

DIE GEOMETRIE DES
GALILEISCHEN RAUMES

Otto Röschel, MU Leoben

Bericht Nr. 256

Die Geometrie des galileischen Raumes

Habilitationsschrift

von

Otto Röschel

LEOBEN

1984

Für Christa

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung	1
§ 1 Die Bewegungsgruppe des dreidimensionalen galileischen Raumes	4
§ 2 Abstands - und Winkelmessung im galileischen Raum G_3	9
§ 3 Die eingliedrigen Bewegungsgruppen des galileischen Raumes	13
§ 4 Kreise und Kugeln des galileischen Raumes G_3	20
§ 5 Winkel und Abstand von Kugeln des galileischen Raumes G_3	26
§ 6 Möbiusabbildungen des parabolisch affin - axialen Raumes A_3^p	30
§ 7 Winkeltreue Möbiustransformationen im konisch abgeschlossenen galileischen Raum G_3^*	34
§ 8 Laguerregeometrie im galileischen Raum G_3	38
§ 9 Abstandstreue Laguerretransformationen des galileischen Raumes G_3	45
§ 10 Kurventheorie des galileischen Raumes G_3	48
§ 11 Begleitbewegung einer Raumkurve des galileischen Raumes	58
§ 12 Bertrand'sche Kurvenpaare	66
§ 13 Evolventen und Evoluten	69

§ 14	Regelflächen des galileischen Raumes \mathbb{G}_3 : Vollständige Invariantensysteme	72
§ 15	Zentraltangenten - und Zentralnormalen - flächen der Regelflächen des galileischen Raumes \mathbb{G}_3	92
§ 16	Flächentheorie : Längen - und Winkelmessung	94
§ 17	Ableitungsgleichungen	97
§ 18	Integrierbarkeitsbedingungen	100
§ 19	Normalkrümmung, Krümmungslinien	102
§ 20	Schmieglinien	109
§ 21	Gauss'sche Krümmung von Regelflächen des galileischen Raumes \mathbb{G}_3	111
	Literatur	114

EINLEITUNG

Wird im komplex erweiterten dreidimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ die Auszeichnung einer reellen Ebene ω , einer darin gelegenen reellen Geraden f und eines auf f gelegenen konjugiert komplexen Punktepaars (I, \bar{I}) eine *Absolutfigur* $\{\omega, f, I, \bar{I}\}$ definiert, so entsteht im CAYLEY - KLEIN'schen Sinn ein dreidimensionaler nichteuklidischer Raum, den man als *galileischen Raum* \mathcal{G}_3 bezeichnet (vgl. [22, S. 136]). Die systematische Untersuchung der Geometrie dieses Raumes, der bisher nur wenig Beachtung gefunden hat (vgl. БУХАРАЕВ, П.Г. [18] und А.И. СИПОТА [53]), ist Gegenstand dieser Arbeit.

Diese Raumform ist hierbei in zweifacher Weise als Bindeglied von Räumen mit projektiver Metrik (vgl. [40]) von Interesse :
Erstens als Zwischenstufe beim Übergang von einem *euklidischen Raum* \mathbb{E}_3 - mit ω als Fernebene und einem nullteiligen Kegelschnitt $i_u \subset \omega$ als Maßgebilde - zu einem *zweifach isotropen Raum* $I_3^{(2)}$ (*Flaggenraum*, vgl. H. BRAUNER [13], [14] und [15] sowie H. SACHS [42], [45] und [52]), in dem die Fernebene ω , die Gerade f und ein auf f liegender Punkt F als Absolutgebilde ausgezeichnet sind;
zweitens als Übergangsstufe zwischen einem *quasielliptischen Raum* \mathcal{Q}_3 (vgl. H. STACHEL [54], [55] und [56]) - metrisiert durch zwei konjugiert komplexe, f enthaltende Ebenen ι und $\bar{\iota}$ sowie ein konjugiert komplexes Punktepaar $I, \bar{I} \in f$ als Absolutfigur - und dem oben beschriebenen *Flaggenraum* $I_3^{(2)}$. Wesentlich sind auch die Verknüpfungen der galileischen Geometrie mit der Geometrie eines *einfach isotropen Raumes* $I_3^{(1)}$ (vgl. H. SACHS [52] und K. STRUBECKER [59] - [65]) in dem ω und ein in ω liegendes konjugiert komplexes Geradenpaar als Absolutgebilde dienen; die von der Bewegungsgruppe B_6 des *galileischen Raumes* \mathcal{G}_3 in der Fern -

ebene ω induzierte Metrik ist *euklidisch*, die von der Bewegungsgruppe des einfach isotropen Raumes $I_3^{(1)}$ in ω induzierte Metrik ist *dual - euklidisch* (vgl. [22, S. 137 f.]). Das erhellt die vielseitigen Zusammenhänge der vorliegenden Ergebnisse mit jenen, die sich beim Studium des *euklidischen, des quasielliptischen, des einfach isotropen und des zweifach isotropen Raumes* ergeben haben.

In Abschnitt 1 führen wir grundlegende Definitionen ein und zeichnen eine sechsgliedrige Bewegungsgruppe B_6 aus, die gegenüber den bisher studierten Fundamentalgruppen (vgl. *СУХАРАЕВ* [18] und *А.М. СИПОТА* [53]) große Vorteile bietet; in Abschnitt 2 wird diese Gruppe zur Definition von Abständen und Winkeln genutzt. Kapitel 3 ist der Bestimmung aller eingliedrigen stetigen Untergruppen der Bewegungsgruppe B_6 gewidmet; hier zeigt sich die Mittelstellung dieses Raumtyps zwischen der euklidischen und der zweifach isotropen Geometrie sehr deutlich. In Abschnitt 4 werden Kreise, Punktkugeln und Ebenenkugeln des galileischen Raumes G_3 betrachtet, deren Abstände und Winkel in Kapitel 5 B_6 - invariant erklärt werden. In Abschnitt 6 stellen wir die Möbiustransformationen dar; in Abschnitt 7 die darunter befindlichen winkeltreuen. Kapitel 8 ist der Laguerregeometrie gewidmet; die längentreuen Laguerreabbildungen werden in Abschnitt 9 bestimmt. In Kapitel 10 folgt die Darstellung der elementaren Kurventheorie des galileischen Raumes G_3 , die in den Abschnitten 11 bis 13 zur Untersuchung der Analoga zu bekannten Sätzen der euklidischen Kurventheorie herangezogen wird. Die Abschnitte 14 und 15 sind den Regelflächen des galileischen Raumes G_3 gewidmet; es werden vollständige Invariantensysteme angegeben. In Kapitel 16 folgt eine Einführung in die Flächentheorie des gali-

leischen Raumes \mathbb{G}_3 , die in Abschnitt 17 mit der Herleitung von Ableitungsgleichungen und in Abschnitt 18 mit der Erstellung von Integrierbarkeitsbedingungen fortgesetzt wird. Die Abschnitte 19 und 20 sind der Normalkrümmung und den Krümmungslinien beziehungsweise der Theorie der Schmieglinien gewidmet; in Abschnitt 21 wird abschließend ein galileisches Analogon zur Formel von LAMARLE für die GAUSS'sche Krümmung von Regelflächen angegeben.

