

Ebene Schattengrenzen auf Flächen mit besonderer projektiv -
kinematischer Erzeugung

von

Otto Röschel

Leoben

In letzter Zeit sind bemerkenswerte Arbeiten über Regelflächen des reellen dreidimensionalen projektiven Raumes \mathbb{P}_3 mit stetigen Scharen ebener Schattengrenzen entstanden (vgl. [6], [7] und [13])¹⁾. In [6] und [7] hat K. MEIRER festgestellt, daß diese ebenen Schattengrenzen im allgemeinen ebene W - Kurven sind ; die betrachteten Regelflächen erweisen sich als Projektivspiralfächen.

In [10] ist der Nachweis gelungen, daß auch die auf euklidischen Dreh - und Schraubflächen auftretenden ebenen Schattengrenzen im allgemeinen ebene W - Kurven sind.

Dieser Sachverhalt wird in der vorliegenden Arbeit auch für eine Flächenklasse mit besonderer projektivkinematischer Erzeugung bewiesen (Abschnitt 1). Außerdem werden alle Flächen mit ebenen Schattengrenzen bestimmt, die eine zweiparametrische projektive Transformationsgruppe des \mathbb{P}_3 gestatten. Wir nennen diese Flächen P_2 - Flächen mit ebenen Schattengrenzen und studieren sie in Abschnitt 2.

1. Jede Fläche Φ des \mathbb{P}_3 , die bezüglich einer stetigen Lichtpunktmenge $L(t)$ ($t \in (-\infty, +\infty)$) eine stetige Schar ebener Schattengrenzen $c(t)$ in Schattenebenen $\epsilon(t)$ trägt, läßt sich durch Projektivbewegung $A(t)$ der Schattengrenzen $c(t)$ erzeugen. Die

¹⁾ Weitere Literaturhinweise finden sich in [13].

Bahnkurven der Punkte von $c(t)$ sind dabei die Streiflicht -
spuren (vgl. [6, S. 122 ff.]). R. WALTER hat gezeigt [12, S.
361 ff.], daß die Einschränkung von $A(t)$ auf $\epsilon(t)$ eine
 $\{\epsilon(t), L(t)\}$ - Zentralbewegung mit dem Lichtpunkt $L(t)$ als
Zentralpunkt ist.²⁾

Im folgenden wollen wir den uninteressanten Fall $L(t) \in \epsilon(t)$
von unseren Betrachtungen ausschließen : Die Schattengrenze
 $c(t)$ ist dann eine Gerade, die entweder $L(t)$ nicht enthält -
es entstehen die trivialen Torsen - oder durch $L(t)$ hindurch -
geht - die "Schattengrenze $c(t)$ " ist projizierend.

Wir beweisen nun den

Satz 1 : Gegeben sei eine Fläche Φ des dreidimensionalen pro -
jektiven Raumes \mathbb{P}_3 mit einer stetigen Schar ebener Schatten -
grenzen $c(t)$ in Schattenebenen $\epsilon(t)$ ($t \in (-\infty, +\infty)$) bezüglich
der Lichtpunkte $L(t) \notin \epsilon(t)$. Existiert zu einem Zeitpunkt
 $t = t_0$ ein für $\{\epsilon(t_0), L(t_0)\}$ nichtzentraler projektiver Be -
wegungsvorgang $B(t)$, der die ebenen Schattengrenzen $c(t)$ in -
einander überführt, so sind diese ebenen Schattengrenzen ebene
 W - Kurven.

Beweis : $B(t_0)$ besitzt eine infinitesimale projektive Trans -
formation der Gestalt

$$\frac{dx_i}{du} = a_i^j(t_0) \cdot x_j \quad (i, j = 0, 1, 2, 3^4; u \in (-\infty, +\infty)) \quad (1.1)$$

²⁾ Eine integalfreie Darstellung der Zentralbewegungen gibt
A. ÖZKAN [8, S. 378 ff.] an.

³⁾ $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)^t$ sind die üblichen homogenen Koordinaten im \mathbb{P}_3 ,
der bei Bedarf komplex erweitert werden soll.

⁴⁾ Wir verwenden die Einsteinsche Summationskonvention.

