

Ebene Schattengrenzen auf euklidischen Dreh - und Schraubflächen

Von

Otto Röschel, Leoben

(Mit zwei Abbildungen)

Herrn em. o. Prof. Dr. H. Horninger zum 75. Geburtstag gewidmet.

Abstract. Plane Shade Lines on Euclidean Surfaces of Revolution or on Helicoidale Surfaces. Given a generating screw or revolution  $\Sigma$  and a light point  $S$  in common there exists a twisted cubic  $\kappa(S)$  with points being either fixed points at  $\Sigma$  or with the property, that their path tangents at  $\Sigma$  contain  $S$ . It is shown, that in each plane  $\epsilon$  in common there exists a oneparametric manifold of curves  $u$ , such that  $u$  is a plane shade line on  $\Sigma(u)$ . This manifold of curves is characterised by a JACOBIan differential equation and therefore it holds : The plane shade lines are the point paths of a oneparametric group  $B$  of plane projective transformations in  $\epsilon$  - the wellknown plane  $W$  - curves. Those points of  $\kappa(S)$  lying in  $\epsilon$  are fixed points - the poles - of  $B$ .

Die Untersuchung ebener Schattengrenzen beziehungsweise Isophoten auf Regelflächen des dreidimensionalen euklidischen Raumes  $E_3$  ist gerade in letzter Zeit Gegenstand bemerkenswerter Untersuchungen gewesen (vergleiche z.B. [7], [8], [12] und [16]). Als Beitrag zu diesem Themenkreis sollen in der folgenden Arbeit alle ebenen Schattengrenzen auf euklidischen Dreh - und Schraubflächen<sup>1)</sup> bestimmt werden.

---

<sup>1)</sup> Das Problem der Umrißbestimmung von Schraubflächen bei Zentral - oder Parallelprojektion war schon früher Gegenstand bemerkenswerter Untersuchungen von F.W.PALM (vergleiche [9], [10] und [11]). Auf mögliche ebene wahre Umrißkurven wird dort jedoch kein Augenmerk gelegt.

§ 1 Grundlagen

Unter Zugrundelegung projektiver Koordinaten<sup>2)</sup>  $(x_0:x_1:x_2:x_3)^t$  läßt sich ein euklidischer Dreh - oder Schraubvorgang bekanntlich durch die Abbildungsgleichungen

$$\begin{cases} y_0 = x_0 \\ y_1 = x_1 \cdot \cos t - x_2 \cdot \sin t \\ y_2 = x_1 \cdot \sin t + x_2 \cdot \cos t \\ y_3 = x_3 + p \cdot t \cdot x_0 \end{cases} \quad (1)$$

mit  $p \in \mathbb{R}$ <sup>3)</sup> und  $t \in (-\infty, +\infty)$  beschrieben.

Die feste Lichtquelle  $S \in \mathbb{E}_3$  sei durch  $(s_0:s_1:s_2:s_3)^t$  gegeben. Wenn bezüglich (1) eine Dreh - oder Schraubfläche  $\Phi$  existiert, die eine ebene Schattengrenze  $u$  besitzt, so kann der hier interessierende Teil von  $\Phi$  durch Verschraubung von  $u$  gemäß (1) erzeugt werden. Der dabei entstehende Teil von  $\Phi$  soll  $\Sigma(u)$  heißen. Im folgenden wird die eigentliche reelle Trägerebene  $\varepsilon$  von  $u$  festgehalten. Kurven  $u$ , die auf  $\Sigma(u)$  bei Beleuchtung aus  $S$  ebene Schattengrenzen sind, sollen  $U$  - Kurven heißen.

Abbildung 1

<sup>2)</sup> Bei dieser Darstellung ist  $x_0 = 0$  die Gleichung der Fernebene,  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$  die Gleichung des absoluten Kegelschnittes des zugehörigen dreidimensionalen euklidischen Raumes  $\mathbb{E}_3$ . Wegen dieser Koordinatisierung wird fallweise auch die komplexe Erweiterung zugelassen; im allgemeinen soll jedoch  $x_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) gelten.

<sup>3)</sup>  $p$  ist dabei der euklidische Schraubparameter,  $x_1 = x_2 = 0$  die Gleichung der Achse  $a$ . Für  $p = 0$  ergeben sich euklidische Drehungen.

