

Doppelpunkte auf Charakteristiken

Otto Röschel (Graz)

Abstract. Double Points on Characteristics. A fixed surface Φ of a moving space Σ will envelope a surface of the fixed space Σ' , if we move Σ with respect to Σ' . In the general case at each moment of the one-parameter motion there exists a curve c on Φ , along which the position of Φ and the enveloped surface are in contact. In the paper we study the interesting special case, there c has some double point $P \in \Phi$. This depends on relations between differential geometric properties in the neighbourhood of P of the moved surface and the instantaneous motion of the one-parameter motion. These properties are characterized in this paper. Then some further kinematic results for the characterized motions are shown.

Keywords: Kinematics, Characteristics, Enveloped Surfaces.

AMS Classification: 53 A 17

1. Wird eine Fläche Φ einer einparametrischen Schar von Kongruenztransformationen des reellen dreidimensionalen euklidischen Raumes E_3 unterworfen, so werden die einzelnen Lagen $\Phi'(t)$ von Φ i.a. eine *Hüllfläche* Ψ' bestimmen. $\Phi'(t)$ und Ψ' berühren sich dabei längs Kurven $c'(t)$, die *Charakteristik auf $\Phi'(t)$* genannt werden. In der vorliegenden Arbeit soll untersucht werden, unter welchen Umständen $c'(t)$ in einem nichtsingulären Flächenpunkt von $\Phi'(t)$ einen *Doppelpunkt* besitzen kann.

Ein Problem dieser Art hat sich unlängst in den Arbeiten [6] und [7] des Autors gestellt: Dort werden Quadriken Φ einer stetigen eingliedrischen Drehungsgruppe so unterworfen, daß die (dann auf Φ stationären) Charakteristiken $c'(t)$ in zwei Kegelschnitte zerfallen - $c'(t)$ besitzt damit in diesem Fall jeweils zwei Doppelpunkte. Die nunmehrige Arbeit soll eine vollständige Klärung des Auftretens von Doppelpunkten auf Charakteristiken geben.

2. Wir werden das Problem lokal in der Umgebung eines Charakteristikpunktes $P \in \Phi$ studieren. Dabei wollen wir Φ stets aus der Differenziationsklasse C^2 wählen. Im begleitenden Dreibein des regulären Flächenpunktes $P \in \Phi$ läßt sich Φ bis zur zweiten Ordnung durch das *oskulierende Scheitelparaboloid*

$$(1) \quad \Pi \dots F(x, y, z) = \frac{1}{2}(Ax^2 + By^2) - z = 0 \quad (A, B \in R)$$

(vgl. E. KRUPPA ([5, S.27 f.]) annähern. Π wird im Falle eines *parabolischen Flächenpunktes* ($A = 0$ oder $B = 0$, aber $A^2 + B^2 \neq 0$) zu einem parabolischen Zylinder, im Fall eines

Flachpunktes ($A = B = 0$) zu einer Ebene. Flachpunkte $A = B = 0$ wollen wir hier von unserer Diskussion ausschließen.

Wenn $AB \neq 0$ gilt, stellen $R_1 := \frac{1}{A}$ und $R_2 := \frac{1}{B}$ die *Hauptkrümmungsradien* von Φ (und damit Π) in P dar. Die x - und y -Achse unseres Koordinatensystems liegt in den Hauptkrümmungstangenten von Φ im Punkt P .

3. Nun wählen wir einen C^1 -Zwanglauf eines Gangsystems Σ gegen ein Rastsystem Σ' mit den Abbildungsgleichungen

$$(2) \quad \bar{x}' = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix} + A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (t \in I \subset \mathbb{R}),$$

wobei $A(t)$ eine orthogonale 3×3 -Matrix bezeichnet (und die Funktionen $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ sowie die Elemente der Matrix $A(t)$ aus $C^1(I)$ gewählt seien) und bestimmen den inversen Zwanglauf

$$(3) \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = A'(t) \left(\bar{x}' - \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix} \right).$$

Dabei setzen wir für $t=0$ o.B.d.A. $a(0) = b(0) = c(0) = 0$ und $A(0) = E$ (E bezeichne die 3×3 -Einheitsmatrix). Für die Abbildungsgleichungen der infinitesimalen Transformation an der Stelle $t = 0$ gilt dann im Rastsystem

$$(4) \quad \bar{x}' \longrightarrow \dot{\bar{x}}' = \begin{pmatrix} \dot{a}(0) \\ \dot{b}(0) \\ \dot{c}(0) \end{pmatrix} + \dot{A}(0) \bar{x}' := \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} \times \bar{x}' = \vec{d} + \vec{m} \times \bar{x}'$$

sowie analog im Gangsystem

$$(5) \quad \bar{x} \longrightarrow \dot{\bar{x}} = -\vec{d} - \vec{m} \times \bar{x}.$$