An dieser Stelle soll Herrn Prof. Dr. H. SACHS für wertvolle Hinweise und anregende Diskussionen gedankt werden.

§ 1 DIE BEWEGUNGSGRUPPE DES DREIDIMENSIONALEN GALILEISCHEN RAUMES

Werden im reellen dreidimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ - in dem wir die Punkte wie üblich durch reelle homogene Koordinaten $x_0:x_1:x_2:x_3$ ($\neq 0:0:0:0$) beschreiben - eine reelle Ebene ω ($x_0 = 0$) und in ω eine reelle Gerade f ($x_0 = x_1 = 0$) als Absolutfigur einer CAYLEY - KLEINSCHEN Maßbestimmung ausgezeichnet, so bilden alle ω und f einzeln festlassenden Projektivitäten des $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ eine zehngliedrige kontinuierliche Transformationsgruppe ¹⁾

$$F_{10} \begin{cases} x_0' = x_0 \\ x_1' = a \cdot x_0 + \alpha \cdot x_1 \\ x_2' = b \cdot x_0 + c \cdot x_1 + \beta \cdot x_2 + \gamma \cdot x_3 \\ x_3' = d \cdot x_0 + e \cdot x_1 + \delta \cdot x_2 + \epsilon \cdot x_3 \end{cases} \quad (1.1)$$

mit $\alpha \cdot (\beta \cdot \epsilon - \gamma \cdot \delta) \neq 0$ ($a, b, c, d, e, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon \in \mathbb{R}$). F_{10} ist eine Untergruppe der affinen Gruppe des dreidimensionalen affinen Raumes $A_3(\mathbb{R})$ mit der Fernebene ω . Diese Gruppe F_{10} kann im affinen Raum $A_3(\mathbb{R})$ als Fundamentalgruppe eines parabolisch affin axialen Raumes A_3^P aufgefaßt werden und wurde in diesem Zusammenhang bereits von V. CRUCEANU [21] eingehend studiert ²⁾ Jede regulären Projektivitäten der Gruppe F_{10} , die mit der auf der absoluten Geraden f operierenden elliptischen Involution

$$J : (0:0:x_2:x_3) \longrightarrow (0:0:x_3:-x_2) \quad (1.2)$$

kommutieren und deren Einschränkung auf f positive Determinante besitzen, bilden eine achtgliedrige Gruppe

¹⁾ Wir haben es im folgenden stets mit kontinuierlichen Gruppen zu tun und sprechen daher kurz von "Gruppen".

²⁾ Weitere Literatur zu diesem Themenkreis findet sich z. B. in [22].

$$H_8 \begin{cases} x_0' = x_0 \\ x_1' = a \cdot x_0 + \alpha \cdot x_1 \\ x_2' = b \cdot x_0 + c \cdot x_1 + \rho \cdot \cos \varphi \cdot x_2 + \rho \cdot \sin \varphi \cdot x_3 \\ x_3' = d \cdot x_0 + e \cdot x_1 - \rho \cdot \sin \varphi \cdot x_2 + \rho \cdot \cos \varphi \cdot x_3 \end{cases} \quad (1.3)$$

($a, b, c, d, e, \varphi, \rho \in \mathbb{R}$; $\alpha \cdot \rho^2 \neq 0$)³⁾, die wir gemäß [22] Ähnlichkeitsgruppe des galileischen Raumes G_3 mit dem Absolutgebilde $\{\omega, f, J\}$ nennen wollen (vgl. auch [18])⁴⁾.

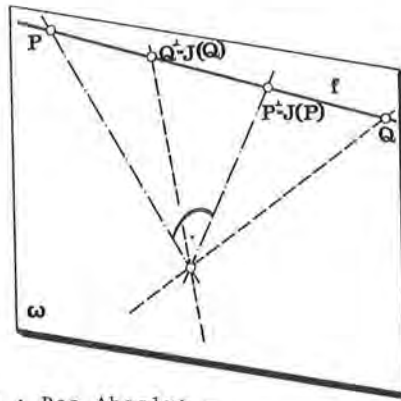


Abbildung 1 : Das Absolutgebilde des galileischen Raumes G_3

In der Fernebene ω induziert H_8 die viergliedrige Gruppe

$$A_4 \begin{cases} x_1' = \alpha \cdot x_1 \\ x_2' = c \cdot x_1 + \rho \cdot \cos \varphi \cdot x_2 + \rho \cdot \sin \varphi \cdot x_3 \\ x_3' = e \cdot x_1 - \rho \cdot \sin \varphi \cdot x_2 + \rho \cdot \cos \varphi \cdot x_3 \end{cases} \quad (1.4)$$

($\alpha \cdot \rho^2 \neq 0$), bei der noch $\alpha = 1$ normiert werden kann. A_4 ist die viergliedrige Gruppe der ebenen euklidischen Ähnlichkeiten, wenn in ω die absolute Gerade f als Ferngerade und die elliptische Involution J als Rechtwinkelinvolution angesehen werden. Jene sechsgliedrige Untergruppe B_6 der unimodularen Affinitäten des $A_3(\mathbb{R})$ und der Ähnlichkeitsgruppe H_8 des galileischen Raumes,

³⁾ In [18] nennt P.Γ. ΒΥΧΑΡΑΕΒ die Gruppe H_8 Fundamentalgruppe eines Raumes mit entarteter euklidischer Maßbestimmung.

⁴⁾ Wird auf f ein Punkt F als absoluter Punkt ausgezeichnet, so entsteht die Ähnlichkeitsgruppe des Flaggenraumes $I_3^{(2)}$ (vgl. [13] und [52]).

die in der Fernebene ω gemäß (1.4) die Gruppe der ebenen euklidischen Bewegungen ($\rho = 1$) induziert ⁵⁾, soll im folgenden Bewegungsgruppe des galileischen Raumes G_3 genannt werden ; B_6 kann durch

$$B_6 \begin{cases} x_0' = x_0 \\ x_1' = a \cdot x_0 + x_1 \\ x_2' = b \cdot x_0 + c \cdot x_1 + x_2 \cdot \cos \varphi + x_3 \cdot \sin \varphi \\ x_3' = d \cdot x_0 + e \cdot x_1 - x_2 \cdot \sin \varphi + x_3 \cdot \cos \varphi \end{cases} \quad (1.5)$$

beschrieben werden und besitzt nach Fortsetzung von ω auf den affinen Raum $A_3(\mathbb{R})$ in affinen Koordinaten

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 1 : x : y : z \quad (x_0 \neq 0) \quad (1.6)$$

die Darstellung

$$B_6 \begin{cases} x' = a + x \\ y' = b + c \cdot x + y \cdot \cos \varphi + z \cdot \sin \varphi \\ z' = d + e \cdot x - y \cdot \sin \varphi + z \cdot \cos \varphi \end{cases} \quad (1.7)$$