Wenn eine  $U$  - Kurve  $u \subset \varepsilon$  existiert, muß gelten (Abb. 1) :

In jedem Punkt  $U \in u$  besitzt  $\Sigma(u)$  eine Tangentialebene  $\tau_U$ , die  $S$  enthält.  $\tau_U$  wird im allgemeinen von der Tangente  $t_U$  von  $u$  in  $U$  und der Tangente  $s_U$  der Bahnkurve von  $U$  bei (1) aufgespannt.  $t_U$  kann daher als Projektion von  $s_U$  aus  $\Sigma$  nach  $\varepsilon$  aufgefaßt werden; es gilt also :  $t_U = s_U^C$ . Diese Überlegung ist nur dann nicht durchführbar, wenn  $s_U$  die Lichtquelle  $S$  enthält, oder  $U$  Fixpunkt bei (1) ist. Alle Punkte  $P$  des  $\mathbb{E}_3$ , deren momentane Bahntangenten<sup>4)</sup> bei (1) den Punkt  $S$  enthalten oder Fixpunkte bei (1) sind, erfüllen bekanntlich<sup>5)</sup> eine Raumkurve dritter Ordnung, die hier  $\kappa(S)$  genannt werden soll.  $\kappa(S)$  enthält stets den Fernpunkt  $A_u(0:0:0:1)^t$  der Achse  $a$  und die absoluten Kreispunkte  $I$  und  $\bar{I}(0:1:\pm\sqrt{-1}:0)^t$  der zu  $a$  orthogonalen Ebenen. Im Fall der reinen Drehung ( $p = 0$  in (1)) ist die ganze Drehachse  $a$  zu  $\kappa(S)$  zu zählen.

Die vorgelegte Ebene  $\varepsilon$  hat im algebraischen Sinn drei Schnittpunkte mit  $\kappa(S)$ , oder  $\varepsilon$  enthält einen Teil von  $\kappa(S)$ <sup>6)</sup>. Die im allgemeinen auftretenden drei Schnittpunkte werden mit  $K_1, K_2$  und  $K_3$ , ein etwa in  $\varepsilon$  gelegener Teil von  $\kappa(S)$  mit  $\bar{\kappa}$  bezeichnet. Nur in diesen Ausnahmepunkten kann folgende in Abbildung 1 gezeigte Idee nicht verwirklicht werden : Ein von  $U$  verschiedener Punkt  $Q$  von  $s_U$  wird aus  $S$  nach  $\varepsilon$  projiziert; der Bildpunkt heiße  $Q^C$ . Der ist für  $S \notin s_U$  - also  $U \notin \kappa(S)$  - von  $U$  verschieden und bestimmt mit  $U$  zusammen die Gerade  $s_U^C$ . Wenn es durch den Punkt  $U \in \varepsilon$  daher eine  $U$  - Kurve  $u$  gibt, muß  $s_U^C$  die Tangente  $t_U$  von  $u$  in  $U$  sein.

<sup>4)</sup> Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann die Überlegung zum Zeitpunkt  $t = 0$  in (1) angestellt werden.

<sup>5)</sup> Vergleiche zum Beispiel [3, Seite 163].

<sup>6)</sup>  $\kappa(S)$  muß dann natürlich zerfallen.

Dieser Gedanke soll in § 2 analytisch nachvollzogen werden, wobei gemäß der möglichen Lage von  $\epsilon$  bezüglich der Achse  $a$  zwei Fälle getrennt betrachtet werden müssen :

Fall I :  $\epsilon$  ist weder zu  $a$  parallel noch ist  $a$  in  $\epsilon$  enthalten.

Fall II :  $\epsilon$  enthält  $a$  oder ist zu  $a$  parallel.

### § 2 U - Kurven in eigentlichen reellen Ebenen

Fall I :  $\epsilon$  kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit in der Gestalt  $x_3 = k \cdot x_2$  mit  $k = \text{konst.} \in \mathbb{R}$  angesetzt werden. Mit den Bezeichnungen aus Abb. 1 und  $U (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)^t$  findet man

$$s_U \dots (\lambda \cdot x_0 : \lambda \cdot x_1 - \mu \cdot x_2 : \lambda \cdot x_2 + \mu \cdot x_1 : \lambda \cdot k \cdot x_2 + \mu \cdot p \cdot x_0)^t \quad (2)$$

mit  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 - (0, 0)$ . Wählt man  $Q \in s_U$  zu den Parameterwerten  $\lambda = \mu = 1$ , so folgt  $Q^C \dots (x_0 : x_1 - x_2 : x_1 + x_2 : k \cdot x_2 + p \cdot x_0)^t$  und mit den Abkürzungen  $D := k \cdot s_2 - s_3$  und  $F := F(x_0, x_1) = k \cdot x_1 - p \cdot x_0$ <sup>7)</sup> stellt sich

$$Q^C \dots (x_0 \cdot D - s_0 \cdot F : (x_1 - x_2) \cdot D - s_1 \cdot F : (x_1 + x_2) \cdot D - s_2 \cdot F : k \cdot ((x_1 + x_2) \cdot D - s_2 \cdot F))^t \quad (3)$$

ein.