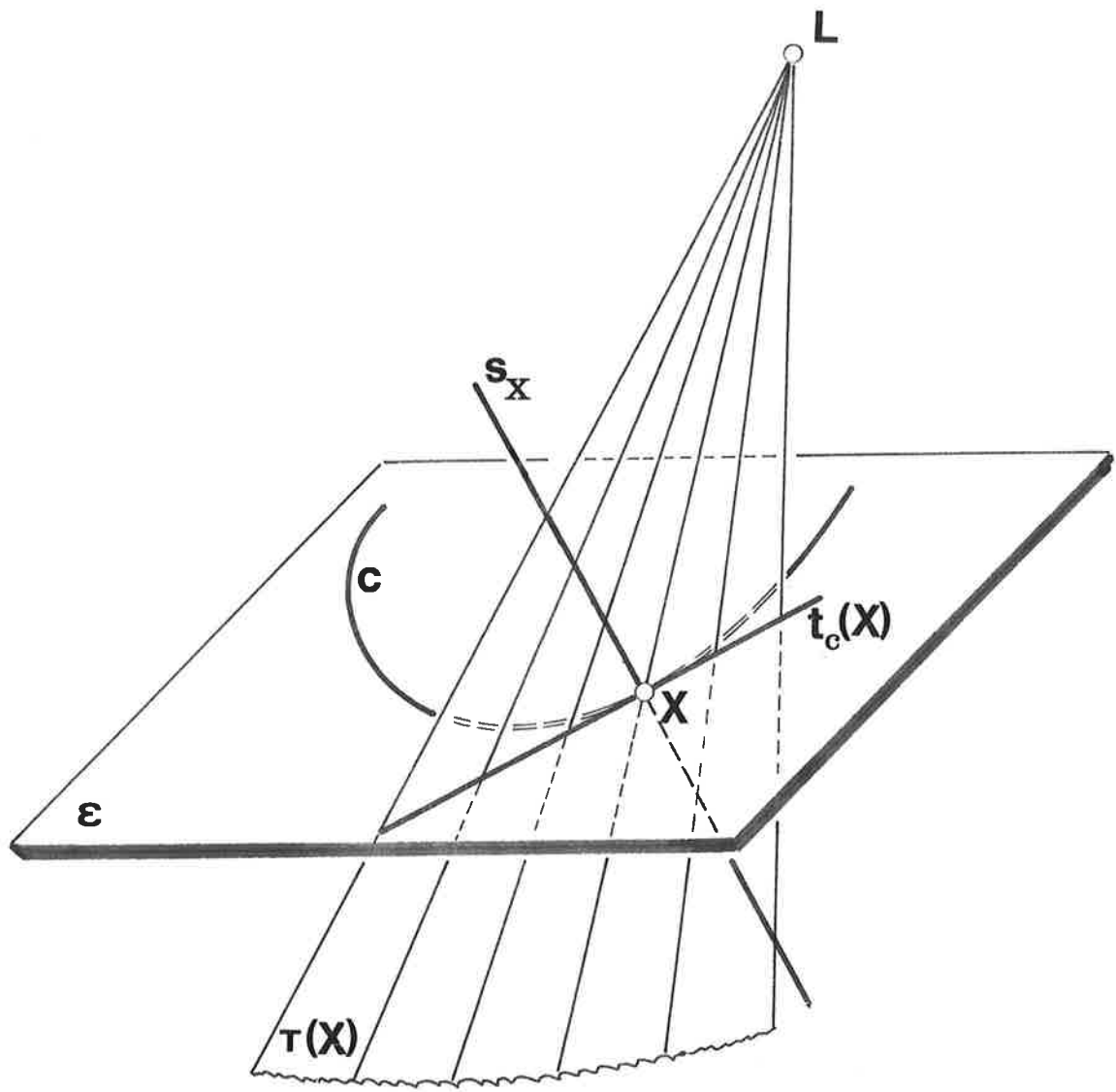


Abbildung 1

mit konstanten Koeffizienten $a_i^j(t_0) := a_i^j \in \mathbb{R}$, die eine einparametrische projektive Transformationsgruppe T erzeugt. Die Matrix (a_i^j) besitzt die vier Eigenwerte r_0, r_1, r_2 und r_3 mit zugehörigen linear unabhängigen Eigenvektoren μ^0, μ^1, μ^2 und μ^3 . Werden die μ^i ($i = 0, 1, 2, 3$) als Basis des \mathbb{P}_3 betrachtet, so läßt sich die Menge aller Punkte $Z (\zeta_0 : \zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3)^t$, die bei T Bahntangenten durch den festen Punkt $L (\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3)^t$ schicken oder Fixpunkte sind, durch

$$\zeta_i = \frac{\lambda_i}{1 + s \cdot r_i} \quad (i = 0, 1, 2, 3) \quad (1.2)$$

mit reellem Parameter s beschreiben. (1.2) stellt im allgemeinen eine Raumkurve dritter Ordnung $k(L)$ dar (vgl. [9, S. 46 ff.]), die zerfallen, aus einer Ebene und einer L enthaltenden Geraden bestehen oder den ganzen Raum \mathbb{P}_3 umfassen kann.