Alle eigentlichen, f enthaltenden Ebenen π ($x = k = \text{konst.}$, $k \in \mathbb{R}$) werden von der fünfgliedrigen Untergruppe U_5 der Bewegungsgruppe B_6 mit $a = 0$ auf sich abgebildet. U_5 induziert in diesen Ebenen π eine Abbildung

$$\begin{cases} x' = k \\ y' = b + c \cdot k + y \cdot \cos \varphi + z \cdot \sin \varphi \\ z' = d + e \cdot k - y \cdot \sin \varphi + z \cdot \cos \varphi \end{cases} \quad (1.8)$$

die als ebene euklidische Bewegung in π angesehen werden kann,

⁵⁾

A. СИРОМА betrachtet in [53] jene siebengliedrige Untergruppe der Ähnlichkeitsgruppe H_3 , die gleichzeitig Untergruppe der unimodularen Affinitäten ist, als Fundamentalgruppe eines dreidimensionalen Raumes mit entarteter euklidischer Maßbestimmung. Diese siebengliedrige Gruppe umfaßt unsere Bewegungsgruppe B_6 .

wenn in πJ als Rechtwinkelinvolution definiert wird. Eine f nicht enthaltende Ebene ι kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit durch

$$z = A \quad (A = \text{konst.} \in \mathbb{R}) \quad (1.9)$$

beschrieben werden. Die Bewegungen aus der Gruppe B_6 mit $d = e = \varphi = 0$ induzieren in ι eine dreigliedrige Transformationsgruppe

$$B_3 \left\{ \begin{array}{l} x' = a + x \\ y' = b + c \cdot x + y \\ z' = z, \end{array} \right. \quad (1.10)$$

die als *ebene isotrope Bewegungsgruppe* von ι aufgefaßt werden kann, wenn die Ferngerade von ι und der darauf befindliche Schnittpunkt $F(\iota)$ von f mit ι als *Absolutgebilde* in ι betrachtet werden (vgl. K. STRUBECKER [66]). Die f nicht enthaltenden Ebenen des galileischen Raumes G_3 werden wir daher im folgenden *isotrop* nennen. Im G_3 existieren damit drei Klassen von Ebenen, auf denen die Bewegungsgruppe B_6 jeweils transitiv operiert. Damit haben wir den

SATZ 1.1: *Im galileischen Raum G_3 existieren hinsichtlich der Bewegungsgruppe B_6 drei Klassen von Ebenen: Die Fernebene ω , die euklidischen Ebenen und die isotropen Ebenen. Die von der Bewegungsgruppe B_6 in den Ebenen dieser Klassen induzierte Geometrie ist in den beiden ersten Klassen euklidisch, in der letzten isotrop.*

An dieser Stelle ist zu erwähnen, daß G. WEISS in [71, S. 363 f.] untersucht hat, welche Transformationen die galileischen Bewegungen der Gruppe B_6 auf der Geradenmenge des $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$

bewirken. Diese Transformationen überträgt G. WEISS mit Hilfe der erweiterten KLEINSchen Abbildung auf die *KLEINSche Hyperquadrik* eines komplex erweiterten fünfdimensionalen projektiven Raumes $\mathbb{P}_5(\mathbb{C})$; der galileische Raum \mathbb{G}_3 wird dort *semieuklidisch* genannt.

§ 2 ABSTANDS - UND WINKELMESSUNG IM GALILEISCHEN RAUM G_3

Bezüglich der Bewegungsgruppe B_6 existieren im galileischen Raum G_3 drei Klassen von Punkten, auf denen B_6 transitiv operiert. Es sind dies die Klassen der *eigentlichen Punkte*, der *nichtabsoluten Fernpunkte* in $\omega \setminus f$ und der *absoluten Fernpunkte* auf f . Nach kurzer Rechnung erkennt man, daß die folgenden Abstandsdefinitionen B_6 -invariant erklärt sind :

(A) Abstand zweier eigentlicher Punkte $P_i(x_i, y_i, z_i)$ ($i=1,2$; $P_1 \neq P_2$)

$$\left\{ \begin{array}{l} d(P_1, P_2) = x_2 - x_1 \quad \text{für } x_1 \neq x_2 \quad \text{und} \\ d^*(P_1, P_2) = +\sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad \text{für } x_1 = x_2. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

(B) Abstand zweier nichtabsoluter Fernpunkte $P_i(0:1:y_i:z_i)$ ($i = 1,2$)

$$\Delta(P_1, P_2) = +\sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad .6) \quad (2.2)$$

(C) Abstand zweier absoluter Fernpunkte $P_i(0:0:\cos \varphi_i:\sin \varphi_i)$ ($i = 1,2$)

$$\Delta^*(P_1, P_2) = |\varphi_2 - \varphi_1| \pmod{\pi} \quad 0 \leq \Delta^*(P_1, P_2) < \pi. \quad (2.3)$$

Für zwei Ebenen derselben Klasse (vgl. Abschnitt 1) können folgende Winkeldefinitionen B_6 -invariant erklärt werden :

(A) Winkel zweier isotroper Ebenen ε_i , die durch

$$A_i \cdot x + B_i \cdot y + C_i \cdot z + D_i = 0 \quad (B_i^2 + C_i^2 \neq 0) \quad (2.4)$$

⁶⁾ Die in (A) und (B) definierten Abstände sind genau die Abstände von P_1 und P_2 im Sinne der von B_6 in allen P_1 und P_2 enthaltenden Ebenen induzierten Metrik (vgl. Abschnitt 1).

beschrieben werden ($A_i, B_i, C_i, D_i \in \mathbb{R}; i = 1, 2$):

$$\angle(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \arccos \left| \frac{B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{(B_1^2 + C_1^2) \cdot (B_2^2 + C_2^2)}} \right| \pmod{\pi} \quad (2.5)$$

für $B_1:C_1 \neq B_2:C_2$ und, da bei $B_1:C_1 = B_2:C_2$ durch Normierung $B_1 = B_2$ und $C_1 = C_2$ erreicht werden kann,

$$\angle_e(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{A_2 - A_1}{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}}, \quad \text{für } B_1 = B_2, C_1 = C_2. \quad (2.6)$$

(B) Winkel zweier euklidischer Ebenen ε_i ($x = A_i = \text{konst.} \in \mathbb{R}; i = 1, 2$)

$$\angle^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = A_2 - A_1. \quad (2.7)$$

Die Geraden des galileischen Raumes fallen in vier B_6 - invariante Klassen : *Nichtisotrope Geraden* (sie treffen f nicht), *isotrope Geraden* (sie treffen f), *nichtisotrope Ferngeraden* und die *absolute Gerade* f .