Integration der letzten beiden linearen Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung liefert die Bahnkurven der *Momentanbewegung* des Zwanglaufs zum Zeitpunkt $t = 0$ im Rast- bzw. Gangsystem. Die Momentanbewegung (4) ist i.a. eine Schraubung mit dem *Schraubparameter*

$$(6) \quad p = \frac{m_1 d_1 + m_2 d_2 + m_3 d_3}{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}$$

und der Achse mit Richtungs- und Momentanvektor

$$(7) \quad \vec{m}' = (m_1, m_2, m_3)' \quad \text{sowie} \quad \vec{\hat{m}}' = (d_1 - pm_1, d_2 - pm_2, d_3 - pm_3)'$$

(vgl. O. BOTTEMA - B. ROTH [1, S.25 ff.]).

4. Unterwerfen wir die Fläche Φ bzw. deren oskulierendes Scheitelparaboloid (1) dem Zwangslauf (2), so erhalten wir i.a. eine einparametrische Schar von Flächen

$$(8) \quad \Pi'(t) \dots F(x(t), y(t), z(t)) = 0,$$

wobei in Gleichung (1) die Werte für $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ aus (3) einzusetzen sind. Die Hüllfläche Ψ' berührt $\Pi'(t)$ längs der Charakteristik $c'(t)$, die sich im Schnitt von $\Pi'(t)$ mit der Fläche

$$(9) \quad \Pi^{*'}(t) \dots \frac{\partial F(x(t), y(t), z(t))}{\partial t} = 0$$

einstellt. Für den Zeitpunkt $t = 0$ erhalten wir mit (4)

$$(10) \quad \Pi'(0) \dots F(x(0), y(0), z(0)) = \frac{1}{2}(Ax'^2 + By'^2) - z' = 0$$

und

$$(11) \quad \begin{aligned} \Pi^{*'}(0) \dots Ax'(0)\dot{x}'(0) + By'(0)\dot{y}'(0) - \dot{z}'(0) = \\ = Ax'(d_1 + m_2z' - m_3y') + By'(d_2 + m_3x' - m_1z') - (d_3 + m_1y - m_2x') = 0. \end{aligned}$$

Wir wollen feststellen, für welche Momentanbewegungen $P = 0$ Doppelpunkt auf der ins Gangsystem durchgedrückten Charakteristik $c'(0) = \Pi'(0) \cap \Pi^{*'}(0)$ ist. Dazu muß $P'(0) = 0'$ auf $\Pi^{*'}(0)$ liegen, und $\Pi^{*'}(0)$ entweder in $P'(0)$ eine Singularität besitzen oder ebenfalls $z' = 0$ berühren. Ersteres führt auf die Bedingung

$$(12) \quad d_3 = 0.$$

Zweiteres ist der Fall, wenn die Ebene $z' = 0$ die Fläche $\Pi^{*'}(0)$ im algebraischen Sinn nach Geraden durch $0'$ schneidet. Dies führt auf

$$(13) \quad m_1 = Bd_2 \quad \text{und} \quad m_2 = -Ad_1.$$

Mögliche infinitesimalen Transformationen sind daher durch

$$(14) \quad \begin{aligned} d_3 = 0 \quad \text{und} \\ m_1 = Bd_2, \quad m_2 = -Ad_1 \end{aligned}$$

festgelegt. Da gleichzeitige proportionale Veränderung der d_i und m_i bloß die Geschwindigkeit der Momentanbewegung, nicht aber ihre geometrischen Eigenschaften ändert, dürfen wir im Fall $d_1^2 + d_2^2 \neq 0$

$$(15) \quad \begin{aligned} d_1 &:= \cos u, & d_2 &:= \sin u, & d_3 &= 0, \\ m_1 &= B \sin u, & m_2 &= -A \cos u, & m_3 &:= v \end{aligned}$$

mit $u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}$ setzen. Die einzige hier nicht erfaßte geeignete Momentanbewegung ist die triviale Drehung um die Flächennormale (z-Achse) von Π in P - für sie gilt $d_1 = d_2 = d_3 = 0, m_1 = m_2 = 0, m_3 = 1$.

