frac{\beta(u+1)^2+\gamma(u+1)+1-\beta-\gamma}{u+1} \end{pmatrix} \mathfrak{y} + \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (5.2)$$

erhalten. Als Startkegelschnitt k_1 wählen wir den ebenfalls D enthaltenden Kegelschnitt

$$x = 0, \quad z = \frac{\delta y^2 + \varepsilon y + \varphi}{y} \qquad (\delta, \varepsilon, \varphi \in R) \qquad (5.3)$$

mit in die z-Achse fallender Hauptachse a_1. Er überstreicht bei (5.2) die Fläche

$$\mathfrak{y}'(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \alpha uv + \frac{\beta(u+1)^2+\gamma(u+1)+1-\beta-\gamma}{u+1} \cdot \frac{\delta v^2+\varepsilon v+\varphi}{v} \end{pmatrix}, \qquad (5.4)$$

deren algebraische Gleichung die Gestalt

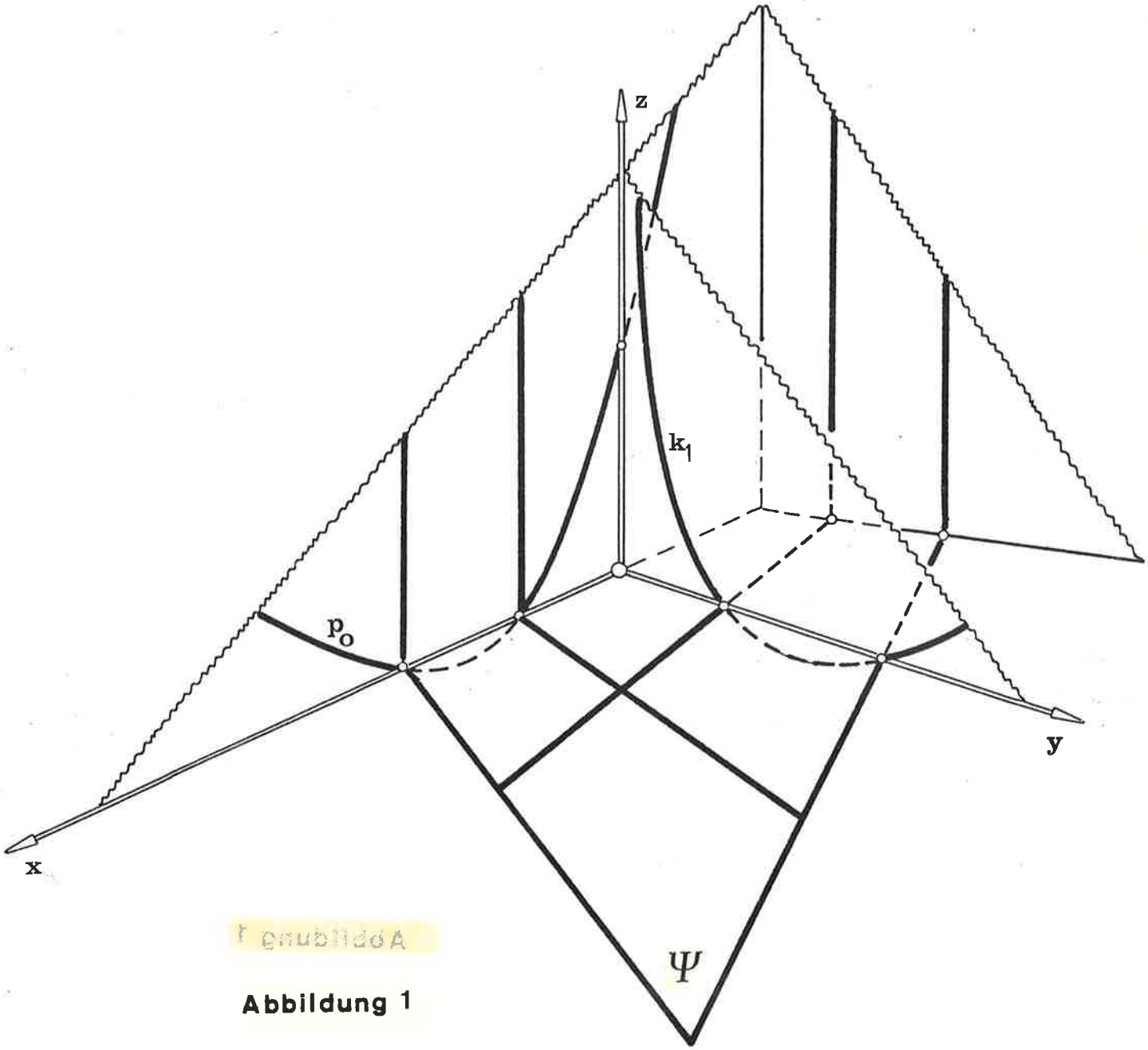

Abbildung 1

$$(x'+1)\ y'\ (z'-\alpha x'y') = [\beta(x'+1)^2+ (x'+1)+1-\beta-\gamma][\ y'^2+\varepsilon y'+\varphi] \quad (5.5)$$

besitzt. Übt man auf (5.5) die Koordinatentransformation

$(x', y', z') \rightarrow (x = x'+1, y = y', z = z'+\alpha y')$ aus, so erhält man

$$xy(z - \alpha xy) = [\beta x^2+\gamma x+1-\beta-\gamma]\ [\delta y^2+\varepsilon y + \varphi], \quad (5.6)$$

woraus im Vergleich mit (4.5) und (4.6) der folgende Satz folgt:

Satz 9.: Alle Flächen (4.6) gestatten die durch (5.2) beschriebene affin-kinematische Erzeugung mit dem Startkegelschnitt k_1 (5.3).