In inhomogenen Koordinaten ( $x := x_1/x_0$ ,  $y := x_2/x_0$ ,  $z := x_3/x_0$  für  $x_0 \neq 0$ ) kann der Richtungsvektor  $A$  von  $t_U = [U, Q^C]$  in der Form

$$A = \{y \cdot D + (s_1 - s_0 \cdot x) \cdot (k \cdot x - p) / -x \cdot D + (s_2 - s_0 \cdot y) \cdot (k \cdot x - p) / k \cdot (-x \cdot D + (s_2 - s_0 \cdot y) \cdot (k \cdot x - p))\}^t \quad (4)$$

geschrieben werden. Dabei ist zu beachten, daß  $s_0$  nur 0 oder 1 sein

<sup>7)</sup>  $D = 0$  ist die Bedingung dafür, daß  $S$  in  $\epsilon$  liegt.  $F = 0$  ist zusammen mit  $x_3 = k \cdot x_2$  die Gleichung der Charakteristik  $m$  von  $\epsilon$  bezüglich (1).

darf, und zwar gilt :

$$s_0 = \begin{cases} 0, & \text{wenn } S \text{ Fernpunkt ist, also Parallelbeleuchtung} \\ & \text{vorliegt.} \\ 1, & \text{wenn } S \text{ eigentlich ist, also Zentralbeleuchtung} \\ & \text{vorliegt.} \end{cases}$$

Wenn nun ein durch  $\{x(v)/y(v)/k.y(v)\}$  ( $v \in J \subset \mathbb{R}$ ) parametrisiertes U - Kurvenstück  $u$  der Klasse  $C^1$  in  $\epsilon$  vorliegen soll, muß gelten

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y.D + (s_1 - s_0.x).(k.x - p)}{-x.D + (s_2 - s_0.y).(k.x - p)}, \quad z = k.y. \quad (5)$$

Das ist eine JACOBIsche Differentialgleichung (vergleiche [13, Seiten 245 ff.] oder [15, Seiten 35 ff.]). (5) ist eine notwendige Bedingung für die gesuchten U - Kurven. Daß umgekehrt jede Lösung von (5) eine der gesuchten U - Kurven ist, ist evident. Hiemit können nun globale Aussagen für die U - Kurven gemacht werden. Zunächst folgt aus bekannten Sätzen über Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Gleichung (5) der

Satz 1 : Die U - Kurven auf Dreh - oder Schraubflächen des euklidischen Raumes  $\mathbb{E}_3$  sind in Ebenen  $\epsilon \nparallel a$  genau die Lösungen einer JACOBIschen Differentialgleichung (5); durch jeden nicht-singulären Punkt von  $\epsilon$  existiert genau eine U - Kurve.

Die eben angesprochenen singulären Punkte sind im allgemeinen für  $S \notin \epsilon$ <sup>8)</sup> genau die Schnittpunkte  $K_1, K_2$  und  $K_3$  von  $\kappa(S)$  und  $\epsilon$ <sup>9)</sup>. In diesem Fall sind dann die Verbindungsgeraden der drei singulären Punkte Lösungsgeraden von (5). Längs einer dieser Lösungsgeraden -

<sup>8)</sup> Also  $D \neq 0$  in (5).

<sup>9)</sup> Dies deshalb, weil dann in Abbildung 1  $Q^c = U$  wird.

sie heiÙe  $g$  - existiert an  $\Sigma(g)$  eine einzige Tangentialebene, die auÙerdem  $S$  enthält;  $g$  gehört damit dem Tangentenkomplex von (1) an und ist gleichzeitig Sehne von  $\kappa(S)$ . Das gilt für alle Ebenen, die  $S$  nicht enthalten. Da auch die  $S$  enthaltenden Sehnen von  $\kappa(S)$  nach Definition Bahntangenten von (1) sind, gilt der

Satz 2 : Die Sehnenkongruenz von  $\kappa(S)$  ist Teil des Tangentenkomplexes von (1).