Als Winkel können dann zwischen zwei nichtparallelen Geraden derselben Klasse die folgenden Definitionen B_6 - invariant erklärt werden :

(A) Winkel zweier nichtisotroper Geraden g_i ($i = 1, 2$) mit den Fernpunkten G_i :

$$\angle(g_1, g_2) = \Delta(G_1, G_2). \quad (2.8)$$

(B) Winkel zweier isotroper Geraden h_i ($i = 1, 2$) mit den Fernpunkten H_i :

⁷⁾ (2.5) ist genau der euklidische Winkel der Ferngeraden von ε_1 und ε_2 im Sinne der in ω induzierten Geometrie; (2.6) ist der euklidische Abstand der parallelen Ferngeraden in ω .

⁸⁾ Diese Winkel entsprechen genau den euklidischen Abständen der Fernpunkte der Geraden.

$$\alpha_e(h_1, h_2) = \Delta^*(H_1, H_2). \quad (2.9)$$

(C) Winkel zweier nichtisotroper Ferngeraden f_i , deren Schnittpunkte mit f als F_i ($i = 1, 2$) bezeichnet werden :

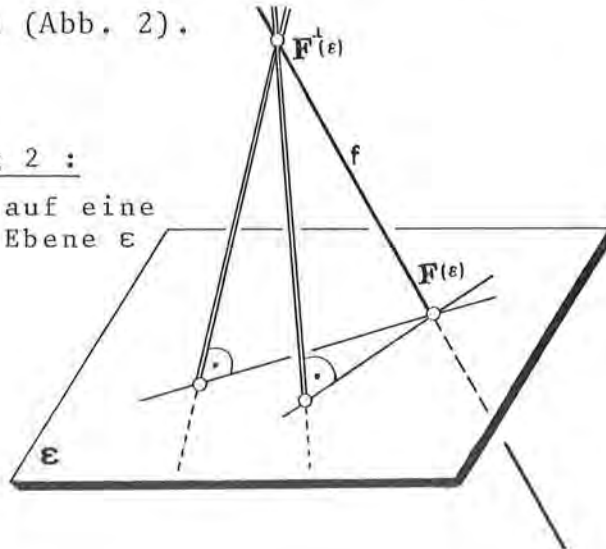
$$\alpha^*(f_1, f_2) = \Delta^*(F_1, F_2). \quad (2.10)$$

Im folgenden werden wir den Schnittpunkt einer isotropen Ebene ε mit der absoluten Geraden f als *absoluten Pol* $F(\varepsilon)$ der Ebene ε bezeichnen. Zu $F(\varepsilon)$ existiert dann auf f ein eindeutiger *orthogonaler Punkt* $F^\perp(\varepsilon)$, für den

$$\Delta^*(F(\varepsilon), F^\perp(\varepsilon)) = \frac{\pi}{2} \quad (2.11)$$

gilt; $F(\varepsilon)$ und $F^\perp(\varepsilon)$ entsprechen sich in der Involution J . Alle isotropen Geraden durch den Punkt $F^\perp(\varepsilon)$ sollen *Ebenennormalen* der Ebene ε heißen (Abb. 2).

Abbildung 2 :
Normalen auf eine
isotrope Ebene ε



Analog läßt sich ein *Gemeinlot* zweier windschiefer nichtisotroper Geraden g_i ($i = 1, 2$) mit den Fernpunkten G_i definieren : Es ist dies genau jene isotrope Treffgerade von g_1 und g_2 , die den zu einer Parallelebene von g_1 und g_2 orthogonalen Fernpunkt auf f als Fernpunkt besitzt.

Wir notieren zusammenfassend den

SATZ 2.1: Bezüglich der Bewegungsgruppe B_6 lassen sich im galileischen Raum G_3 Abstände von Punkten ((2.1) - (2.3)), Winkel zwischen Ebenen ((2.4) - (2.7)) und Winkel zwischen Geraden ((2.8) - (2.10)) invariant definieren.

§ 3 DIE EINGLIEDRIGEN BEWEGUNGSGRUPPEN DES GALILEISCHEN RAUMES

Die Bewegungsgruppe B_6 des galileischen Raumes G_3 besitzt sechs unabhängige infinitesimale Transformationen (vgl. [67, S. 53 f.])

$$\begin{cases} X_1 = \frac{d}{dx} , & X_2 = \frac{d}{dy} , & X_3 = x \cdot \frac{d}{dy} , & X_4 = \frac{d}{dz} , \\ X_5 = x \cdot \frac{d}{dz} & \text{und} & X_6 = z \cdot \frac{d}{dy} - y \cdot \frac{d}{dz} \end{cases} \quad (3.1)$$

mit den POISSON'schen Klammern

$$(X_k, X_l) = X_k X_l - X_l X_k , \quad (3.2)$$

die in der folgenden Tabelle ausgewertet sind :

	(X_1)	(X_2)	(X_3)	(X_4)	(X_5)	(X_6)
$(X_1,$	0	0	X_2	0	X_4	0
$(X_2,$	0	0	0	0	0	$- X_4$
$(X_3,$	$- X_2$	0	0	0	0	$- X_5$
$(X_4,$	0	0	0	0	0	X_2
$(X_5,$	$- X_4$	0	0	0	0	X_3
$(X_6,$	0	X_4	X_5	$- X_2$	$- X_3$	0

Besondere Bedeutung kommt innerhalb der Bewegungsgruppe B_6 der fünfgliedrigen Untergruppe C_5 zu, die von

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \text{ und } X_5 \quad (3.4)$$

aufgespannt wird. C_5 ist in (1.7) durch $\varphi = 0$ gekennzeichnet und läßt sich als Durchschnitt der Bewegungsgruppe B_6 und der Bewegungsgruppe $\mathcal{B}_6^{(2)}$ des Flaggenraumes $I_3^{(2)}$ erzeugen ($c_6 = 0$ in (8) [13, S.120]), wobei das Absolutgebilde des $I_3^{(2)}$ aus ω ,

f und dem auf f gelegenen Punkt (0:0:0:1) besteht (vgl. [13] und [52]).

Um einen Einblick in die Struktur der von C_5 und X_6 aufgespannten Bewegungsgruppe B_6 zu erhalten, bestimmen wir im folgenden die *eingliedrigen stetigen Bewegungsgruppen* des *gali-leischen Raumes* G_3 mit den Symbolen

$$\sum_{i=1}^6 b_i \cdot X_i \quad (b_i \in \mathbb{R}). \quad (3.5)$$

Ihre *Bahnkurven* sind die Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = b_1 \\ \frac{dy}{dt} = b_2 + x \cdot b_3 + z \cdot b_6 \\ \frac{dz}{dt} = b_4 + x \cdot b_5 - y \cdot b_6, \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty) \quad (3.6)$$