In Abbildung 1 ist die Situation für den Haupttyp in einem axonometrischen Bild dargestellt - allen hier angegebenen Darstellungen liegt ein kartesisches Rechtssystem zugrunde. Hier erkennen wir die wesentliche Rolle der Fläche zweiter Ordnung

$$\Psi \ldots\ z' = \alpha x'y'. \quad (5.7)$$

Sie enthält so wie H die Doppelgeraden d_1 und d_2 und schneidet aus unserer Fläche $F_4(d_1 d_2)$ im allgemeinen noch ein Vierseit aus,

Abbildung 1

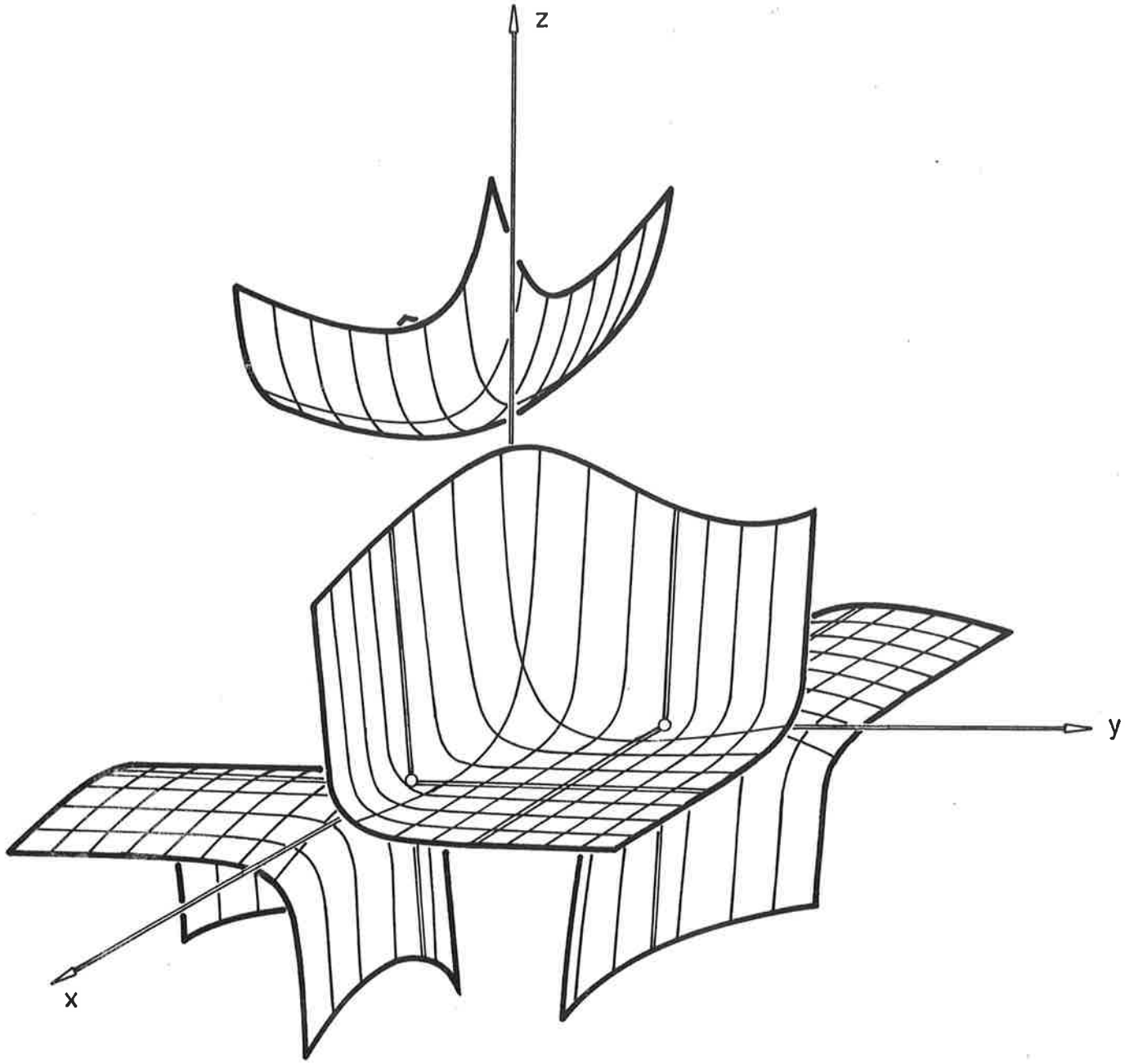

Abbildung 2

dessen Erzeugenden die Schnittpunkte des Startkegelschnittes k_1 und der Bahnkurve p_o mit Ψ enthalten.[5] Diese mit der Ausgangsfläche $F_4(d_1, d_2)$ invariant verbundene Fläche zweiter Ordnung Ψ spielt für die in Abschnitt 3 erwähnte Sonderform unserer Zwangläufe genau die Rolle der für Typ 1 und 2 wesentlichen Achsenfläche H. Wir haben damit den

Satz 10.: Die in (5.2) mit $a_{11}(u) = a_{33}(u)$, $a_{21}(u) = a_{31}(u) = o$ enthaltenen besonderen Zwangläufe können als Cliffordschiebung in einem indefinit elliptischen bzw. indefinit quasielliptischen Raum aufgefaßt werden, in dem die Fläche zweiter Ordnung Ψ als Maßquadrik dient. Die Cliffordschiebung erfolgt im allgemeinen längs zu p_o kongruenten Kegelschnitten, deren Trägerebenen eine auf Ψ gelegene Fixpunktsgerade d_2 von (5.2) enthalten. Die Bahnkurven sind dabei Kegelschnitte, die p_o in einem Punkt auf d_2 treffen.

Als Beispiel für eine dieser Flächen ist in Abbildung 2 eine axonometrische Darstellung der Fläche (4.6, a1o) angegeben; k_1 und p_o berühren jeweils Ψ.

Abbildung 2

5) Die einzelnen in (4.6) auftretenden Flächentypen unterscheiden sich - wie durch die angegebene Erzeugung besonders deutlich zu erkennen ist - durch die Lage der Kegelschnitte k_1 und p_o zur Fläche Ψ.