Wir wollen nun in einer festgehaltenen reellen Ebene $\epsilon (x_3=0)$ alle jene Kurven c bestimmen, die auf der Bahnfläche $T(c)$ von c bei Beleuchtung aus dem nicht in ϵ gelegenen Lichtpunkt $L (0:0:0:1)^t$ ebene Schattengrenzen (ES - Kurven) sind. Es sind dies die Integralkurven des folgenden Richtungsfeldes (Abb. 1):

Abbildung 1

Die Bahntangenten s_X der Punkte $X (x_0 : x_1 : x_2 : 0)^t$ von ϵ bilden bei T zum Zeitpunkt $u = 0$ eine Geradenkongruenz, für die R. WALTER sechs Normalformen angibt [12, S.347]. Sie wird durch

$$s_{Xi} = (m \cdot a_i^j + n \cdot \delta_i^j) \cdot x_j \quad 5) \quad (i = 0, 1, 2, 3 ; j = 0, 1, 2) \quad (1.3)$$

mit $(m, n) \in (\mathbb{R}^2 - (0, 0))$ beschrieben. Die Tangentialebene $\tau(X)$

5) Mit den Kroneckersymbolen δ_i^j .

von $T(c)$ in einem regulären Punkt X einer ES - Kurve c in ϵ muß den Lichtpunkt L enthalten. Die Tangente $t_c(X)$ von c ist daher im allgemeinen der Zentralriß der Bahntangente s_X mit der Lichtquelle L als Projektionszentrum und der Bildebene ϵ . Nach geeigneter Parameterwahl $w \in (-\infty, +\infty)$ muß dann für die Parameterdarstellung $x_i(w)$, $x_3 = 0$ ($i = 0, 1, 2$; $x_i \in \mathbb{C}^1$) einer ES - Kurve c in ϵ das lineare homogene Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx_i}{dw} = - a_i^j \cdot x_j, \quad x_3 = 0 \quad (i, j = 0, 1, 2) \quad (1.4)$$

erfüllt sein. Die Lösungen sind Bahnkurven einer einparametrischen projektiven Transformationsgruppe E in der Ebene ϵ , deren Fixpunkte zu den singulären Stellen von (1.4) gehören; es sind dies genau die Schnittpunkte von $k(L)$ mit ϵ ⁶⁾. Alle Punkte der Ebene ϵ sind genau dann singulär, wenn $T\{\epsilon, L\}$ - Zentralbewegung ist. Dann kann jedes ebene Kurvenstück von ϵ als ES - Kurve angesprochen werden. In allen anderen Fällen ist evident, daß umgekehrt auch jede Lösung von (1.4) eine ES - Kurve in ϵ abgibt, womit Satz 1 bewiesen ist. \square

2. Wir legen unseren Untersuchungen eine zweiparametrische projektive Transformationsgruppe $[T, T^*]$ zugrunde, wobei die von T unabhängige einparametrische projektive Transformationsgruppe T^* durch

$$\frac{dx_i}{du^*} = a_i^{j*} \cdot x_j \quad (i, j = 0, 1, 2, 3; u^* \in (-\infty, +\infty)) \quad (2.1)$$

mit konstanten Koeffizienten $a_i^{j*} \in \mathbb{R}$ festgelegt sei. Wie in

⁶⁾ Eine Klassifikation dieser ES - Kurven nach den Schnittpunkten von $k(L)$ mit ϵ wurde in [10] vorgenommen.