Wir notieren den

Satz 1: *Genau dann, wenn die Fläche Π (1) einer der im begleitenden Dreibein der Fläche im Punkt P durch (14) festgelegten Momentanbewegungen unterworfen wird, besitzt die auf Π auftretende Charakteristik c im betrachteten Punkt $P = 0$ einen Doppelpunkt.*

5. Nun soll versucht werden, die analytisch durch (15) festgelegten Momentanbewegungen geometrisch zu charakterisieren: Wird der Punkt $P = 0$ der eingliedrigen stetigen Momentanbewegungsgruppe mit der infinitesimalen Transformation (15) unterworfen, so läßt sich die Bahn von P in der Umgebung von $P'(0)$ bis zur zweiten Differentiationsordnung durch

$$(16) \quad \bar{x}'(t) = t \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} B \sin u \\ -A \cos u \\ v \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} -v \sin u \\ v \cos u \\ A \cos^2 u + B \sin^2 u \end{pmatrix}$$

beschreiben. Es läßt sich unschwer feststellen, daß diese Bahnkurve die Fläche $\Phi'(0)$ in $0' = P'(0)$ sogar oskuliert! Das Auftreten eines Doppelpunktes auf der Charakteristik wird daher überraschend durch eine Eigenschaft der Momentanbewegung charakterisiert, die von der zweiten Differentiationsordnung der Momentanbewegung abhängt, obwohl der gegebene Zwanglauf bloß der Differentiationsklasse C^1 angehören muß.

Die Bahntangente d' von P zum Zeitpunkt $t = 0$ hat den Richtungsvektor \vec{d}' . Wird die Tangentialebene τ ($z=0$) von Π (bzw. Φ) in P der infinitesimalen Transformation unterworfen, so erhalten wir die Ebene

$$(17) \quad \tau^{*'}(0) \dots 0 = A d_1 x' + B d_2 y' = A x' \cos u + B y' \sin u.$$

Die Schnittgerade von $\tau'(0)$ mit $\tau^{*'}(0)$ ist daher genau die zu d' konjugierte Flächentangente von $\Phi'(0)$ in $P'(0)$. Wir halten fest in

Satz 2: *Ein regulärer Flächenpunkt P eines gangfesten C^2 -Flächenstückes Φ ist bei einem C^1 -Zwanglauf zu einem Zeitpunkt t_0 genau dann Doppelpunkt auf der Charakteristik von Φ , wenn gleichzeitig gilt:*

- 1) P ist Punkt der Charakteristik.
- 2) Die Flächentangentialebene τ von Φ in P besitzt bei der zugehörigen Momentanbewegung eine zur Bahntangente von P bezüglich $\Phi'(t_0)$ konjugierte Charakteristik.
- 3) Die Bahn von P bei der Momentanbewegung oskuliert $\Phi'(t_0)$ in $P'(t_0)$.

Nun versuchen wir, die zu festem Bahntangentenvektor \vec{d}' und fester Bahnschmiegeebene der Bahn (16) gehörende Momentanschraubachse $a'(\alpha, k)$ zu finden: Sei zum Zeitpunkt $t=0$ durch $\vec{d}' := (\cos \alpha, \sin \alpha, 0)'$ (α fest $\in [0, 2\pi]$) die Bahntangente, durch $\sigma'(\alpha, k) \dots x \sin \alpha - y \cos \alpha + kz = 0$ ($k \in R$) die Bahnschmiegeebene der Bahn von P festgelegt. Dann gilt mit (16) die Beziehung $-v \sin^2 \alpha - v \cos^2 \alpha + k(A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha) = 0$, also

$$(18) \quad v = k(A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha).$$

Ein Vergleich mit E. KRUPPA [5, S.26 f.] zeigt, daß dann (19) $v = \frac{k}{R_\alpha}$ gilt, wobei R_α den Normalkrümmungsradius der Fläche Φ (bzw. Π) im Linienelement P mit dem ins Gangsystem durchgedrückten Bahntangentenvektor \vec{d} bezeichnet. Damit haben wir $(m_1, m_2, m_3)' = (B \sin \alpha, -A \cos \alpha, k(A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha))'$. Nun gilt mit für den Parameter (6) der Momentanschraubung

$$(19) \quad p = \frac{\sin \alpha \cos \alpha (B - A)}{A^2 \cos^2 \alpha + B^2 \sin^2 \alpha + k^2 (A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha)^2}.$$

Die zugehörige Schraubachse $a'(\alpha, k)$ besitzt die PLÜCKERvektoren

$$(20) \quad \vec{m}' = \begin{pmatrix} B \sin \alpha \\ -A \cos \alpha \\ k(A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha) \end{pmatrix}, \quad \hat{m}' = \begin{pmatrix} \cos \alpha - pB \sin \alpha \\ \sin \alpha + pA \cos \alpha \\ -pk(A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha) \end{pmatrix}.$$