Für $\varphi = o$ zerfällt der Kegelschnitt k_1 (5.3) in die Geraden $x = y = o$ und g .... $x = o$, $z = \delta y + \varepsilon$, die beim Zwangslauf (5.4) die Fläche (5.5) mit $\varphi = o$ überstreichen. Die entstehende Fläche zerfällt somit in die Ebene $y' = o$ (Bahnebene von $x = y = O$) und in eine Regelfläche dritter Ordnung. Schneidet g die Fläche Ψ in einem eigentlichen Punkt W, so entsteht eine zum Plücker'schen Konoid projektiv-kollineare Fläche, die d_1 als Doppelgerade und die Bahngerade von W als Leitgerade besitzt. Ist die Startgerade g zu Ψ parallel, so entsteht eine CAYLEY'sche Regelfläche; liegt g auf Ψ, so entsteht nur Ψ selbst.
Auf dieselben Regelflächen dritter Ordnung führt die Annahme, daß der Leitkegelschnitt p_o, nicht aber der Startkegelschnitt k_1 zerfällt.

Abbildung 3 zeigt den Fall, in dem p_o in zwei Gerade zerfällt, von denen eine z-parallel ist. ($\beta = 1$, $\gamma = O$ in (5.1))

Die entstehende Regelfläche ist zu einem PLÜCKER'schen Konoid projektiv-kollinear.

Abbildung 3

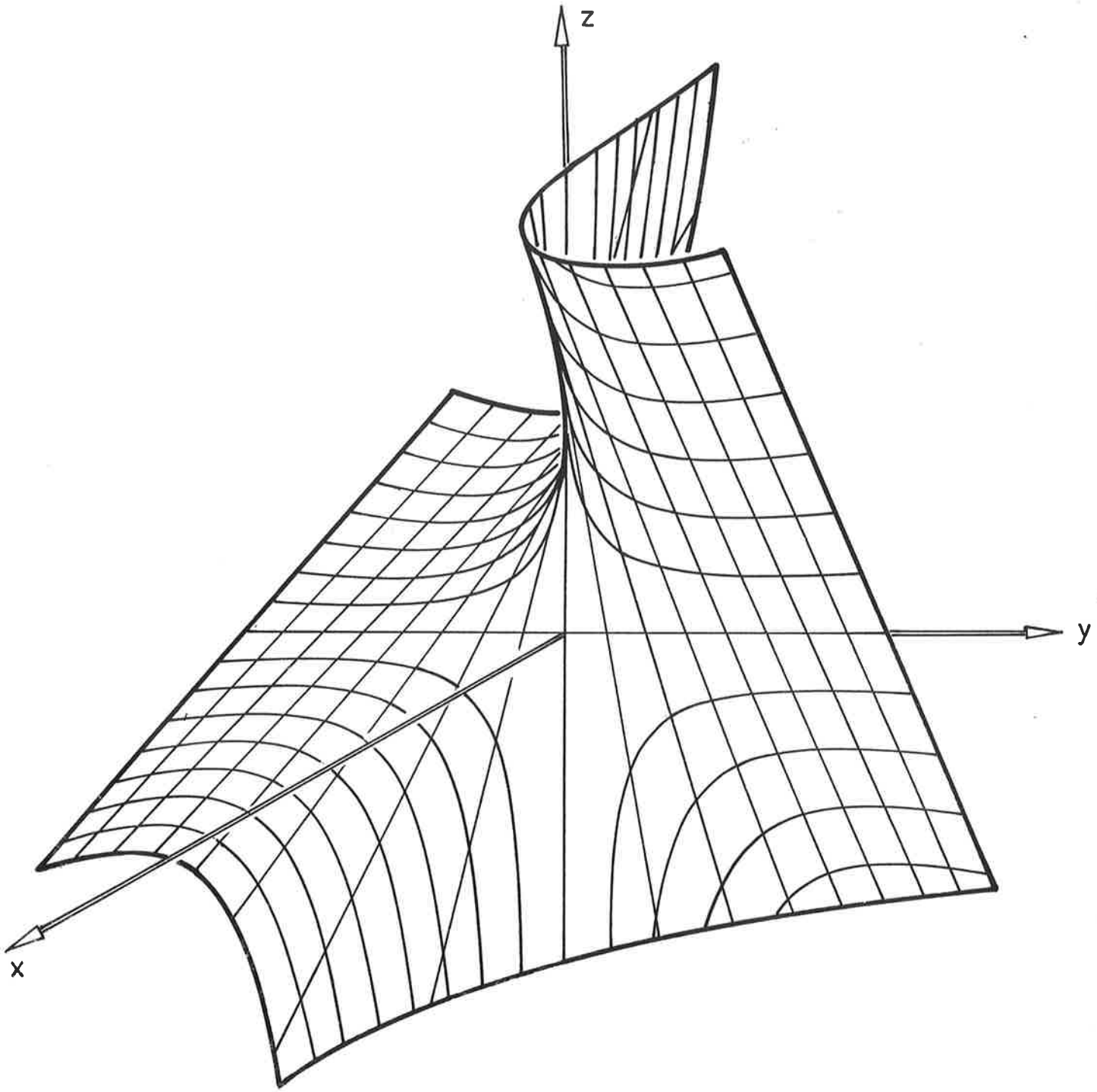

Abbildung 3

6. Eine affin-kinematische Erzeugung der Flächen (4.11)

Ein möglicher affiner Zwanglauf der Ebene x = o kann hier o. B. d. A. in der Normalform dadurch festgelegt werden, daß wir als Bahn des Punktes U (o, o, o) die x'-Achse, als Bahn des Punktes (o, o, 1) die Gerade

$$\varphi' = \begin{pmatrix} o \\ o \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ o \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \alpha \in \mathbb{R} \\ \lambda \in (-\infty, +\infty) \end{matrix} \qquad (6.1)$$