Abschnitt 1 halten wir eine reelle Ebene ϵ ($x_3 = 0$) fest und versuchen, ES - Kurven c bezüglich der Lichtquelle L $(0:0:0:1)^t$ zu ermitteln. Da ausgeschlossen werden kann, daß ϵ bei T und T^* Fixebene ist, bleiben zwei Fälle getrennt zu diskutieren :

2.1. T ist $\{\epsilon, L\}$ - Zentralbewegung. Nach [8, S.379] existiert dann in ϵ eine Fixpunktgerade z von T . Solche Projektivbewegungsgruppen werden von W. LINGENBERG [5, S. 409 ff.] *Allgemeine Projektivrotationen* und von K. MEIRER [6, S. 123] *Projektivspiralungen oder projektive Grenzspiralungen* (P - Spiralungen bzw. PG - Spiralungen) genannt, je nachdem eine zu z windschiefe Fixgerade \bar{z} von T existiert oder nicht. J. TÖLKE zeigt [11, S.33 ff.], daß der Zentralpunkt L der Nebenachse \bar{z} von T angehört.⁷⁾ (Die Breitenkurven in Ebenen durch \bar{z} sind auf diesen P - bzw. PG - Spiralfächen trivialerweise ES - Kurven ; der Lichtpunkt liegt auf der Achse z .)

W. LINGENBERG [5, S. 427 ff.] und K. MEIRER [6, S. 124 ff.] haben diese P - bzw. PG - Spiralungen eingehend studiert und auch *Normalformen* angegeben :

P - Spiralungen T mit Achse z ($x_2 = x_3 = 0$) und Nebenachse \bar{z} ($x_0 = x_1 = 0$) :

$$T : \mathbb{P}_3 \longrightarrow \mathbb{P}_3, \quad (x_0:x_1:x_2:x_3)^t \longrightarrow (x_0:x_1:y_2:y_3)^t \text{ mit}$$

$$\begin{cases} y_2(u) = e^{au} \cdot (x_2 \cdot \cos u - x_3 \cdot \sin u) \\ y_3(u) = e^{au} \cdot (x_2 \cdot \sin u + x_3 \cdot \cos u), \end{cases} \quad (2.2.A)$$

$$\begin{cases} y_2(u) = e^{au} \cdot (x_2 \cdot \cosh u + x_3 \cdot \sinh u) \\ y_3(u) = e^{au} \cdot (x_2 \cdot \sinh u - x_3 \cdot \cosh u) \text{ oder} \end{cases} \quad (2.2.B)$$

⁷⁾ J. TÖLKE nennt diese Bewegungen *Axialbewegungen* [11, S. 34].

$$\begin{cases} y_2(u) = e^{au} \cdot x_2 \\ y_3(u) = (x_3 + x_2 \cdot u) \cdot e^{au}, \end{cases} \quad (2.2.C)$$

wobei a eine reelle Konstante ist.

PG - Spiralungen T mit Achse z ($x_0=x_1=0$) und Nebenachse \bar{z}

($x_0=x_2=0$) :

$$T : \mathbb{P}_3 \longrightarrow \mathbb{P}_3, (x_0:x_1:x_2:x_3)^t \longrightarrow (x_0:y_1:x_2:y_3)^t \text{ mit}$$

$$\begin{cases} y_1(u) = x_1 \cdot e^{au} \\ y_3(u) = x_3 + x_0 \cdot u \end{cases} \quad \text{oder} \quad (2.2.D)$$

$$\begin{cases} y_1(u) = x_1 + x_0 \cdot u \\ y_3(u) = x_3 + 2 \cdot x_1 \cdot a \cdot u + x_0 \cdot a \cdot u^2 \end{cases} \quad (2.2.E)$$

($a = \text{konstant} \in \mathbb{R}$).

Da T^* keine $\{\epsilon, L\}$ - Zentralbewegung sein kann - sonst wäre $[T, T^*]$ keine zweiparametrische projektive Transformationsgruppe -, induziert T^* vermöge (1.4) in der Meridianebene ϵ durch die Achse z von T eine einparametrische projektive Transformationsgruppe E^* , deren Bahnkurven als Meridiankurven der gesuchten Flächen in Frage kommen. E^* besitzt Fixpunkte in den auf z gelegenen Fixpunkten von T^* und im Punkt $M := (\bar{z}, \epsilon)$, da \bar{z} auch bei T^* Fixgerade sein muß und damit $k(L)$ bezüglich T^* angehört (vgl. (1.2)). Wird ϵ samt E^* der P - bzw. PG - Spiralung T unterworfen, so wird dadurch im \mathbb{P}_3 eine einparametrische projektive Transformationsgruppe U induziert, für die \bar{z} Fixpunktgerade (Achse) und z Fixgerade (Nebenachse) ist. Damit ist auch U eine P - bzw. PG - Spiralung.⁸⁾ Die hier zulässigen Flächen sind daher P2 - Flächen mit konjugierten P - bzw. PG - Spiralungen T und U (vgl. [6, S. 127]). Wir bezeichnen diese Flächen im folgenden als P2 - Spiralflächen. Mit den Normalformen (2.2.A)