Anders liegen die singulären Punkte für  $S \in \epsilon^{10)}$ : Man erkennt sofort, daÙ dann die Gerade  $k.x - p = 0, z = k.y$  durchwegs singuläre Punkte von (5) trägt. Diese Gerade ist genau die Charakteristik  $m$  von  $\epsilon$  bezüglich (1). Der noch verbleibende Teil von (5) ist dann bis auf eine Ausnahme leicht zu diskutieren : Die Lösungen sind die Geraden des Strahlbüschels  $(S, \epsilon)$ .

Im Ausnahmefall  $D = 0$  ( $S \in \epsilon$ ) mit  $k = p = 0$  beziehungsweise  $s_0 = s_1 = s_2 = 0$  folgt aus (5) für alle Punkte von  $\epsilon$  die Gleichung  $dx/dy = 0/0$ . Jeder Punkt von  $\epsilon$  ist damit singulär, und jede beliebige Kurve kann als  $U$  - Kurve dienen. Nun sollen diese beiden Fälle diskutiert werden :

a)  $D = 0$  mit  $k = p = 0$  :

(A1)  $\epsilon$  ist Normalschnittebene einer Drehfläche ( $p = 0$  in (1), wobei  $S$  in  $\epsilon$  liegt.

b)  $D = 0$  mit  $s_0 = s_1 = s_2 = 0$  :

Hier gilt wegen  $D = k.s_2 - s_3 = 0$  auch noch  $s_3 = 0$ , was unmöglich ist. Damit gilt der

Satz 3 : Die  $U$  - Kurven auf Dreh - oder Schraubflächen des euklidischen Raumes  $\mathbb{E}_3$  sind in Ebenen  $\epsilon \nparallel a$  für  $S \in \epsilon$  genau die Geraden des Strahlbüschels  $(S, \epsilon)$  und die Charakteristik  $m$  von  $\epsilon$

---

<sup>10)</sup> Also  $D = 0$  in (5).

bezüglich (1). Nur in dem Fall, daß  $\epsilon$  Normalschnittebene einer Drehfläche ist, kann jedes in  $\epsilon$  gelegene Kurvenstück als U - Kurve dienen (Ausnahmefall (A1)).

Fall II :  $\epsilon$  enthält  $a$  oder ist zu  $a$  parallel.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann  $\epsilon$  hier in der Gestalt  $x_2 = k \cdot x_0$  mit  $k = \text{konst.} \in \mathbb{R}$  angesetzt werden. Mit den selben Bezeichnungen und Überlegungen wie in Fall I erhält man

$$\frac{dx}{dz} = \frac{x \cdot (s_0 \cdot x - s_1) + k \cdot D}{x \cdot (s_0 \cdot z - s_3) - p \cdot D}, \quad y = k \text{ mit } D = k \cdot s_0 - s_2 \quad (6)$$

als kennzeichnende Differentialgleichung der U - Kurven in  $\epsilon$ . Diese Differentialgleichung ist wie (5) eine JACOBIsche. Damit gilt der

Satz 4 : Die U - Kurven auf Dreh - oder Schraubflächen der euklidischen Raumes  $\mathbb{E}_3$  sind in Ebenen  $\epsilon \parallel a$  oder  $a \subset \epsilon$  genau die Lösungen einer JACOBIschen Differentialgleichung (6). Durch jeden nichtsingulären Punkt existiert genau eine U - Kurve.

Wieder sind für  $S \notin \epsilon$  ( $D \neq 0$ ) und  $(k,p) \neq (0,0)$  die singulären Punkte genau die Schnittpunkte  $K_1, K_2$  und  $K_3$  von  $\kappa(S)$  mit  $\epsilon$ . Für  $S \in \epsilon$  ( $D = 0$ ) oder  $k = p = 0$ <sup>12)</sup> ist jeder Punkt der Geraden  $x = 0, y = k$  singulärer Punkt<sup>13)</sup>. Die verbleibende Differentialgleichung besitzt dann im allgemeinen genau das Strahlbüschel  $(S, \epsilon)$  beziehungsweise  $(S'', \epsilon)$ <sup>14)</sup> als Restlösung.

Die einzige Ausnahme tritt dann ein, wenn neben  $s_0 = s_1 = s_3 = 0$  noch  $D = 0$  oder  $k = p = 0$  gilt. Die erste Möglichkeit führt wegen  $D = k \cdot s_0 - s_2 = 0$  auf einen Widerspruch, die zweite ergibt

11)  $D = 0$  bedeutet wieder, daß  $S \in \epsilon$  ist.