für die wir *im Fall* $b_6 \neq 0$

$$\begin{cases} x(t) = b_1 \cdot t + x_0 \\ y(t) = \frac{1}{b_6} \cdot \left\{ b_4 + b_1 \cdot b_5 \cdot t + \frac{b_1 \cdot b_3}{b_6} + b_5 \cdot x_0 - \right. \\ \quad \left. - [b_4 + \frac{b_1 \cdot b_3}{b_6} + b_5 \cdot x_0 - b_6 \cdot y_0] \cdot \cos b_6 \cdot t + \right. \\ \quad \left. + [b_2 - \frac{b_1 \cdot b_5}{b_6} + b_3 \cdot x_0 + b_6 \cdot x_0] \cdot \sin b_6 \cdot t \right\} \\ z(t) = \frac{1}{b_6} \cdot \left\{ \frac{b_1 \cdot b_5}{b_6} - b_2 - b_1 \cdot b_3 \cdot t - b_3 \cdot x_0 + \right. \\ \quad \left. + [b_4 + \frac{b_1 \cdot b_3}{b_6} + b_5 \cdot x_0 - b_6 \cdot y_0] \cdot \sin b_6 \cdot t + \right. \\ \quad \left. + [b_2 - \frac{b_1 \cdot b_5}{b_6} + b_3 \cdot x_0 + b_6 \cdot z_0] \cdot \cos b_6 \cdot t \right\} \end{cases} \quad (3.7)$$

und *im Fall* $b_6 = 0$

$$\begin{cases} x(t) = b_1 \cdot t + x_0 \\ y(t) = (b_2 + b_3 \cdot x_0) \cdot t + \frac{t^2}{2} \cdot b_1 \cdot b_3 + y_0 \\ z(t) = (b_4 + b_5 \cdot x_0) \cdot t + \frac{t^2}{2} \cdot b_1 \cdot b_5 + z_0 \end{cases} \quad (3.8)$$

gewinnen (x_0, y_0 und z_0 sind dabei die Koordinaten des Ausgangspunktes). (3.8) stellt die einparametrischen stetigen Bewegungsgruppen der Gruppe C_5 dar; ihre Bahnkurven sind im allgemeinen Kegelschnitte oder Geraden.

Die zu X_6 gehörende einparametrische Bewegungsgruppe ist eine euklidische Drehung in den euklidischen Ebenen ($x = \text{konst.} \in \mathbb{R}$) des galileischen Raumes G_3 ; sie führt mit $t = \frac{\pi}{2}$ (Drehung um 90°) die zu X_2 beziehungsweise X_3 gehörenden einparametrischen Bewegungsgruppen in die zu X_4 beziehungsweise X_5 gehörenden über (und umgekehrt); X_2 und X_4 beziehungsweise X_3 und X_5 erzeugen daher jeweils B_6 - äquivalente einparametrische Bewegungsgruppen.

Im folgenden beschreiben wir die einzelnen Typen eingliedriger Bewegungsgruppen des galileischen Raumes G_3 durch Normalformen und kennzeichnen sie geometrisch :

(A) EINGLIEDRIGE STETIGE BEWEGUNGSGRUPPEN IN DER GRUPPE C_5 ⁹⁾

HAUPTTYP I: $b_6 = 0, b_1 \neq 0$

(I.1) $(b_3, b_5) \neq (0, 0)$: *Isotrope Drehungen*. Die Bahnkurven der eigentlichen Punkte sind *isotrope Kreise* in zueinander parallelen *isotropen Ebenen*. Als Normalform gegenüber der Bewegungsgruppe B_6 kann die zu

$$b_1 \cdot X_1 + X_3 \tag{3.9}$$

⁹⁾ Diese Typen sind bereits von H. BRAUNER in [13, S.126] im Hinblick auf die Gruppe $\mathcal{B}_6^{(2)}$ der Bewegungen des Flaggenraumes ausführlich untersucht worden; hier folgen daher nur kurze Charakterisierungen bzw. Beschreibungen durch B_6 - Normalformen.

gehörende einparametrische Bewegungsgruppe angesehen werden. Das *Fixebenenbüschel* wird hier durch $z = \text{konst.}$ beschrieben. Die in diesen isotropen Ebenen gelegenen Bahnkreise besitzen den *isotropen Radius* b_1 (vgl. K.STRUBECKER [66,S. 346]). In der Fernebene ω bewirkt (3.9) eine *Schiebung* im Sinne der von B_6 in ω induzierten euklidischen Metrik; Schiebrichtung ist die Richtung zum absoluten Pol der Fixebenen $((0:0:1:0))$.

(I.2) $b_3 = b_5 = 0$: *Nichtisotrope Schiebungen*. Als Normalform gegenüber der Bewegungsgruppe B_6 kann die zu

$$X_1 \tag{3.10}$$

gehörende eingliedrige stetige Bewegungsgruppe angesehen werden. Es liegen Schiebungen auf *nichtisotropen parallelen Geraden* vor; die Punkte der Fernebene ω sind *Fixpunkte*.

HAUPTTYP II: $b_6 = 0, b_1 = 0$

(II.1) $b_2 \neq 0, (b_3, b_5) \neq (0,0)$: *Euklidische Cliffordschiebungen*¹⁰⁾

Die Bahnkurven sind *isotrope Geraden* in einem *parabolischen Netz* mit der *Brennlinie* f . Durch eine Bewegung aus der Gruppe B_6 erhalten wir die zu

$$X_2 + b_5 \cdot X_5 \tag{3.11}$$

gehörende eingliedrige stetige Bewegungsgruppe als Normalform.

(II.2) $b_2 = 0, (b_3, b_5) \neq (0,0)$: *Euklidische Scherungen*.

Die Bahnkurven sind *Geraden eines Bündels* mit einem absoluten Fernpunkt F_u als Träger, der bei der zu

¹⁰⁾ Euklidisch werden wir im folgenden jene eingliedrigen Bewegungsgruppen nennen, deren Bahnkurven in euklidischen Ebenen des galileischen Raumes G_3 liegen.

$$X_5 \tag{3.12}$$

gehörenden B_6 - Normalform dieser eingliedrigen stetigen Bewegungsgruppen zu $(0:0:0:1)$ wird. Die Fixpunktebene ist die euklidische Ebene $x = 0$. In der Fernebene ω liegt eine Schiebung in Richtung von F_u vor.

(II.3) $(b_2, b_4) \neq (0,0)$, $b_3 = b_5 = 0$: Euklidische Schiebungen. Die Bahngeraden sind zueinander parallele *isotrope Geraden*, die für die B_6 - Normalform der zu

$$X_2 \tag{3.13}$$

gehörenden eingliedrigen stetigen Bewegungsgruppe den absoluten Fernpunkt $(0:0:1:0)$ enthalten; die Punkte der Fernebene ω sind Fixpunkte.

Als Zusammenfassung haben wir damit den

SATZ 3.1: Die eingliedrigen stetigen Bewegungsgruppen der Untergruppe C_5 der Bewegungen des galileischen Raumes G_3 lassen sich gegenüber der Bewegungsgruppe B_6 des galileischen Raumes G_3 in fünf Typen einteilen, wobei diese durch die infinitesimalen Transformationen $(b_1 \cdot X_1 + X_3)$, X_1 , $(X_2 + b_5 \cdot X_5)$, X_5 und X_2 beschrieben werden ($b_1, b_5 \in \mathbb{R} - \{0\}$).