Sie trifft einerseits die Gerade $l'(\alpha)$ mit den PLÜCKERvektoren

$$(21) \quad \vec{l}'(\alpha) = \begin{pmatrix} A \cos \alpha \\ B \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{l}'(\alpha) = \frac{A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha}{A^2 \cos^2 \alpha + B^2 \sin^2 \alpha} \begin{pmatrix} -B \sin \alpha \\ A \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

und andererseits die Kurvenhauptnormale $h'(\alpha, k)$ unserer Bahnschraublinie orthogonal. Diese Schraubachse $a'(\alpha, k)$ ist daher als Gemeinlot der beiden Geraden $l'(\alpha)$ und $h'(\alpha, k)$ zu ermitteln. Die ins Gangsystem durchgedrückte Gerade $l'(\alpha)$ trifft die Flächennormale n (z -Achse) von Φ in $P = 0$ im Punkt $L(\alpha) \dots \left(0 / 0 / \frac{A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha}{A^2 \cos^2 \alpha + B^2 \sin^2 \alpha} \right)$ orthogonal. $l(\alpha)$ ist parallel zur Tangentialebene τ von Φ in P und orthogonal zur konjugierten Richtung zu \vec{d} bezüglich Φ in P .

Halten wir α fest, so erfüllen die Schraubachsen (20) ein gerades Konoid 3. Ordnung Γ' mit der Leitgeraden $l'(\alpha)$. Wird α variabel, k aber konstant angenommen, so erfüllen die Leitgeraden $l'(\alpha)$ (21) ebenfalls ein gerades Konoid 3. Ordnung Λ' , diesmal mit der ins Rastsystem durchgedrückten Flächennormalen n' als Leitgerade.

Das erste Konoid Γ' wäre demnach als liniengeometrisch - kinematisches Analogon der MEUSNIER-Kugel aufzufassen, die zweite Regelfläche Λ' als liniengeometrisch - kinematischer Ausdruck der Formel von EULER. Γ' trägt die Momentanschraubachsen eines zweipa-

parametrisierten Bewegungsvorganges an einer Stelle und ist daher i.a. ein *PLÜCKERsches Konoid* (vgl. [1, S. 355 ff.]).

Aber auch Λ' ist ein *PLÜCKERsches Konoid*: Als Parameterdarstellung von Λ' finden wir

$$(22) \quad \bar{x}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{A \cos^2 \alpha + B \sin \alpha}{A^2 \cos^2 \alpha + B^2 \sin^2 \alpha} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} A \cos \alpha \\ B \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Daraus läßt sich unschwer die Flächengleichung zu

$$(23) \quad AB(x'^2 + y'^2)z' = Ay'^2 + Bx'^2.$$

berechnen. Damit ist obige Behauptung (für $AB \neq 0$) bewiesen. Bei Übertragung ins Gangsystem gilt für die Fläche Λ : Die Doppelgerade ist die Flächennormale n (z -Achse) der Fläche Φ im Punkt P , der Schnitt mit der Tangentialebene $z = 0$ wird durch $Ay^2 + Bx^2 = 0$ erfaßt. Es handelt sich dabei um die zu den beiden Schmiegtangenten orthogonalen Geraden durch P in $z = 0$. Die Torsalerzeugenden von Λ treffen die Flächennormale n in den Hauptkrümmungsmitteln und sind gegen die jeweils zugehörige Hauptkrümmungstangente um 90° verdreht.

Abbildung 1 zeigt für $\alpha = 3\pi/4$, $A = 1/9$, $B = 1/64$ das Plücker'sche Konoid Γ' und die momentane Lage der DUPIN'schen Indikatrix von Φ in P . Abbildung 2 zeigt analog für $A=1/4$, $B=1/9$ das Plücker'sche Konoid Λ' .