⁸⁾ E^* gestattet T für $u = k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

bis (2.2.E) existieren neun Typen von P2 - Spiralfächen, deren Parameterdarstellungen und Gleichungen die folgenden sind :⁹⁾

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0(u,v) = e^{bv} \cdot \cos v \quad y_1(u,v) = e^{bv} \cdot \sin v \\ y_2(u,v) = e^{au} \cdot \cos u \quad y_3(u,v) = e^{au} \cdot \sin u \quad (2.3.A.A) \\ y_0^2 + y_1^2 = (y_2^2 + y_3^2) \cdot e^{2 \cdot (b \cdot \arctan(\frac{y_1}{y_0}) - a \cdot \arctan(\frac{y_3}{y_2}))} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0(u,v) = e^{bv} \cdot \cosh v \quad y_1(u,v) = e^{bv} \cdot \sinh v \\ y_2(u,v) = e^{au} \cdot \cos u \quad y_3(u,v) = e^{au} \cdot \cos u \quad (2.3.A.B) \\ \frac{(y_0 + y_1)^{b+1}}{(y_0 - y_1)^{b-1}} (y_2^2 + y_3^2) \cdot e^{2 \cdot a \cdot \arctan(\frac{y_3}{y_2})} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0(u,v) = e^{bv} \quad y_1(u,v) = v \cdot e^{bv} \\ y_2(u,v) = e^{au} \cdot \cos u \quad y_3(u,v) = e^{au} \cdot \sin u \quad (2.3.A.C) \\ 2 \cdot b \cdot \left(\frac{y_1}{y_0}\right) + \ln \left(\left(\frac{y_2}{y_0}\right)^2 + \left(\frac{y_3}{y_0}\right)^2 \right) = 2 \cdot a \cdot \arctan \left(\frac{y_3}{y_2} \right) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0(u,v) = e^{bv} \cdot \cosh v \quad y_1(u,v) = e^{bv} \cdot \sinh v \\ y_2(u,v) = e^{au} \cdot \cosh u \quad y_3(u,v) = e^{au} \cdot \sinh u \quad (2.3.B.B) \\ \frac{(y_0 - y_1)^{b+1}}{(y_0 + y_1)^{b-1}} = \frac{(y_2 - y_3)^{a+1}}{(y_2 + y_3)^{a-1}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0(u,v) = e^{bv} \quad y_1(u,v) = v \cdot e^{bv} \\ y_2(u,v) = e^{au} \cdot \cosh u \quad y_3(u,v) = e^{au} \cdot \sinh u \quad (2.3.B.C) \\ \left(\left(\frac{y_2}{y_0}\right)^2 - \left(\frac{y_3}{y_0}\right)^2 \right) \cdot e^{2 \cdot b \cdot \left(\frac{y_1}{y_0}\right)} = \left(\frac{y_2 + y_3}{y_2 - y_3} \right)^a \end{array} \right.$$

⁹⁾ Diese Darstellungen entstehen, wenn ein nicht auf dem Fix - tetraeder von T und U gelegener Punkt P zuerst T und danach U unterworfen wird. Für die Flächen (2.3.A.A) bis (2.3.C.C) wurde P zu $(1:0:1:0)^t$, für (2.3.D.D) zu $(1:1:1:0)^t$, für (2.3.D.E) zu $(1:1:0:0)^t$ und für (2.3.E.E) zu $(1:0:0:0)^t$ gewählt.

$$\begin{cases} y_0(u,v) = e^{bv} & y_1(u,v) = v \cdot e^{bv} \\ y_2(u,v) = e^{au} & y_3(u,v) = u \cdot e^{au} \end{cases} \quad (2.3.C.C)$$

$$\ln \left(\frac{y_2}{y_0} \right) = a \cdot \left(\frac{y_3}{y_2} \right) - b \cdot \left(\frac{y_1}{y_0} \right) ,$$

$$\begin{cases} y_0(u,v) = 1 & y_1(u,v) = e^{au} & y_2(u,v) = e^{-bv} & y_3(u,v) = u + v \\ \left(\frac{y_1}{y_0} \right)^b = \left(\frac{y_2}{y_0} \right)^a \cdot e^{a \cdot b \cdot \left(\frac{y_3}{y_0} \right)} , \end{cases} \quad (2.3.D.D)$$