(B) DIE NICHT IN C_5 GELEGENEN EINGLIEDRIGEN STETIGEN BEWEGUNGS-
GRUPPEN DER GRUPPE B_6

HAUPTTYP III: $b_6 \neq 0$

b_6 kann nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit zu 1 normiert werden. Durch die Bewegung

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = b_1 \cdot b_3 + b_4 + b_5 \cdot x - y \\ z' = b_1 \cdot b_5 - b_2 - b_3 \cdot x - z \end{cases} \quad (3.14)$$

aus der Bewegungsgruppe B_6 erhalten wir als Normalform dieser eingliedrigen stetigen Untergruppen mit (3.5) die zur infinitesimalen Transformation

$$b_1 \cdot X_1 + X_6 \quad (b_1 \in \mathbb{R}) \quad (3.15)$$

gehörende eingliedrige Bewegungsgruppe. Ihre Bahnkurven besitzen die Darstellung

$$\begin{cases} x(t) = b_1 \cdot t + x_0 \\ y(t) = y_0 \cdot \cos t + z_0 \cdot \sin t \\ z(t) = -y_0 \cdot \sin t + z_0 \cdot \cos t \end{cases} \quad (3.16)$$

Die Punkte der Fernebene ω erfahren bei diesen eingliedrigen Bewegungsgruppen *Drehungen im Sinne der in ω induzierten euklidischen Geometrie*; Drehzentrum ist für diese Normalform der Punkt $(1:0:0:0)$.

(III.1) $b_1 \neq 0$: Schraubungen des galileischen Raumes G_3 .

Die Bahnkurven sind Schraublinien einer geeigneten Schraubung in einem dreidimensionalen euklidischen Raum E_3 , der ω als Fernebene besitzt und in der komplexen Erweiterung f und den Punkt A_u $(0:1:0:0)$ als polare Elemente bezüglich des absoluten Kegelschnitts i_u besitzt; i_u hat dabei auf f die elliptische Involution J (1.2) als Rechtwinkelinvolution zu induzieren.¹¹⁾ b_1 soll als Schraubparameter und die Fixgerade $y=z=0$

¹¹⁾ Zu jeder Schraubung des galileischen Raumes G_3 existiert damit eine einparametrische Schar euklidischer Räume E_3 , in denen die gegebene G_3 -Schraubung auch als Schraubung im Sinne der euklidischen Geometrie aufgefaßt werden kann. Analoges läßt sich auch für den folgenden Typ (III.2) zeigen.

als Schraubachse bezeichnet werden; b_1 ist eine B_6 - Invariante dieser eingliedrigen Bewegungsgruppen.

(III.2) $b_1 = 0$: Euklidische Drehungen. Die Bahnkurven sind Kreise in den euklidischen Ebenen des galileischen Raumes G_3 , deren Mittelpunkte auf der nichtisotropen Fixpunktgeraden a ($y = z = 0$) liegen, die wir im folgenden Drehachse nennen wollen.¹²⁾

SATZ 3.2: In der Gruppe der Bewegungen des galileischen Raumes G_3 existieren gegenüber B_6 zwei verschiedene Klassen von eingliedrigen stetigen Bewegungsgruppen, die nicht in der Untergruppe C_5 enthalten sind. Es sind dies die in der Normalform zu den infinitesimalen Transformationen $(b_1 \cdot X_1 + X_6)$ und X_6 gehörenden eingliedrigen Untergruppen der Gruppe B_6 , die wir als Schraubungen beziehungsweise euklidische Drehungen des galileischen Raumes G_3 bezeichnen.

Wir fassen zusammen im

SATZ 3.3: In der Gruppe B_6 der Bewegungen des galileischen Raumes G_3 ist jede stetige eingliedrige Untergruppe innerhalb B_6 zu einer der von den infinitesimalen Transformationen (I.1): $b_1 \cdot X_1 + X_3$, (I.2): X_1 , (II.1): $X_2 + b_5 \cdot X_5$, (II.2): X_5 , (II.3): X_2 , (III.1): $b_1 \cdot X_1 + X_6$, (III.2): X_6 erzeugten eingliedrigen stetigen Bewegungsgruppen äquivalent, wobei keine der angeführten Typen überzählig ist; alle auftretenden Parameter sind hierbei reell und von Null verschieden.

¹²⁾ Als Mittelpunkt eines Kreises k in einer euklidischen Ebene werden wir den Pol der Ferngeraden f bezüglich k definieren; B_6 induziert ja in den euklidischen Ebenen eine euklidische Metrik, in deren Sinn der Begriff Kreis zu verstehen ist.

§ 4 KREISE UND KUGELN DES GALILEISCHEN RAUMES G_3

In jeder Ebene ϵ des galileischen Raumes G_3 wird von der Bewegungsgruppe B_6 eine dreigliedrige Transformationsgruppe induziert, die als ebene Bewegungsgruppe der Ebene ϵ gedeutet werden kann (vgl. Abschnitt 1). Bezüglich dieser Bewegungsgruppen in den Ebenen des galileischen Raumes G_3 gibt es nun Kreise, die wir als *Kreise des galileischen Raumes G_3* auffassen können. Gemäß den *drei Typen von Ebenen* gibt es damit *drei B_6 -invariante Klassen von Kreisen* im G_3 :

(A) *ISOTROPE KREISE*: Es sind dies Parabeln in isotropen Ebenen ϵ , deren Frenpunkt in den absoluten Pol der isotropen Träger ebene ϵ fällt. Als Normalform kann der durch

$$z = 0, y = \frac{x^2}{2 \cdot A} \quad (A \in \mathbb{R} - \{0\}) \quad (4.1)$$

beschriebene Kreis dienen; die Invariante A bezeichnen wir als *Radius* (vgl. K.STRUBECKER [66, S. 346]).

(B) *EUKLIDISCHE KREISE* : Es sind dies Kreise in euklidischen Ebenen π im Sinne der von der Gruppe B_6 in π induzierten euklidischen Metrik. Als Normalform gegenüber der Bewegungsgruppe B_6 kann

$$x = 0, y^2 + z^2 = R^2 \quad (R \in \mathbb{R} - \{0\}) \quad (4.2)$$

dienen; die Invariante R bezeichnen wir als *Radius*.

(C) *FERNKREISE*: Es sind dies Kreise in der Fernebene ω im Sinne der von B_6 in ω induzierten euklidischen Metrik, deren Normalform gegenüber der Gruppe B_6 durch

$$x_0 = 0, x_2^2 + x_3^2 = R^2 \cdot x_1^2 \quad (R \in \mathbb{R} - \{0\}) \quad (4.3)$$

beschrieben werden kann.