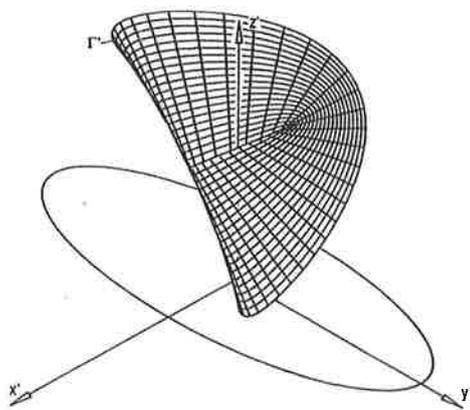


Abbildung 1

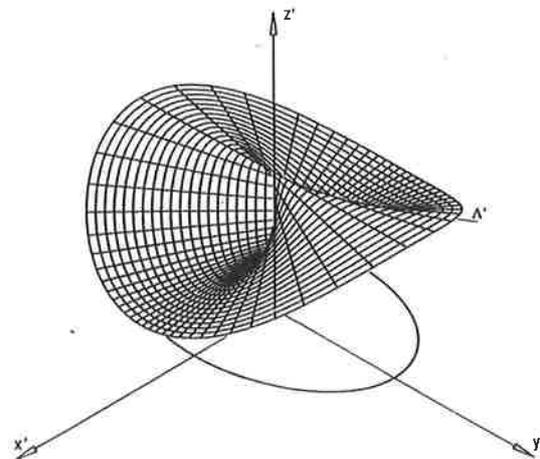


Abbildung 2

6. Als bemerkenswerte *Sonderfälle* stellen sich hier ein:

A) P ist Nabelpunkt ($A = B \neq 0$) der Fläche Φ : Dann gilt stets $p = 0$ - in (15) liegt daher eine Drehungsgruppe vor. Alle möglichen Drehachsen (20) enthalten (aus Sicht des Gangraumes) den Mittelpunkt $M\left(0/0/\frac{1}{A} = \frac{1}{B}\right)$ aller möglichen Meusnierkugeln von Φ in P . Die *Schraubachsenkongruenz* des allgemeinen Falles erscheint im Gangraum als *Bündel mit dem gemeinsamen Krümmungsmittelpunkt M aller Normalschnitte durch P als Scheitel*.

B) $P = 0$ ist parabolischer Flächenpunkt auf Φ : O.B.d.A. studieren wir den Fall $B = 0$:

Die möglichen Momentanschraubachsen $a'(\alpha, k)$ (20) gehören dann einem geraden hyperbolischen Geradennetz an, dessen Brennlinsen in den Geraden e_1' und e_2' mit den Plückervektoren

$$(24) \quad \bar{e}_1' = \bar{0}, \quad \hat{e}_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \bar{e}_2' = \begin{pmatrix} A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

liegen. Werden diese Geraden ins Gangsystem übertragen, so lassen sie sich im begleitenden Dreibein von Φ wie folgt charakterisieren: Es handelt sich einerseits um die Ferngerade der Normalschnittebene durch die (dann einzige) Schmiegtangente. Die zweite Brenngerade ist parallel zu der von der Schmiegtangente verschiedenen Hauptkrümmungsrichtung und trifft die Flächennormale n im zugehörigen Meusnierkugelmittelpunkt $M(0/0/\frac{1}{A})$.

7. Wir diskutieren nun die Menge der möglichen Momentanachsen (20) genauer. (20) definiert mit (4) die infinitesimalen Transformationen eines dreigliedrigen Bewegungsvorganges B_{III} . Die zugehörigen Momentanachsen erfüllen momentan eine Geradenkongruenz (vgl. K.H. HUNT [3]). Bekanntlich gibt es durch jeden allgemeinen Punkt X des Raumes momentan genau 3 Schraubachsen von Momentanschraubungsgruppen des B_{III} . Die Summe der zugehörigen Schraubparameter ist dann eine gewisse lokale Konstante σ_0 des B_{III} . σ_0 soll für unseren Fall bestimmt werden:

Der Punkt $X \dots \bar{x} = (\xi, \eta, \zeta)'$ liegt auf der Schraubachse $a(\alpha, k)$ (20), wenn $\bar{x} \times \bar{m} = \hat{m}$, also

$$(25) \quad \begin{aligned} \eta k (A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha) + A \zeta \cos \alpha &= \cos \alpha - p B \sin \alpha \\ - \xi k (A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha) + B \zeta \sin \alpha &= \sin \alpha + p A \cos \alpha \\ A \xi \cos \alpha + B \eta \sin \alpha &= p k (A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha) \end{aligned}$$

gilt. Die drei Gleichungen sind linear abhängig, wenn wir den Wert (19) für p berücksichtigen. Aus diesen Gleichungen eliminieren wir nun α und k . Aus den ersten Gleichungen gewinnen wir

$$(26) \quad [\xi(A\zeta - 1) - pA\mu] \cos \alpha + [\mu(B\zeta - 1) + pB\xi] \sin \alpha = 0$$

sowie

$$(27) \quad k(A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha) (\mu - \xi) + \zeta (A \cos \alpha + B \sin \alpha) = \\ = \cos \alpha + \sin \alpha + p(A \cos \alpha - B \sin \alpha).$$

Aus (27) und der dritten Gleichung (25) eliminieren wir nun ebenfalls k und erhalten

$$(28) \quad [A \xi(\eta - \xi) + Ap\zeta - p - p^2 A] \cos \alpha + \\ + [B\eta(\eta - \xi) + Bp\zeta - p + p^2 B] \sin \alpha = 0.$$