12) Dann liegt in (1) eine Drehung vor;  $\epsilon$  ist Meridianschnittebene.

13) Das ist wieder genau die Charakteristik  $m$  von  $\epsilon$  bzgl. (1).

14) Dabei besitzt  $S''$  die Koordinaten  $(s_0 : s_1 : k \cdot s_0 : s_3)^t$ .

(A2)  $\epsilon$  ist Meridianschnittebene einer Drehfläche ( $p = 0$  in (1));  
S ist der zu  $\epsilon$  orthogonale Fernpunkt.

Genau im Ausnahmefall (A2) ist jedes in  $\epsilon$  gelegene Kurvenstück  
U - Kurve. Damit gilt der

Satz 5 : Die U - Kurven auf Dreh - oder Schraubflächen des eu -  
klidischen Raumes  $\mathbb{E}_3$  sind in Ebenen  $\epsilon \parallel a$  oder  $a \subset \epsilon$  im allgemeinen  
für  $S \in \epsilon$  und im Fall  $k = p = 0$  genau die Geraden des Strahl -  
büschels  $(S, \epsilon)$  bzw.  $(S'', \epsilon)$  und die Charakteristik  $m$  von  $\epsilon$  be -  
züglich (1). Nur in dem Fall, daß  $\epsilon$  Meridianschnittebene einer  
Drehfläche und S der zu  $\epsilon$  orthogonale Fernpunkt ist, kann jedes  
in  $\epsilon$  gelegene Kurvenstück als U - Kurve dienen. (Ausnahmefall (A2)).

### § 3 U - Kurven als Bahnkurven einparametrischer projektiver Trans - formationsgruppen der Ebene $\epsilon$

In den beiden in § 2 diskutierten Fällen sind die U - Kurven  
im allgemeinen Lösungen von gewissen JACOBI'schen Differential -  
gleichungen (5) und (6). Für diese Lösungskurven gilt nun der  
folgende in [13, Seite 251] angeführte

Satz 6 : Sämtliche Lösungskurven einer gewöhnlichen Differential -  
gleichung erster Ordnung sind genau dann Bahnkurven einer ein -  
parametrischen ebenen projektiven Transformationsgruppe, wenn die  
Differentialgleichung eine JACOBI'sche ist.

In [13, Seiten 245 ff.] und [15, Seiten 35 ff.] sind Lösungs -  
methoden für solche Differentialgleichungen angegeben. Diese  
Methoden verwenden im allgemeinen jedoch die Lösungen einer ge -  
wissen Gleichung dritten Grades, die hier mit dem allgemeinen An -  
satz nicht zu ermitteln sind. Es soll daher versucht werden, mit



Hilfe des Satzes 6 Aussagen über die möglichen  $U$  - Kurven zu gewinnen. Dabei sollen im folgenden die Sonderfälle (A1) und (A2) ausgeschlossen werden, in denen ja alle Punkte von  $\epsilon$  singuläre Punkte der zugehörigen JACOBI'schen Differentialgleichung sind.

Nach G. SCHEFFERS [13, Seiten 204 ff.] sind die Bahnkurven einparametrischer ebener projektiver Transformationsgruppen die bekannten  $W$  - Kurven<sup>15)</sup>. Eine projektive Klassifikation dieser projektiven Bewegungsgruppen findet sich bei F. KLEIN und S. LIE in [6, Seiten 54 ff.]. Die Schnittpunkte von  $\kappa(S)$  mit  $\epsilon$  sind im allgemeinen genau die Pole dieser projektiven Bewegungen. Je nach Realität und Vielfachheit dieser Pole lassen sich 6 Typen unterscheiden<sup>16)</sup>:

TYP 1 :  $K_1, K_2$  und  $K_3$  sind reell und paarweise verschieden, weitere singuläre Punkte existieren in  $\epsilon$  nicht. Die  $W$  - Kurven enthalten dann genau zwei der drei Pole und berühren dort die Verbindungsgerade zum dritten Pol. Als ausgezeichnete projektive Normalform kann in inhomogenen Koordinaten die allgemeine Parabel  $x = y^A$  ( $A \in \mathbb{R} - 0$ ),  $z = 0$  dienen.