und als Bahn des Punktes (o, 1, o) die Hyperbel

$$p_o \ldots \quad y' = 1 \quad z' = \beta \frac{(x+1)^2 - 1}{x + 1} \qquad \beta \in \mathbb{R} \setminus \{o\} \qquad (6.2)$$

wählen und wieder die Forderung stellen, daß die Bahnkurven aller Punkte der Ebene x = o in zur [x' z']-Ebene parallelen Ebenen verlaufen sollen. Der Zwanglauf (2.2) erhält damit die Gestalt

$$\varphi'(u) = \begin{pmatrix} a_{11}(u) & o & o \\ a_{21}(u) & 1 & o \\ a_{31}(u) & \beta \frac{(u+1)^2-1}{u+1} & 1+\alpha u \end{pmatrix} \varphi + \begin{pmatrix} u \\ o \\ o \end{pmatrix}. \qquad (6.3)$$

mit beliebigen Funktionen $a_{11}(u)$, $a_{21}(u)$, $a_{31}(u) \in C^1(I)$

Unterwerfen wir die Starthyperbel

$$k_1 \ldots \quad x = o, \quad z = \frac{\delta(y+1)^2 + \varphi}{y + 1} \qquad \delta, \varphi \in \mathbb{R} \qquad (6.4)$$

diesem Zwanglauf , so entsteht eine Fläche mit der Parameterdarstellung

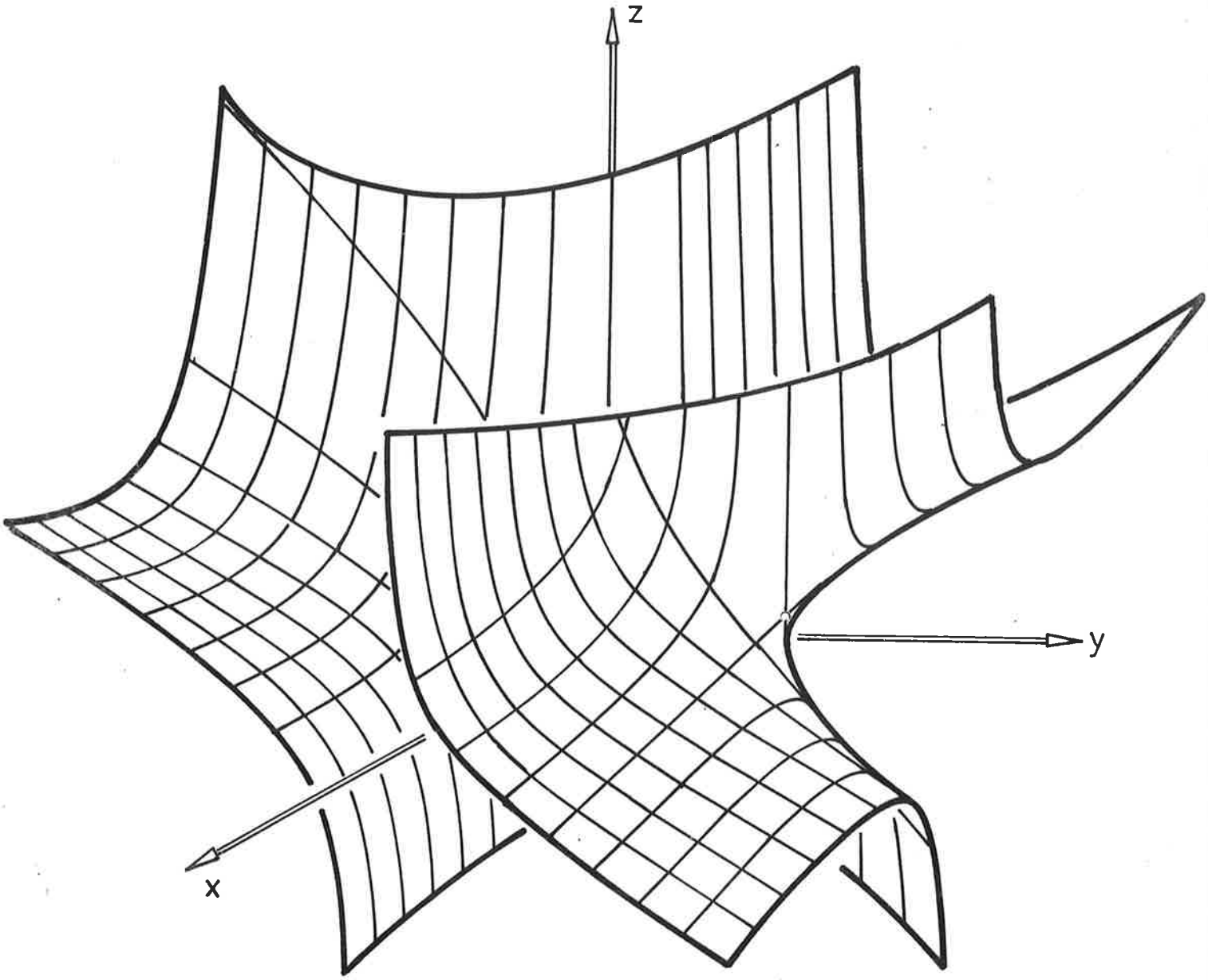

Abbildung 4

$$\varphi'(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \beta v\frac{(u+1)^2-1}{u+1} + (\lambda+\alpha u) \quad \frac{\delta(v+1)^2+\varphi}{v+1} \end{pmatrix} \qquad (6.5)$$

und der algebraischen Gleichung

$$z'(x'+1)(y'+1) = (1+\alpha x')(x'+1)[\delta(y'+1)^2+\varphi]+$$

$$+ \beta(y'+1)y'[(x'+1)^2-1]; \qquad (6.6)$$

die entstehende Fläche ist somit im allgemeinen eine Fläche vierter Ordnung, die unter anderem für $\alpha\delta+\beta = o$ zerfällt.