$$\begin{cases} y_0(u,v) = 1 & y_1(u,v) = e^{au} & y_2(u,v) = v & y_3(u,v) = u + b \cdot v^2 \\ a \cdot \left(\frac{y_3}{y_0} - b \cdot \left(\frac{y_2}{y_0} \right)^2 \right) = \ln \left(\frac{y_1}{y_0} \right) , \end{cases} \quad (2.3.D.E)$$

$$\begin{cases} y_0(u,v) = 1 & y_1(u,v) = u & y_2(u,v) = v & y_3(u,v) = a \cdot u^2 + b \cdot v^2 \\ \left(\frac{y_3}{y_0} \right) = a \cdot \left(\frac{y_1}{y_0} \right)^2 + b \cdot \left(\frac{y_2}{y_0} \right)^2 \end{cases} \quad (2.3.E.E)$$

mit $u, v \in (-\infty, +\infty)$ und reellen Konstanten a und b .¹⁰⁾

Unter diesen Flächen befinden sich auch die von K. MEIRER ([6] bzw. [7]) gefundenen *windschiefen Regelflächen mit ebenen Schattengrenzen* : Typ (2.3.A.A), Typ (2.3.B.B), Typ (2.3.C.C) und Typ (2.3.D.D) mit $a = b = 0$ bzw. die trivialen Flächen zweiter Ordnung bei den übrigen Typen.

Auch bemerkenswerte *Kegel* finden sich unter diesen P2 - Spiralfächen : Die Typen (2.3.A.C) und (2.3.B.C) mit $b = 0$ sowie (2.3.C.C), (2.3.D.D), (2.3.D.E) und (2.3.E.E) mit $a = 0$ oder $b = 0$. Diese Kegel besitzen eine ebene W - Kurve als Leitkurve.

10)

Diese Flächen finden sich auch unter den von S. LIE [4, S.494ff.] angegebenen P2 - Flächen ; dort fehlt der Hinweis auch ihre ES - Eigenschaft. Die Parameterlinien $u = \text{konst.}$ und $v = \text{konst.}$ sind Meridian - bzw. Breitenkurven der erzeugenden P - bzw. PG - Spirallungen ; sie sind ES - Kurven für geeignete Lichtpunkte.

Algebraische P2 - Spiralflächen sind genau die Flächen der Typen (2.3.A.B) mit $a = 0$ und $b \in \mathbb{Q}$, (2.3.B.B) mit $a, b \in \mathbb{Q}$, (2.3.B.C) mit $b = 0$ und $a \in \mathbb{Q}$, (2.3.D.D) mit $a = 0$ und $b \in \mathbb{Q}$ bzw. $a \in \mathbb{Q}$ und $b = 0$ und bei den übrigen Typen die als Grenzfälle auftretenden Flächen zweiter Ordnung.

Die Flächen (2.3.B.B), (2.3.B.C) und (2.3.D.D) können unter Umständen noch auf weitere Arten als P - bzw. PG - Spiralflächen erzeugt werden ¹¹⁾:

(2.3.B.B) geht durch die reelle projektive Kollineation $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)^t \longrightarrow (z_0 = x_0 - x_1 : z_1 = x_0 + x_1 : z_2 = x_2 - x_3 : z_3 = x_2 + x_3)^t$ in die Normalform (vgl. [6, S. 137 (7.8.a)] für $a = b$)

$$\frac{z_0^{b+1}}{z_1^{b-1}} = \frac{z_2^{a+1}}{z_3^{a-1}} \quad (2.4)$$

mit dem konjugierten ES - Kurvennetz ($u = \text{konst.}$ bzw. $v = \text{konst.}$)

$$\begin{cases} z_0(u,v) = e^{v(b-1)} \\ z_2(u,v) = e^{u(a-1)} \end{cases} \quad \begin{cases} z_1(u,v) = e^{v(b+1)} \\ z_3(u,v) = e^{u(a+1)} \end{cases} \quad (2.5)$$