TYP 2 :  $K_1, K_2$  und  $K_3$  sind paarweise verschieden; außerdem existiert noch eine Gerade ( etwa  $[K_2, K_3]$  ) mit durchwegs singulären Punkten. Dann liegt eine projektive Zielbewegungsgruppe der Ebene vor; Zielpunkt ist  $K_1$ . Die zugehörigen  $W$  - Kurven sind die Geraden durch  $K_1$ . Dieser Typ tritt dann ein, wenn die Situation von Satz 3 oder 5 vorliegt, ohne daß  $S$  auf der Charakteristik  $m = [K_2, K_3]$  von  $\epsilon$  liegt.

TYP 3 :  $K_1$  ist reell,  $K_2$  und  $K_3$  sind konjugiert komplex; weitere singuläre Punkte existieren in  $\epsilon$  nicht. Die zugehörigen  $W$  - Kurven sind vom Typ der logarithmischen Spirale mit  $K_1$  als gemeinsamem

---

15) Siehe auch bei G. BOL [1, § 7 (Seiten 30 - 33)].

16) Siehe etwa bei H. FRANK [5, § 4 (Seiten 18 ff.)].

Zentrum.

TYP 4 :  $K_1 = K_2 \neq K_3$ ; weitere singuläre Punkte existieren in  $\epsilon$  nicht.  $\epsilon$  enthält hier eine Tangente von  $\kappa(S)$  - Berührungspunkt ist  $K_1 = K_2$ . Als projektive Normalform der zugehörigen W - Kurven kann die Exponentialkurve  $y = e^x$ ,  $z = 0$  dienen.

TYP 5 :  $K_2 = K_3 \neq K_1$ ; außerdem existiert eine Gerade  $t$  mit durchwegs singulären Punkten.  $t$  ist dann genau die in  $\epsilon$  gelegene Tangente von  $\kappa(S)$ . Wieder liegen projektive Zielbewegungen vor. Die W - Kurven sind Geraden durch  $K_1$ . Diese Situation entsteht wie bei Typ 2 gemäß Satz 3 oder Satz 5.

TYP 6 :  $K_1 = K_2 = K_3$ . Die zugehörigen W - Kurven sind im allgemeinen Kegelschnitte eines Hyperoskulationsbüschels mit  $K_1 = K_2 = K_3$  als Hyperoskulationsort. Das tritt genau dann ein, wenn  $\epsilon$  Schmiegebene von  $\kappa(S)$  ist.

Abbildung 2

Die Abbildung 2 zeigt den interessantesten Fall von Typ 6 :  $\epsilon$  ist Meridianebene - enthält also  $a$  - und gleichzeitig Schmiegebene von  $\kappa(S)$  ( $k = 0$  und  $s_1 = 0$  in (6)).  $S$  wurde als eigentlicher Punkt gewählt. Für den Ansatz  $s_3 = 0$  wird aus (6) nach Normierung von  $s_0 = 1$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{x^2}{x \cdot z + p \cdot s_2}, \quad y = 0. \quad (7)$$

Die Lösungen sind für  $s_2 \neq 0$  ( $S \notin \epsilon$ ) und  $p \neq 0$  Kegelschnitte, die sich im Schraubachsenfernpunkt (Ferpunkt der  $z$  - Achse) hyperoskulieren. Ihre gemeinsame Asymptote ist  $a$ . Man bestätigt leicht,

daß die gleichseitige Hyperbel  $u$

$$y = 0, \quad x \cdot z = - p \cdot s_2 / 2 \quad (8)$$

eine Lösung von (7) ist. Die übrigen Lösungskegelschnitte ergeben sich dann durch ebene perspektive Affinitäten aus  $u$ , wobei die Schraubachse  $a$  die Affinitätsachse und der Schraubachsenfernpoint das Zentrum ist.

Für die Abbildung 2 wurde  $p = 2$  und  $S$  zu  $(1:0:16:0)^t$  gewählt. Es handelt sich um eine Zentralprojektion eines Teiles von  $\Sigma(u)$  mit  $S$  als Projektionszentrum und  $\epsilon$  als Bildebene.<sup>17)</sup>  $\Sigma(u)$  durchdringt sich übrigens selbst, wobei in der Figur diese Schnittkurve die zwischen  $E$  und  $F$  verlaufende Bahnschraublinie ist.