Für $\alpha\delta+\beta \neq o$ gelingt es, (6.6) mit der affinen Transformation

$$(x', y', z') \longrightarrow (x^*=x'+1,\ y^* =y'+1,$$

$$z^* = -\frac{z'+\beta(x'+1)-\delta(1-\alpha)(y'+1)}{2(\beta+\alpha\delta)})$$

auf die Normalform

$$x^*y^*[2z^*+x^*y^*] = Ax^*[1-\alpha+\alpha x^*] + By^*(1-y^*) \qquad (6.7)$$

zu bringen, wobei abkürzend

$$A = -\frac{\varphi}{\beta+\alpha\delta} \quad \text{und} \quad B = -\frac{\beta}{\beta+\alpha\delta} \qquad (6.8)$$

gesetzt wurde. Wir sind somit in der Lage, durch Wahl der Konstanten α, β, δ und φ alle Flächen der Typen (b1), (b2) und (b3) in (4.11) auf die gewünschte Art kinematisch zu erzeugen.

Für $\beta = o$ zerfällt p_o (6.2); wir erhalten jene Regelflächen dritter Ordnung, die bereits in Abschnitt 5 aufgetreten sind.

Abbildung 4 zeigt als Beispiel die Fläche (6.7) mit $\alpha = 0$, $A = 0{,}5$, $B = 1$

Abbildung 4

Wählen wir die Starthyperbel k_1 derart, daß eine Asymptote in die z-Achse fällt (ihre Punkte beschreiben dann im allgemeinen Geraden als Bahnkurven), so können wir oBdA

$$k_1 \ldots \qquad x = o, \; z = \delta \, \frac{y^2-1}{y} \tag{6.9}$$

setzen. k_1 überstreicht beim Zwanglauf (6.3) die Fläche mit der Parameterdarstellung

$$\varphi'(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \beta \frac{(u+1)^2-1}{u+1} v + (1+\alpha u) \, \delta \, \frac{v^2-1}{v} \end{pmatrix} \tag{6.10}$$

und der algebraischen Gleichung

$$(x'+1)y'z' = \delta(1 + \alpha x')(x'+1)(y'^2-1) + \\ + \beta y'^2[(x'+1)^2-1], \tag{6.11}$$

die für $\beta + \alpha\delta \neq o$ eine Fläche vierter Ordnung darstellt. Für $\beta + \alpha\delta \neq o$ bringt die affine Transformation

$$(x', y', z') \longrightarrow (x^* = x'+1, \; y^* = y', \; z^* = \\ = -\frac{z' - y'\delta(1-\alpha)}{2(\beta + \alpha\delta)}) \tag{6.12}$$

(6.11) auf die Normalform

$$x^* y^*(2z^* + x^* y^*) = bx^*[1-\alpha + \alpha x^*] + cy^{*2}, \tag{6.13}$$

wobei wir abkürzend

$$b = \frac{\beta}{\beta + \alpha\delta}, \quad c = \frac{\delta}{\beta + \alpha\delta} \tag{6.14}$$