Als *Punktkugeln* des galileischen Raumes \mathbb{G}_3 bezeichnen wir jene parabolischen Zylinder, die die Fernebene ω längs der absoluten Geraden f berühren. Sie lassen sich durch

$$A \cdot x^2 + B \cdot x - 2 \cdot C \cdot y - 2 \cdot D \cdot z + E = 0 \quad (4.4)$$

($A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$, $C^2 + D^2 \neq 0$) beschreiben. Die Spitze dieses Zylinders liegt im absoluten Fernpunkt $S_u(0:0:D:-C)$, der im folgenden *Spitze der Kugel* heißen soll. Diese Punktkugeln werden von der Fundamentalgruppe F_{10} des parabolisch affin - axialen Raumes \mathbb{A}_3^P und natürlich auch von der Ähnlichkeitsgruppe H_8 untereinander vertauscht. Sie bilden daher im galileischen Raum \mathbb{G}_3 gegenüber der Gruppe H_8 eine einzige Klasse.¹³⁾

Eine Transformation der Gruppe F_{10} bringt die Kugeldarstellung (4.4) auf die Gestalt

$$\begin{aligned} & A \cdot \alpha^2 \cdot x^2 + x \cdot (2 \cdot A \cdot a \cdot \alpha + B \cdot \alpha - 2 \cdot C \cdot c - 2 \cdot D \cdot e) - \\ & - 2 \cdot y \cdot (C \cdot \beta + D \cdot \delta) - 2 \cdot z \cdot (C \cdot \gamma + D \cdot \epsilon) + (A \cdot a^2 + \\ & + B \cdot a - 2 \cdot C \cdot b - 2 \cdot D \cdot d + E) = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Die in H_8 enthaltene Ähnlichkeit mit den Lösungen von

$$\begin{cases} 2 \cdot A \cdot a \cdot \alpha + B \cdot \alpha - 2 \cdot C \cdot c - 2 \cdot D \cdot e = 0 \\ A \cdot a^2 + B \cdot a - 2 \cdot C \cdot b - 2 \cdot D \cdot d + E = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

und

¹³⁾ Dies ist im ebenfalls im \mathbb{A}_3^P enthaltenen Flaggenraum $I_3^{(2)}$ nicht der Fall : Die dort existierenden Klassen von Punktkugeln sind hier H_8 - äquivalent (vgl. H.BRAUNER [13] und H.SACHS [52]).

$$\begin{cases} \alpha^2 = \frac{\rho^2}{A} , C = \gamma = -\delta = \rho \cdot \sin \varphi , \\ D = \beta = \epsilon = \rho \cdot \cos \varphi \end{cases} \quad (4.7)$$

als Koeffizienten transformiert (4.4) auf die H_8 - Normalform

$$x^2 = 2 \cdot z. \quad (4.8)$$

Um eine Normalform der Punktkugel (4.4) bezüglich der Bewegungsgruppe B_6 zu gewinnen, definieren wir

$$C^2 + D^2 = r^2 \quad (4.9)$$

und können dann

$$C = -r \cdot \cos \chi \quad \text{sowie} \quad D = r \cdot \sin \chi \quad (\chi \in \mathbb{R}) \quad (4.10)$$

setzen. Mit $\varphi = \chi - \frac{\pi}{2}$ und $\alpha = \rho = 1$ sowie den Lösungen von (4.6) als Parametern einer Bewegung aus der Gruppe B_6 entsteht dann

$$A \cdot x^2 = 2 \cdot r \cdot z \quad (4.11)$$

als Normalform einer Punktkugel gegenüber der Bewegungsgruppe B_6 . Die B_6 - Invariante

$$R = \frac{r}{A} = \frac{+\sqrt{C^2 + D^2}}{A} \quad (4.12)$$

werden wir als *Radius* der Punktkugel (4.4) ansprechen. Alle Punktkugeln mit demselben Radius können damit durch eine Bewegung aus der Gruppe B_6 ineinander übergeführt werden. Damit gilt der

SATZ 4.1: *Im galileischen Raum G_3 und im parabolisch affinalen Raum A_3^p existiert je eine vierparametrische Schar von Punktkugeln, die im Sinne der Ähnlichkeitsgeometrie des gali-*

leischen Raumes G_3 alle äquivalent sind und im Sinne der Bewegungen des galileischen Raumes G_3 als einzige Invariante den Radius R (4.12) besitzen.

Die Punktkugel (4.11) gestattet genau die dreigliedrige Bewegungsgruppe mit den infinitesimalen Transformationen

$$R \cdot X_1 + X_5, X_2, X_3 \quad (4.13)$$

(vgl. [13, S. 134]), woraus folgt :

Satz 4.2: Die Punktkugeln des galileischen Raumes G_3 gestatten genau eine dreigliedrige stetige Bewegungsgruppe.

Dual zu den Punktkugeln existieren im galileischen Raum G_3 Ebenenkugeln, die allerdings innerhalb der Bewegungsgruppe B_6 in zwei Klassen zerfallen:

Beschreiben wir Ebenen des galileischen Raumes G_3 in den üblichen homogenen Ebenenkoordinaten $(u_0 : u_1 : u_2 : u_3) \neq (0 : 0 : 0 : 0)$, so stellt

$$m_4^2 \cdot (u_2^2 + u_3^2) = (u_0 \cdot m_0 + u_1 \cdot m_1 + u_2 \cdot m_2 + u_3 \cdot m_3)^2 \quad (4.14)$$

$((m_0, m_1, m_2, m_3, m_4) \in \mathbb{R}^5; (m_0, m_1) \neq (0, 0); m_4 \neq 0)$ alle Ebenenkugeln des galileischen Raumes G_3 dar. Sie werden von allen Ebenen gebildet, die den Kreis

$$\begin{cases} m_0 \cdot x_1 = m_1 \cdot x_0, & (m_0 \cdot x_2 - m_2 \cdot x_0)^2 + (m_0 \cdot x_3 - m_3 \cdot x_0)^2 = m_4^2 \cdot x_0^2 \\ \text{für } m_0 \neq 0 \text{ und} \\ x_0 = 0, & (m_1 \cdot x_2 - m_2 \cdot x_1)^2 + (m_1 \cdot x_3 - m_3 \cdot x_1)^2 = m_4^2 \cdot x_1^2 \\ \text{für } m_0 = 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

berühren. Diese Kreise sind euklidische Kreise in euklidischen

Ebenen des G_3 ($m_0 \neq 0$) beziehungsweise *Fernkreise* in der Fernebene ω ($m_0 = 0$), deren *Mittelpunkt* M durch $(m_0 : m_1 : m_2 : m_3)$ und deren *Radius* R durch

$$R = \frac{m_4}{m_0} \quad \text{für } m_0 \neq 0 \text{ bzw. } R = \frac{m_4}{m_1} \quad \text{für } m_0 = 0 \quad (4.16)$$

beschrieben wird. Die Ebenenkugeln des galileischen Raumes G_3 bestehen daher aus zwei Klassen, den *Ebenenkugeln im engeren Sinn* (wir werden diese weiterhin Ebenenkugeln nennen) und den *Ebenengrenzkugeln*, die von einem Fernkreis getragen werden. Dies legt es nahe, diese Ebenen(grenz)kugeln mit ihren *Trägerkreisen* zu *identifizieren*, was sich im folgenden als sinnvoll erweisen wird. Die Ebenenkugeln besitzen die B_6 - Normalform

$$x = 0, \quad y^2 + z^2 = m_4^2 \quad (m_0 = 1). \quad (4.17)$$

Sie gestatten eine dreigliedrige stetige Bewegungsgruppe mit den infinitesimalen Transformationen

$$X_3, X_5 \text{ und } X_6. \quad (4.18)$$

Ebenengrenzkugeln können wir die Normalform

$$x_0 = 0, \quad x_2^2 + x_3^2 = m_4^2 \cdot x_1^2 \quad (m_1 = 1) \quad (4.19)$$

zuweisen. Sie gestatten eine viergliedrige stetige Bewegungsgruppe mit den infinitesimalen Transformationen

$$X_1, X_2, X_4 \text{ und } X_6. \quad (4.20)$$

Damit haben wir den

SATZ 4.3: Die Ebenenkugeln des galileischen Raumes G_3 bestehen hinsichtlich der Bewegungsgruppe B_6 aus zwei Klassen, die jeweils von euklidischen Kreisen in euklidischen Ebenen bzw.