über. Sieht man von $a = b = 0$ ab (Fläche zweiter Ordnung), so läßt sich (2.4) noch durch genau zwei weitere konjugierte P - Spiralungen mit dem Bahnkurvennetz ($u = \text{konst.}$ bzw. $v = \text{konst.}$)

$$\begin{cases} z_0(u,v) = e^{v(a+1)} \\ z_2(u,v) = e^{v(b+1)} \end{cases} \quad \begin{cases} z_1(u,v) = e^{u(a-1)} \\ z_3(u,v) = e^{u(b-1)} \end{cases} \quad (2.6.a)$$

und

$$\begin{cases} z_0(u,v) = e^{v(1-a)} \\ z_2(u,v) = e^{u(1-b)} \end{cases} \quad \begin{cases} z_1(u,v) = e^{u(a+1)} \\ z_3(u,v) = e^{v(b+1)} \end{cases} \quad (2.6.b)$$

¹¹⁾ Der Fall der Flächen zweiter Ordnung ist hier nicht von Interesse.

erzeugen. Achsen dieser P - Spiralungen sind die von z und \bar{z} verschiedenen windschiefen Geradenpaare des Fixtetraeders von T und U. Die Bahnkurven dieser neuen P - Spiralungen sind wie die von T und U ES - Kurven der Fläche.

(2.3.B.C) wird durch die reelle projektive Kollineation $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)^t \longrightarrow (z_0 = x_0 : z_1 = x_2 + x_3 : z_2 = x_2 - x_3 : z_3 = x_1)^t$ auf die Normalform

$$\left(\frac{z_1}{z_0}\right)^{a-1} = \left(\frac{z_2}{z_0}\right)^{a+1} \cdot e^{2 \cdot b \cdot \left(\frac{z_3}{z_0}\right)} \quad (2.7)$$

mit dem konjugierten ES - Kurvennetz

$$\begin{cases} z_0(u, v) = e^{bv} & z_1(u, v) = e^{u(a+1)} \\ z_2(u, v) = e^{u(a-1)} & z_3(u, v) = v \cdot e^{bv} \end{cases} \quad (2.8)$$

transformiert. Ein Vergleich mit (2.3.D.D) zeigt, daß genau für

$$a^2 - 1 = 2 \cdot b \quad (2.9)$$

auf der Fläche noch das konjugierte PG - Spiralkurvennetz

$$\begin{cases} z_0(u, v) = 1 & z_1(u, v) = e^{u(a+1)} \\ z_2(u, v) = e^{v(1-a)} & z_3(u, v) = u + v \end{cases} \quad (2.10)$$

ein ES - Kurvennetz ist (vgl. (2.3.D.D), $u = \text{konst.}$ bzw. $v = \text{konst.}$).

Umgekehrt läßt sich jede Fläche des Typs (2.3.D.D) genau dann auch als P - Spiralfläche erzeugen (Typ (2.3.B.C)), wenn in (2.3.D.D)

$$a - b = 2 \quad (2.11)$$

gilt. Als Zusammenfassung gilt

Satz 2 : Alle P2 - Spiralflächen tragen zumindest ein konjugiertes Netz ebener Schattengrenzen ; es sind dies die Bahnkurven der die Fläche erzeugenden P - bzw. PG - Spiralungen - die zugehörigen Lichtpunkte liegen auf den Achsen dieser Bewegungen. Von Flächen

zweiter Ordnung abgesehen, tragen genau die Flächen des Typs (2.3.B.B) im allgemeinen noch zwei weitere Kurvennetze dieser Art, Flächen des Typs (2.3.B.C) und (2.3.D.D) unter gewissen Umständen ein weiteres.¹²⁾

2.2. Weder T noch T^* ist $\{\epsilon, L\}$ - Zentralbewegung. Gemäß (1.4) induzieren T und T^* in ϵ lineare homogene Differentialgleichungssysteme

$$\frac{dx_i}{dv} = (m \cdot a_i^j + n \cdot a_i^{j*}) \cdot x_j, \quad x_3 = 0 \quad (i, j = 0, 1, 2) \quad (2.12)$$

mit $(m, n) \in (\mathbb{R}^2 - (0, 0))$, deren Lösungen als ES - Kurven in ϵ in Betracht kommen. Entweder existiert nun in $[T, T^*]$ eine einparametrische Untergruppe S , die $\{\epsilon, L\}$ - Zentralbewegung ist (was in 2.1 besprochen wurde), oder (2.12) besitzt genau dann Lösungen, wenn die Gesamtheit der für $(m, n) = \text{konst.}$ von (2.12) in ϵ induzierten einparametrischen projektiven Transformationsgruppen $E(m, n)$ eine zweiparametrische projektive Transformationsgruppe der Ebene ϵ bildet. Die möglichen ES - Kurven sind dann Kegelschnitte oder Geraden. Da Geraden auf die trivialen Torsen von Raumkurven dritter Ordnung oder auf Kegel zweiter Ordnung führen, kommen für uns nur Kegelschnitte in Betracht. Ist nun die Ebene ϵ Fixebene bei T (T^*), so ist T (T^*) eine projektive Drehung (P - Spirallung mit $a = 0$ in (2.2.A) und (2.2.B) oder PG - Spirallung mit $a \neq 0$ in (2.2.E)) mit Achse z in ϵ , was in 2.1 diskutiert wurde. Wenn ϵ weder für T noch für T^* Fixebene ist, besitzt die entstehende Fläche eine zweiparametrische Kegelschnittsschar, längs der sie von Kegeln zweiter Ordnung berührt wird. Ein