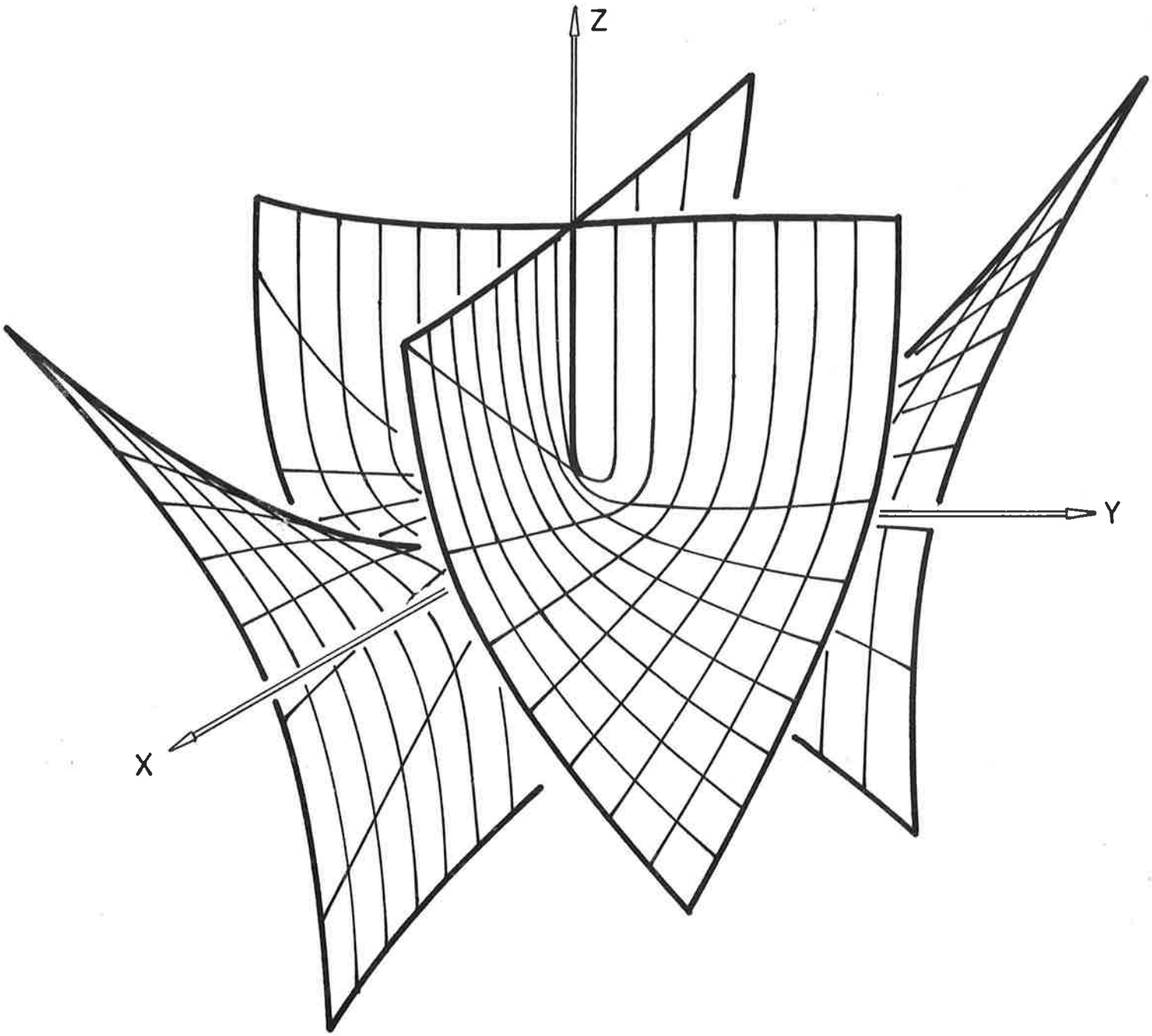

Abbildung 5

gesetzt haben. Ein Vergleich mit (4.11) zeigt, daß wir für $\alpha = 1$, den Typ (b4) und für $\alpha = 0$ den Typ (b5) gewinnen. Für $\alpha(\alpha-1) \neq 0$ erhalten wir eine zweite Erzeugungmöglichkeit des Typs (b2).
Ein interessantes Beispiel zeigt die Abbildung 5, wobei eine anscheinend bisher noch nicht bekannte Erzeugungsmöglichkeit einer Römerfläche angegeben wird.

Abbildung 5

Für bestimmte Sonderformen von Römerflächen hat W. WUNDERLICH euklidisch-kinematische Modelle vorgestellt (vgl. [29] und [30]), denen nun affin-kinematische zur Seite gestellt werden können.
Der letzte noch fehlende Flächentyp (4.11, (b6)) trägt neben der Doppelgeraden d_1, d_2 und der z-Achse keine weiteren Geraden. Um dennoch eine affin-kinematische Erzeugung zu erhalten, versuchen wir den Kegelschnitt k_1

$$k_1 \ldots\ldots x = 1, \quad z = \frac{\alpha + \beta y - y^2}{2y} \tag{6.15}$$

in der gewünschten Weise auf der Fläche (4.11, (b6)) zu bewegen. Dabei müssen die Punkte A, $\bar{A}$ $(1, \pm 1, \frac{\beta \pm \alpha \mp 1}{2})$ sowie B $(1, 2, \frac{\alpha+2\beta-4}{4})$ auf den Kegelschnitten