Diese Formel und (26) liefern nach Elimination von α eine i.a. kubische Bestimmungsgleichung für p , die sich nach einigen Umformungen in der Gestalt

$$(29) \quad ABp^3 + p[AB(\xi^2 + \eta^2) + (A\zeta - 1)(B\zeta - 1)] + \xi\eta(B - A) = 0$$

darstellen läßt. Für $AB \neq 0$ erhalten wir im algebraischen Sinn 3 Lösungen $p_1(\xi, \eta, \zeta)$, $p_2(\xi, \eta, \zeta)$, $p_3(\xi, \eta, \zeta)$, für die nach dem VIETAschen Wurzelsatz

$$(30) \quad \sigma_0 := p_1(\xi, \eta, \zeta) + p_2(\xi, \eta, \zeta) + p_3(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

gilt.

Die erwähnte Konstante σ_0 unseres B_{III} verschwindet daher in unserem Fall an der entsprechenden Stelle. Wir notieren den

Satz 4: Die ∞^2 infinitesimalen Transformationen für die Lösungsschraubungen unseres Problems sind bei $AB \neq 0$ so angeordnet, daß durch jeden allgemeinen Punkt X des Gang- bzw. Rastraumes im algebraischen Sinn genau drei Momentanschraubachsen laufen. Die Summe der drei zugehörigen Schraubparameter ist unabhängig von der Wahl von X und verschwindet stets.

8. Wir untersuchen nochmals den momentanen Bewegungszustand unserer Zwangläufe mit der infinitesimalen Transformation (15):

$$(31) \quad \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ \dot{z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - Az \\ 0 \\ Ax \end{pmatrix} \cos \alpha + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - Bz \\ By \end{pmatrix} \sin \alpha + \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} v \quad (\alpha, v \in R).$$

Variable α, v führen für jeden gangfesten Punkt (x, y, z) auf eine zweiparametrische Schar von momentanen Bahntangentenvektoren. Sie liegen genau dann in einer Ebene $-(x, y, z)$ wird *dann momentan flächenläufig geführt* -, wenn

$$(32) \quad \det \begin{pmatrix} 1 - Az & 0 & -y \\ 0 & 1 - Bz & x \\ Ax & By & 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (A - B)xy = 0$$

gilt. Wenn wir von Nabelpunkten ($A=B$) absehen, werden daher genau die Punkte der beiden Normalschnittebenen durch die Hauptkrümmungstangenten von Φ in P momentan flächenläufig geführt. Die momentanen Bahntangenten gehören dann Ebenen an, für die wir im Fall eines Ausgangspunktes $(x_0, 0, z_0)$ bei $A \neq 0$ die Gleichung

$$(33) \quad A(x'x_0 + z'z_0) - z' = A(x_0^2 + z_0^2) - z_0$$

gewinnen. Das aus der momentanen Position des Ausgangspunktes $(x_0, 0, z_0)$ im Rastraum auf diese Ebene (34) errichtete Lot trifft stets den in den Rastraum durchgedrückten MEUSNIER-Kugelmittelpunkt $M_1(0, 0, \frac{1}{A} = R_1)$ der zugehörigen Hauptkrümmungsrichtung ($y = 0, z = 0$).

Analoges läßt sich für die Punkte der Normalschnittebene durch die zweite Hauptkrümmungsrichtung nachweisen.

Wir halten fest in

Satz 5: Zu einem regulären Flächenpunkt P (\neq Nabelpunkt) eines regulären C^2 -Flächenstückes Φ gehört gemäß Abschnitt 4 eine zweiparametrische Schar infinitesimaler Transformationen, bei denen die Charakteristik auf Φ im Flächenpunkt P einen Doppelpunkt aufweist. Alle diese infinitesimalen Transformationen erzeugen einen dreiparametrischen Bewegungsvorgang B_{III} . Die bei diesem B_{III} momentan flächenläufigen Punkte X des Gangraumes gehören genau den beiden Normalschnittebenen durch die Hauptkrümmungstangenten von Φ in P an. Die momentanen Bahntangentialebenen dieser Punkte X sind normal zur Verbindung des in den Rastraum durchgedrückten Punktes X mit der zugehörigen MEUSNIERKugelmittelpunkt $M_1(0, 0, R_1)$ bzw. $M_2(0, 0, R_2)$.

9. Schlußbemerkung: Bei zwangsläufiger Bewegung des Flächenstückes Φ mit momentaner Bewegung (15) besitzt die auf Φ auftretende Charakteristik c im entsprechenden Flächenpunkt P einen Doppelpunkt. Die Doppelpunktstangenten an c gehören lokal zur dritten Differentiationsordnung der Fläche Φ in P und sind daher durch unseren Ansatz noch nicht erfaßt. Durch einfache Rechnung läßt sich nachweisen, daß diese Doppelpunktstangenten tatsächlich in keiner Weise ausgezeichnete Flächentangenten von Φ in P sind - das gesamte Büschel (τ, P) kann auftreten.