¹²⁾ Für $a = b$ stellt sich bei Typ (2.2.B.B) eine von K. MEIRER [6, S. 137 (7.8.a)] gefundene ES - Regelfläche ein. Auf diesen Flächen wird das Netz (2.6.a) zu den Erzeugenden der Fläche, die ihre zugehörigen Lichtpunkte enthalten und damit projizierend sind.

Vergleich mit den von S. LIE [4, S. 494 ff.] angegebenen P_2 - Flächen zeigt, daß dafür nur die *Flächen zweiter Ordnung* in Betracht kommen.

Außerdem ist damit klar, daß auf den übrigen P_2 - Spiral - flächen neben den schon erwähnten ES - Kurvenscharen keine weiteren mehr existieren.

Satz 3 : P_2 - Flächen mit ebenen Schattengrenzen sind genau die P_2 - Spiralflächen, die Flächen zweiter Ordnung und die Torsen von Raumkurven dritter Ordnung. Die ebenen Schattengrenzen sind auf den P_2 - Spiralflächen die ebenen Bahnkurven aller erzeugenden konjugierten P - bzw. PG - Spiralungen, auf den Flächen zweiter Ordnung die ebenen Schitte und auf den Torsen der Raumkurven dritter Ordnung die Erzeugenden.

LITERATUR

- [1] BOL, G.: Projektive Differentialgeometrie I. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen (1950).
- [2] BOL, G.: Projektive Differentialgeometrie II. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen (1954).
- [3] DEGEN, W.: Eine Kennzeichnung ebener Schattengrenzen. Archiv d. Math. 17, 465 - 468 (1966).
- [4] LIE, S.: Gesammelte Abhandlungen, 6. Bd., Norwegischer Mathematischer Verein, Leipzig (1927).

- [5] LINGENBERG, W.: Zur Differentialgeometrie der Flächen, die eine eingliedrige projektive Gruppe in sich gestatten und über Allgemeine Projektivrotationsflächen. Math. Zeitschr. 66, 409 - 446 (1957).
- [6] MEIRER, K.: Windschiefe Flächen mit einer stetigen Schar ebener Schattengrenzen I, II. Monatsh. Math. 91, 39 - 71 ; 92, 117 - 142 (1981).
- [7] MEIRER, K.: Über windschiefe Flächen mit ausgezeichneten Scharen ebener Kurven. Ber. d. math. stat. Sektion Graz, 164, 1 - 18 (1981).
- [8] ÖZKAN, A.: Integralfreie Darstellung der Zentralbewegung. Archiv. d. Math. 11, 378 - 382 (1960).
- [9] REYE, T.: Die Geometrie der Lage, Bd. 3, Baumgärtners Buchhandlung, Leipzig (1892).
- [10] RÖSCHEL, O.: Ebene Schattengrenzen auf euklidischen Dreh - und Schraubflächen. Sitz. Ber. d. Jugos. Akad. Wiss. (im Druck).
- [11] TÖLKE, J.: Projektive kinematische Geometrie. Ber. d. math. stat. Sektion Graz, 39, 1 - 51 (1975).
- [12] WALTER, R.: Zur allgemeinen und projektiven Kinematik ein - parametriger Ebenenscharen. Math. Zeitschr. 110, 339 - 374 (1969).
- [13] WEISS, G.: Algebraische Gebüschregelflächen mit ebenen Schattengrenzen. Sitz. Ber. d. Österr. Akad. Wiss. math.-nat. Kl., 185, 411 - 441 (1976).

Anschrift des Verfassers : Dr. Otto Röschel, Institut für
Mathematik und Angewandte Geometrie, MU Leoben,
Franz - Josef - Straße 18, 8700 Leoben.