Zusammenfassend gilt der

Satz 7 : Die möglichen  $U$  - Kurven (ebenen Schattengrenzen) auf Dreh - oder Schraubflächen des euklidischen Raumes  $\mathbb{E}_3$  sind in sämtlichen eigentlichen Ebenen Bahnkurven einparametrischer projektiver Transformationsgruppen der betrachteten Ebene  $\epsilon$ , also ebene  $W$  - Kurven. Die Pole dieser Transformationsgruppen sind im allgemeinen die Schnittpunkte von  $\kappa(S)$  mit  $\epsilon$ . Die einzigen Ausnahmen bilden die Fälle (A1) und (A2), in denen jedes in  $\epsilon$  gelegene Kurvenstück als  $U$  - Kurve dienen kann.<sup>18)</sup>

---

17) Die Meridianhyperbel  $u$  wird dabei von den Punkten  $A, B, C$  und  $D$  begrenzt;  $u$  ist dann ein Teil des wahren Umrisses von  $\Sigma(u)$ .

18) Die Bestimmung der Meridiankurven der entstehenden Schraubflächen erfordert im allgemeinen Fall das Lösen einer transzendenten Gleichung, was nur in Spezialfällen ohne Näherungsverfahren möglich ist.

Literatur

- [1] BOL, G.: Projektive Differentialgeometrie 1. Teil, Göttingen Vandenhoeck & Ruprecht (1950).
- [2] BOL, G.: Projektive Differentialgeometrie 2. Teil, Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht (1954).
- [3] BOTTEMA, O. - ROTH, B.: Theoretical Kinematics, Amsterdam, North - Holland Series (1979).
- [4] FAŃO, G.: Kontinuierliche geometrische Gruppen, Enzyklopädie d. Math. Wiss. III A B 4b, 239 - 388 (1907).
- [5] FRANK, H.: Ebene projektive Kinematik, Dissertation, Karlsruhe (1968).
- [6] KLEIN, F. und LIE, S.: Über diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen. Math. Ann. 4, 50 - 84 (1872).
- [7] MEIRER, K.: Die windschiefen Flächen mit einer stetigen Schar ebener Schattengrenzen I, Mh. Math. 91, 39 - 71 (1981).
- [8] MEIRER, K.: Die windschiefen Flächen mit einer stetigen Schar ebener Schattengrenzen II, Mh. Math. 92, 117 - 142 (1981).
- [9] PALM, F.W.: Über die direkte Konstruktion des perspektiven Umrisses von allgemeinen Schraubflächen, Mh. Math. 23, 274 - 282 (1912).
- [10] PALM, F.W.: Über die Umrißbestimmung von allgemeinen Schraub- und Drehflächen in zentral - und parallelperspektiven Darstellungen, Mh. Math. 31, 157 - 172 (1921).

- [11] PALM, F.W.: Über den Perspektivumriß einer allgemeinen Schraubfläche. Sb. Österr. Akad. Wiss. Wien, math.- nat. Kl. II, 157, 63 - 78 (1948).
- [12] SACHS, H.: Die geraden Konoide mit ebenen Isophoten bei achsenparalleler Beleuchtung, Sb. Österr. Akad. Wiss. Wien, math.- nat. Kl. II, 178, 175 - 191 (1970).
- [13] SERRET, J.A. - SCHEFFERS, G.: Differential - und Integral - rechnung III, Teubner, Leipzig - Berlin (1914).
- [14] SCHEFFERS, G.: Besondere transcendente Kurven. Enzyklopädie d. Math. Wiss. III D 4 , 185 - 268 (1903).
- [15] STEPANOW, W.: Lehrbuch der Differentialgleichungen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1956).
- [16] WEISS, G.: Algebraische Gebüschregelflächen mit ebenen Schattengrenzen, Sb. Österr. Akad. Wiss. Wien, math.-nat. Kl. II, 185, 411 - 441 (1976).
- [17] WILSON, H.K.: Ordinary differential equations. Addison Wesley Publishing Company (1970).