Literaturverzeichnis:

- [1] BOTTEMA, O. - ROTH, B.: Theoretical Kinematics. North- Holland, Amsterdam 1979.
- [2] BRAUNER, H.: Lehrbuch der Konstruktiven Geometrie. Springer, Wien - New York 1986.
- [3] HUNT, K. H.: Screw Systems in Spatial Kinematics. MMERS3, Dept. of Mech. Eng., Monash University, 1970.

- [4] KARGER, A. - NOVÁK, J.: Space Kinematics and Lie Groups. Gordon and Breach, New York 1985.
- [5] KRUPPA, E.: Analytische und konstruktive Differentialgeometrie. Springer, Wien 1957.
- [6] RÖSCHEL, O.: Drehflächen zweiter Ordnung durch einen Kegelschnitt, *Studia Sci. Math. Hung.* (im Druck).
- [7] RÖSCHEL, O.: Eine interessante Familie von Drehquadriken. *Grazer Math. Ber.* **313**, 45 - 56 (1991).

Anschrift des Autors:
Otto Röschel
Institut für Geometrie
TU Graz
A- 8010 Graz
Austria

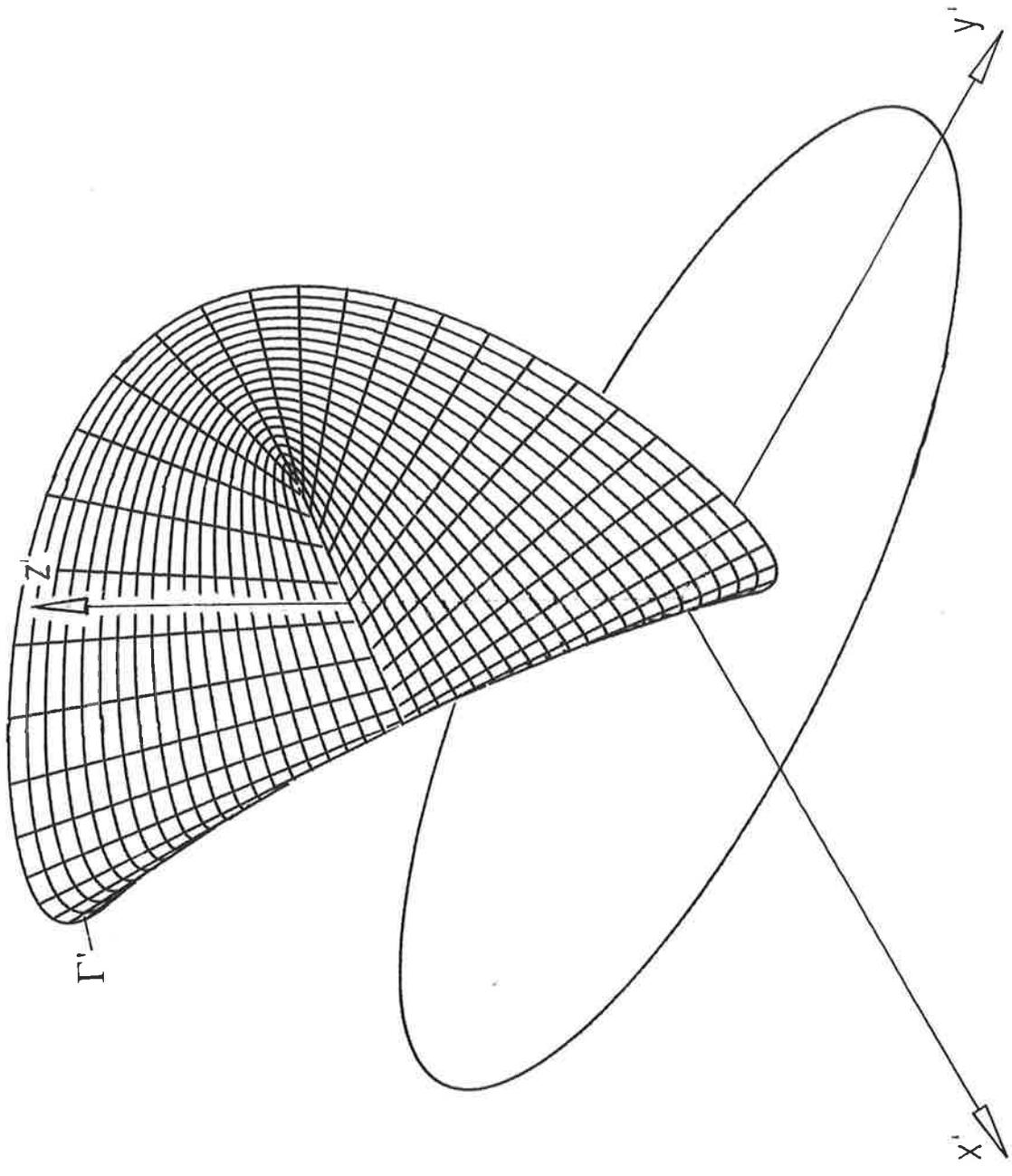


Abbildung 1

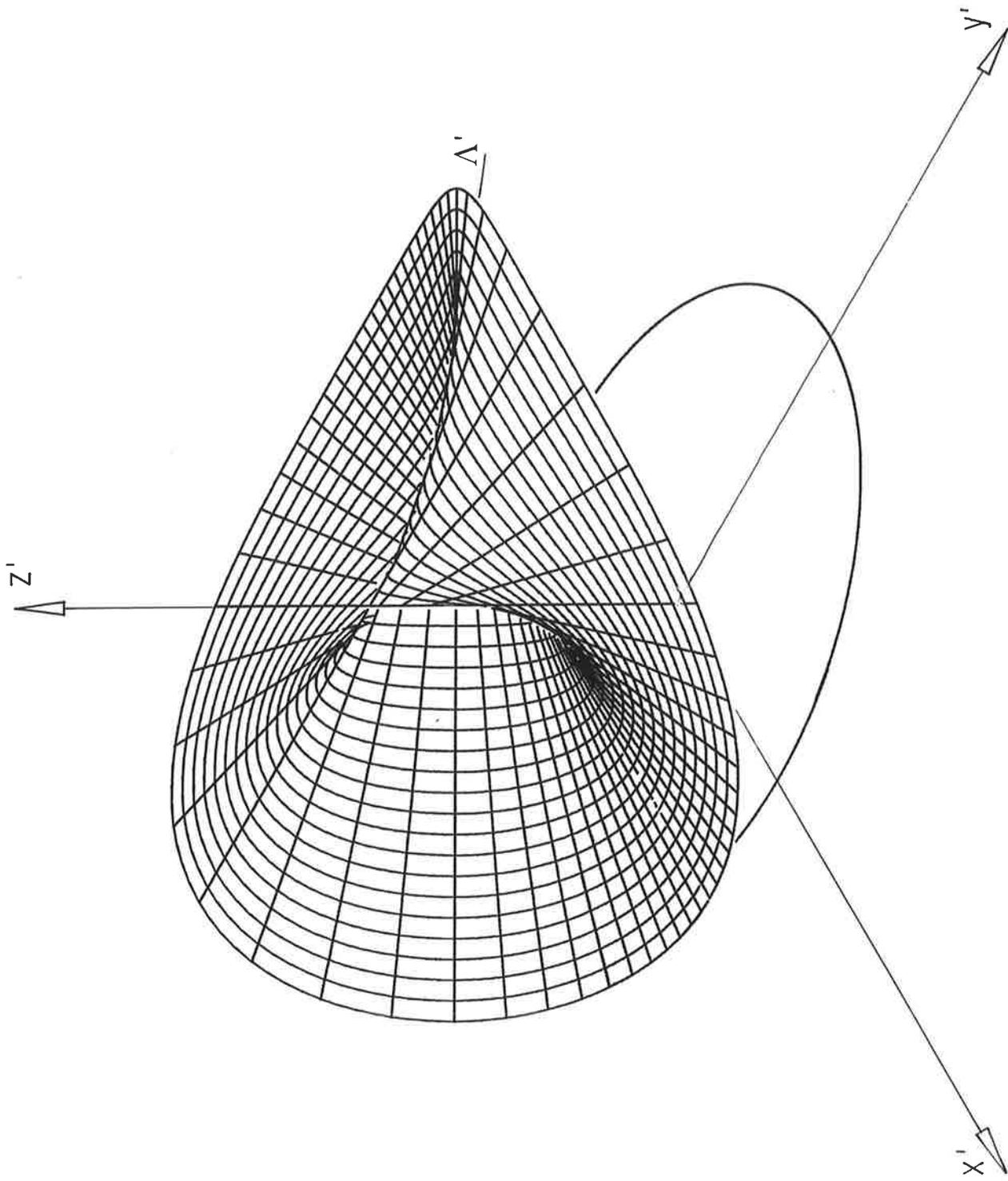


Abbildung 2