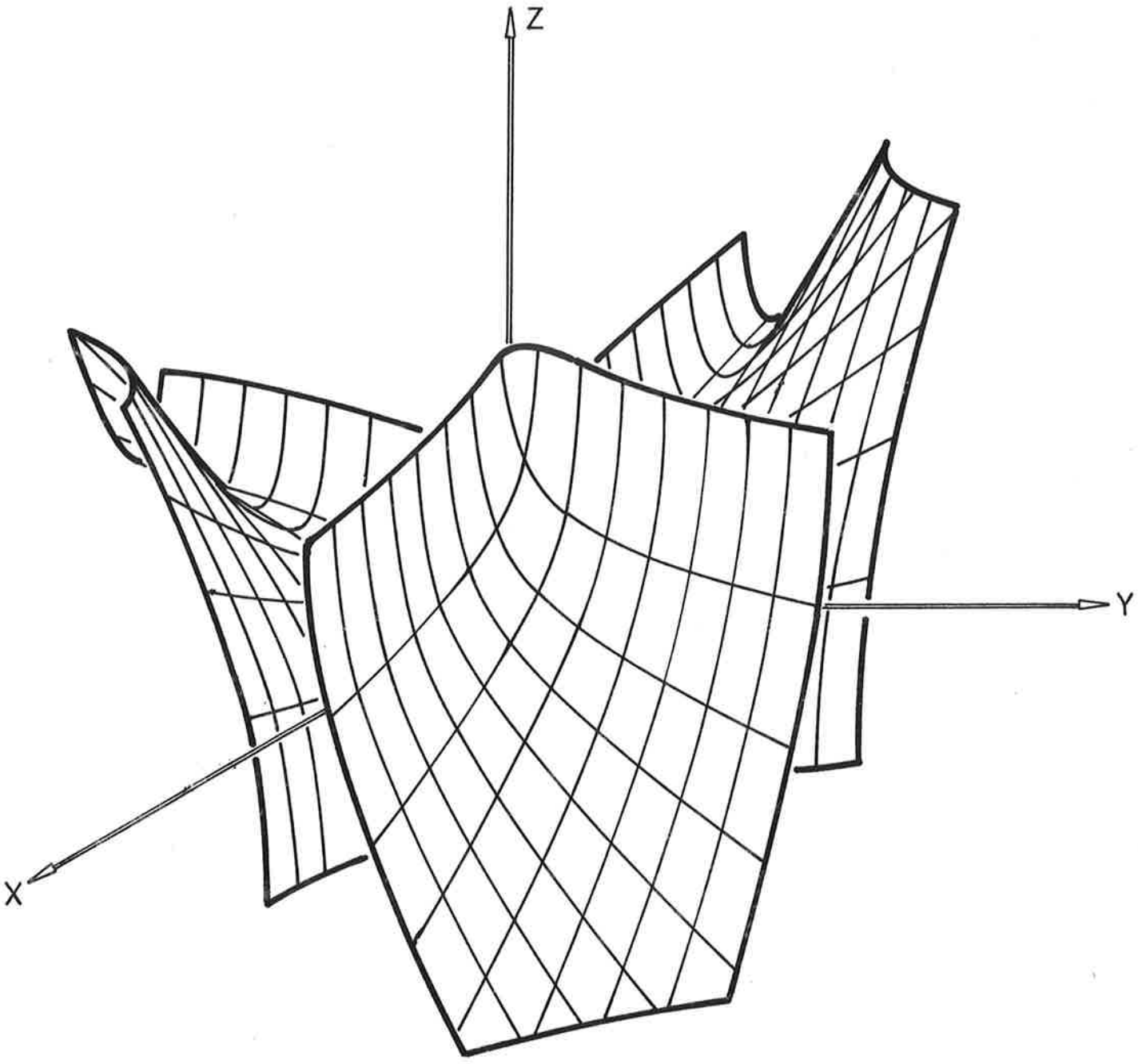

Abbildung 6

$$\begin{cases} a,\ \bar{a} \ \ldots\ y = \overset{+}{-}\,1, \quad z = \dfrac{\beta \overset{+}{-} \alpha x \overset{-}{+} x^2}{2x} & \text{sowie} \\ b \ \ldots\ y = 2, \quad z = \dfrac{2\beta + \alpha x - 4x^2}{4x} & \end{cases} \qquad \begin{matrix} \alpha\beta \neq 0 \\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R} \end{matrix} \qquad (6.16)$$

geführt werden, womit sich der Zwanglauf

$$\varphi'(u) = \begin{pmatrix} a_{11}(u) & 0 & 0 \\ a_{21}(u) & 1 & 0 \\ a_{31}(u) & -\frac{u}{2} & 1 \end{pmatrix} \varphi + \begin{pmatrix} u + 1 - a_{11}(u) \\ -\ a_{21}(u) \\ -\frac{\beta u}{2(u+1)} - a_{31}(u) \end{pmatrix} \quad u \in (-\infty, +\infty) \qquad (6.17)$$

einstellt. Dabei sind $a_{11}(u)$, $a_{21}(u)$ und $a_{31}(u)$ willkürliche Funktionen der Klasse $C'(\mathbb{R})$. Der Startkegelschnitt k_1 (6.15) überstreicht bei diesem Zwanglauf die Fläche

$$\varphi'(u, v) = \begin{pmatrix} u + 1 \\ v \\ -\frac{uv}{2} + \frac{\alpha + \beta v - v^2}{2v} - \frac{\beta u}{2(u+1)} \end{pmatrix}, \qquad (6.18)$$

deren algebraische Gleichung mit (4.11 (b6)) übereinstimmt.
Abbildung 6 zeigt eine axonometrische Darstellung der Fläche (4.11 b6) mit b = c = o,25.

Abbildung 6

Damit haben wir den

Satz 11.: Die Flächen $F_4(d_1, d_2)$ des Typs 4 lassen sich durch die Zwangläufe (5.2), (6.5) und (6.17) affin-kinematisch erzeugen. Bei diesen Zwangläufen wird ein Flächenkegelschnitt k_1 aus dem Ebenenbüschel um die Doppelgerade d_1 so bewegt, daß die Flächenkegelschnitte aus dem Ebenenbüschel um d_2 die Bahnkurven der Punkte von k_1 abgeben.

7. Metrische Sonderformen der in Abschnitt 6 bestimmten Zwangläufe

Betrachten wir vorerst den Zwanglauf (6.3): Mit der Zusatzforderung, daß alle Punkte der Doppelgeraden d_2 Fixpunkte sein sollen, erhalten wir (6.3) in der Gestalt

$$\varphi'(u) = \begin{pmatrix} 1+\alpha u & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta\frac{(u+1)^2-1}{u+1} & 1+\alpha u \end{pmatrix} \varphi + \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (7.1)$$

Zum Zeitpunkt $u = u_o$ gilt

$$\dot{\varphi}'(u) = \begin{pmatrix} \alpha A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & \alpha A \end{pmatrix} \varphi' + \begin{pmatrix} A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (7.2)$$

wobei abkürzend

$$A = \frac{1}{1+\alpha u_o} \quad \text{und} \quad B = \beta\left[\frac{(u_o+1)^2+1}{(u_o+1)^2} - \alpha\frac{(u_o+1)^2-1}{(u_o+1)(1+\alpha u_o)}\right] \qquad (7.3)$$

gesetzt wurde.
Die Momentanbewegung (7.2) besitzt für $\alpha \neq 0$ die Bahnkurven

$$\begin{cases} x'(t) = -\frac{1}{\alpha} + (x + \frac{1}{\alpha})\, e^t \\ y'(t) = y \\ z'(t) = -\frac{B}{\alpha A} y + (z + \frac{B}{\alpha A} y)\, e^t . \end{cases} \qquad (\alpha \neq 0) \qquad (7.4)$$

Diese Bahnkurven sind im allgemeinen Geraden, die die Fixpunktsgeraden d_2 und

$$f(u_o) \begin{cases} x + \frac{1}{\alpha} = 0 \\ z + \frac{B}{\alpha A} y = 0 \end{cases} \qquad (7.5)$$

treffen. Faßt man u_o als Parameter auf, so durchläuft die Fixpunktgerade $f(u_o)$ das in der Ebene $\Psi : x = -\frac{1}{\alpha}$ gelegene Strahlbüschel durch den Punkt $F = (\frac{1}{\alpha}, 0, 0)$.

Ψ und F sind mit den Flächen (6.5) bzw. (6.6) auf folgende Weise invariant verbunden: Ψ ist jene die Doppelgerade d_1 enthaltende Ebene, die die Ausgangsfläche $F_4(d_1, d_2)$ durchwegs nach Geraden schneidet und nicht mit der Fernebene ω oder einer Achsenflächenebene identisch ist. Der Punkt F ist der Schnittpunkt der beiden Geraden der Fläche, die den Punkt $D = (d_1, d_2)$ nicht enthalten.[6] Die Flächen lassen sich demnach als Schiebflächen in einem indefinit quasielliptischen Raum deuten, wobei F und D als absolute Punkte und Ψ sowie $[d_2F]$ als absolute Ebenen dienen.