Dr. O. RÖSCHEL

Institut für Mathematik und

Angewandte Geometrie

Montanuniversität Leoben

Franz - Josef - Straße 18

8700 Leoben

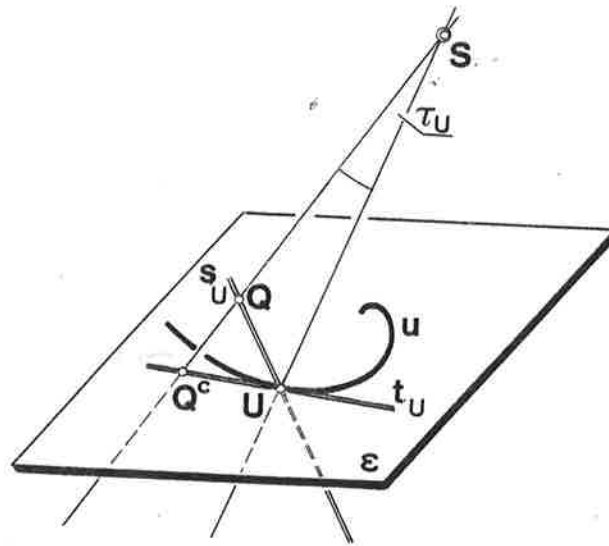


Abbildung 1

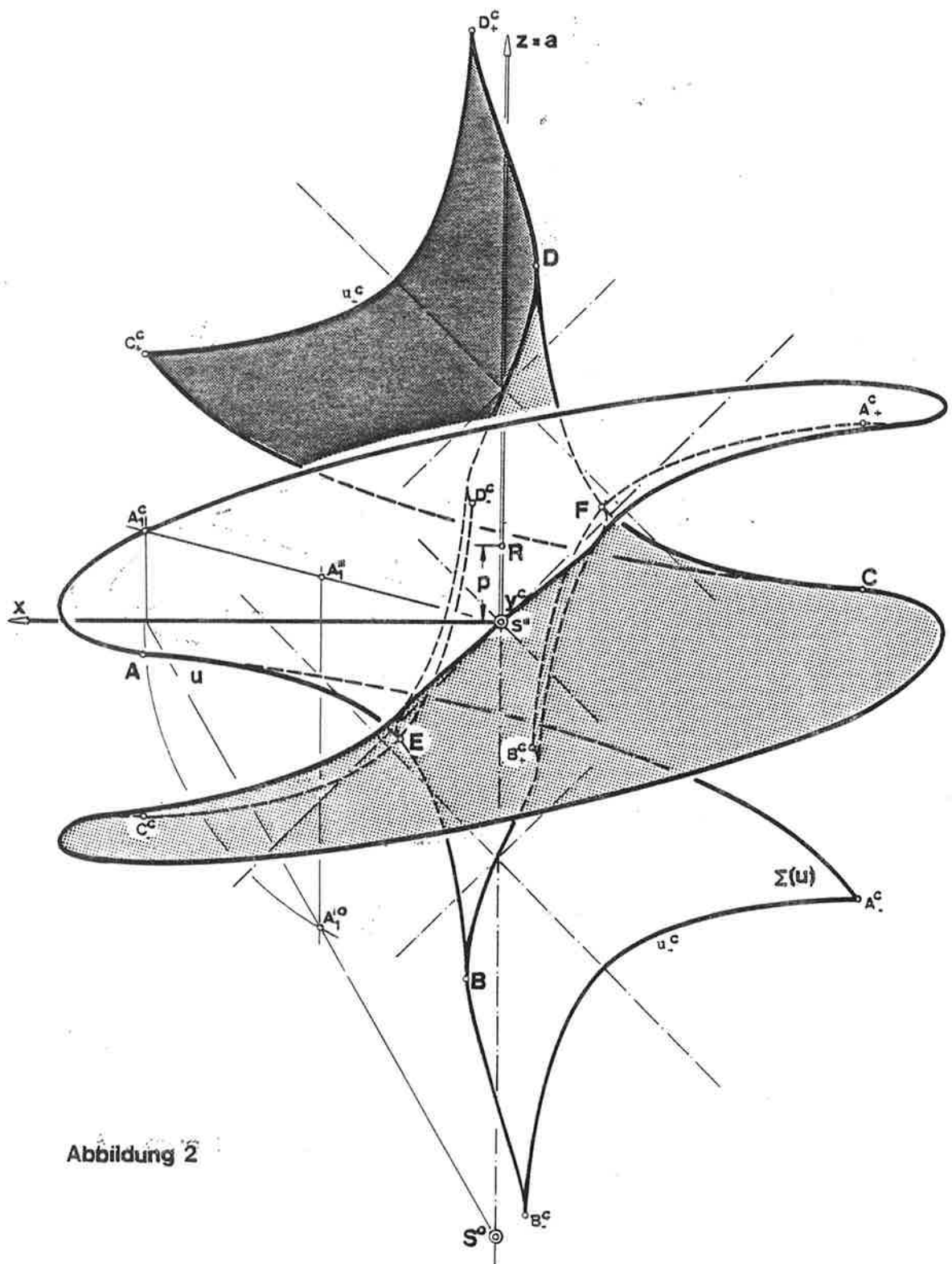


Abbildung 2