Für $\alpha = 0$ (Flächentyp (4.11, (b3)) besitzt die Momentanbewegung (7.2) die Bahnkurven

$$\begin{cases} x'(t) = t + x \\ y'(t) = y \\ z'(t) = Bty + z, \end{cases} \qquad (7.6)$$

die wieder Geraden sind. Diese Geraden sind nun in einem parabolischen Netz um die Doppelgerade d_2 enthalten, wobei die Fernebene ω als Zielpunkt den Punkt $D = (d_1, d_2)$ besitzt. Fassen wir $\{D, d_2, \omega\}$ als Absolutgebilde eines Flaggenraumes $I_3^{(2)}$ auf (vgl. H. BRAUNER [27] und H. SACHS [20]), so sind die Momentanbewegungen "Nichtisotrope Cliffordschiebungen" (vgl. H. BRAUNER [27, S. 130]); der besondere Zwanglauf ist somit eine nichtisotrope Cliffordschiebung längs Kegelschnitten in einem geeignet gewählten Flaggenraum $I_3^{(2)}$.

---

6) Die einzige Ausnahme stellt der Fall $\alpha = 1$ dar; hier fällt die sonst zur Achsenebene $x = -1$ parallele Ebene Ψ mit dieser Achsenebene zusammen. F wird zum Schnittpunkt (0, 1, 0) der y-Achse mit der Fläche.

Diese Schiebnetze sind dadurch gekennzeichnet, daß sie stets das in ω gelegene Strahlbüschel mit dem Träger D und das in der Ebene y = o gelegene Strahlbüschel mit dem Fernpunkt der x-Achsen als Träger enthalten.

Fordert man auch beim Zwanglauf (6.17), daß die Doppelgerade d_2 punktweise festbleiben soll, so erhält man

$$\varphi'(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{u}{2} & 1 \end{pmatrix} \varphi + \begin{pmatrix} u+1 \\ 0 \\ -\frac{\beta u}{2(u+1)} \end{pmatrix} . \qquad (7.7)$$

Wieder sind die Bahnkurven aller Punkte des Gangraumes im allgemeinen Kegelschnitte in Ebenen durch die Doppelgerade d_2. Als Momentanbewegung stellt sich zum Zeitpunkt u_o die Transformationsgruppe

$$\dot{\varphi}'(u_o) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \varphi' + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\beta}{2(u_o+1)^2} \end{pmatrix} \qquad (7.8)$$

ein; sie besitzt die Bahnkurven

$$\begin{aligned} x'(t) &= t + x \\ y'(t) &= y \\ z'(t) &= (-\frac{y}{2} - \frac{\beta}{2(u_o+1)^2})t + z \end{aligned} \qquad (7.9)$$

Es handelt sich dabei im allgemeinen um Geraden, die in einem parabolischen Netz um die Ferngerade d_2 enthalten sind, wobei dem Punkt D das in ω gelegene Strahlbüschel durch D entspricht. Die Momentanbewegung kann daher mit [27, S. 130] wieder als nichtisotrope Cliffordschiebung in einem Flaggenraum $I_3^{(2)}$ mit dem Absolutgebilde $\{D,d_2,\omega\}$ aufgefaßt werden. Diese Schiebnetze sind im Gegensatz zu den in (7.6) auftretenden wie folgt gekennzeichnet : Die Bahngeraden von (7.9) sind in Ebenen (y=konst.)

durch d_2 enthalten und treffen die Ferngerade d_2 in den diesen Ebenen zugeordneten Punkten $(0:1:0:-\frac{y}{2} - \frac{\beta}{2(u_o+1)^2})$. Im Flaggenraum $I_3^{(2)}$ gilt nach [27] für das Verhältnis des Abstands der Punkte $(0:1:0:-\frac{y_i}{2} - \frac{\beta}{2(u_o+1)^2})$ zum isotropen Winkel der entsprechenden Ebenen $y = y_i$ $(i=1,2)$

$$\delta(u_o) = -\frac{1}{2}. \qquad (7.10)$$

Wir haben damit den

Satz 12.: Die in (6.3) mit $a_{11}(u) = a_{33}(u)$, $a_{21}(u) = a_{31}(u) = 0$, $\alpha \neq 0$ enthaltenen metrisch besonderen Zwangläufe lassen sich als Cliffordschiebungen in einem indefinit quasielliptischen Raum mit D bzw. F als absoluten Punkten und Ψ bzw. $[d_2, F]$ als absoluten Ebenen auffassen.
Die in (6.3) mit $a_{11}(u) = a_{33}(u)$, $a_{21}(u) = a_{31}(u) = \alpha = 0$ und die in (6.17) mit $a_{11}(u) = a_{33}(u)$, $a_{21}(u) = a_{31}(u) = 0$ enthaltenen besonderen Zwangläufe sind nichtisotrope Clifforschiebungen in einem Flaggenraum mit dem Maßgebilde $\{D, d_2, \omega\}$.

LITERATUR:

[1] - [26] in [28]

[27] BRAUNER, H.: Geometrie des zweifach isotropen Raumes I, II, III. J. Reine Angew. Math. 224, 118 - 146 (1966), 226, 132 - 158 (1967), 228, 38 - 70 (1967).

[28] HUSTY, M. und RÖSCHEL, O.: Eine affin-kinematische Erzeugung gewisser Flächen vierter Ordnung mit zerfallendem Doppelkegelschnitt I. Glasnik Mat. (eingereicht)

[29] WUNDERLICH, W.: Über zwei durch Zylinderrollung erzeugbare Modelle der Steinerschen Römerfläche. Archiv Math. 18, 325 - 336 (1967).

[30] WUNDERLICH, W.: Durch Schiebung erzeugbare Römerflächen.Sitzungsber., Österr. Akad. Wiss., 176, 473 - 497 (1967).

Anschrift der Verfasser : Manfred HUSTY und Otto RÖSCHEL, Institut für Mathematik und Angewandte Geometrie, MU - Leoben, Franz - Josef - Straße 18, A - 8700 Leoben, AUSTRIA.