Fernkreisen bestimmt werden und damit mit diesen Kreisen identifiziert werden können. Die Ebenenkugeln im engeren Sinn gestatten eine dreigliedrige stetige Bewegungsgruppe, die Ebenengrenzkugeln eine viergliedrige. Radius und Mittelpunkt dieser Ebenenkugeln sind B_6 - Invarianten des galileischen Raumes.¹⁴⁾

¹⁴⁾ Dieses Ergebnis ist als Analogon zu den von H. BRAUNER in [13, S.134 ff.] für den Flaggenraum bewiesenen Aussagen zu betrachten.

§ 5 WINKEL UND ANSTAND VON KUGELN DES GALILEISCHEN RAUMES G_3

Zwei verschiedene Punktkugeln κ_1 und κ_2 , die durch

$$A_i \cdot x^2 + B_i \cdot x - 2 \cdot C_i \cdot y - 2 \cdot D_i \cdot z + E_i = 0 \quad (5.1)$$

($A_i, B_i, C_i, D_i, E_i \in \mathbb{R}$, $A_i \neq 0$; $i = 1, 2$) gegeben sind, schneiden sich nach einem *isotropen Kreis* k , wenn ihre Spitzen verschieden sind. Als *Schnittwinkel* werden wir dann den Abstand ihrer Spitzen, also

$$\alpha(\kappa_1, \kappa_2) = \left| \arctan \frac{C_2}{D_2} - \arctan \frac{C_1}{D_1} \right| \bmod \pi \quad (5.2)$$

bezeichnen, der längs k konstant ist. Im Fall $C_1 : D_1 = C_2 : D_2$ besitzen κ_1 und κ_2 dieselbe Spitze, d.h. der Winkel (5.2) verschwindet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir dann durch Normierung $C_1 = C_2$ und $D_1 = D_2$ erreichen, womit wir hier

$$\alpha^*(\kappa_1, \kappa_2) = + \sqrt{\frac{(B_1 - B_2)^2 - 4 \cdot (A_1 - A_2) \cdot (E_1 - E_2)}{4 \cdot (C_1^2 + D_1^2)}} \quad (5.3)$$

als *Ersatzwinkel* definieren wollen. κ_1 und κ_2 besitzen in diesem Fall im allgemeinen zwei gemeinsame Erzeugenden in den euklidischen Ebenen

$$x_{1,2} = -\frac{B_1 - B_2}{2 \cdot (A_1 - A_2)} \pm \sqrt{\frac{(B_1 - B_2)^2 - 4 \cdot (A_1 - A_2) \cdot (E_1 - E_2)}{4 \cdot (C_1^2 + D_1^2)}}, \quad (5.4)$$

längs denen κ_1 und κ_2 von isotropen Tangentialebenen berührt werden, deren Schnittwinkel (2.6) den Wert (5.3) annimmt.

Der Ersatzwinkel verschwindet genau für berührende Kugeln κ_1 und κ_2 , was neben $C_1 = C_2$ und $D_1 = D_2$ noch

$$(B_1 - B_2)^2 - 4 \cdot (A_1 - A_2) \cdot (E_1 - E_2) = 0 \quad (5.5)$$

nach sich zieht (vgl. H.BRAUNER [13, S. 136] und H.SACHS [52, § 23]).¹⁵⁾

Die beiden Kugeln κ_1 und κ_2 oskulieren sich genau dann, wenn nach der Normierung $C_1 = C_2$ und $D_1 = D_2$ noch

$$A_1 = A_2 \quad (5.6)$$

gilt. *Hyperoskulation* ist durch die zusätzliche Identität

$$B_1 = B_2 \quad (5.7)$$

gekennzeichnet.

Für die *Abstandsdefinition* zweier Ebenenkugeln K_1 und K_2 , die durch

$$(m_4^i)^2 \cdot (u_2^2 + u_3^2) = (u_0 \cdot m_0^i + u_1 \cdot m_1^i + u_2 \cdot m_2^i + u_3 \cdot m_3^i)^2 \quad (5.8)$$

($i=1,2$; $(m_0, m_1, m_2, m_3, m_4) \in \mathbb{R}^5$, $(m_0, m_1) \neq (0,0)$) beschrieben werden, wollen wir K_1 und K_2 mit den Kreisen k_1 und k_2 (vgl. (4.15))

$$\begin{cases} m_0^i \cdot x_1 = m_1^i \cdot x_0, & (m_0^i \cdot x_2 - m_2^i \cdot x_0)^2 + (m_0^i \cdot x_3 - m_3^i \cdot x_0)^2 = (m_4^i)^2 \cdot x_0^2 \\ \text{für } m_0 \neq 0 \text{ und} & (5.9) \\ x_0 = 0, & (m_1^i \cdot x_2 - m_2^i \cdot x_0)^2 + (m_1^i \cdot x_3 - m_3^i \cdot x_1)^2 = (m_4^i)^2 \cdot x_0^2 \\ \text{für } m_0 = 0 & (i = 1,2) \end{cases}$$

identifizieren. Da in den Trägerebenen dieser Kreise von der Bewegungsgruppe B_6 jeweils eine euklidische Geometrie induziert wird, geben wir folgende B_6 -invariante Entfernungsdefinitionen:

(A) Abstand zweier Ebenenkugeln, deren Trägerkreise in derselben Ebene liegen: Es gilt $m_0^1 : m_1^1 = m_0^2 : m_1^2$, womit die Normie-

¹⁵⁾

Berührung und Oskulation bzw. Hyperoskulation von Punktkugeln sind auch im parabolisch affin - axialen Raum A_3^P definiert und müssen daher sowohl im zugehörigen Flaggenraum als auch im galileischen Raum durch gleiche Bedingungen beschrieben werden.

rungen $m_0^1 = m_0^2$ und $m_1^1 = m_1^2$ durchgeführt und die bekannte euklidische Tangentialentfernung

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \frac{1}{(m_0^1)^2} \cdot [(m_2^1 - m_2^2)^2 + (m_3^1 - m_3^2)^2 - (m_4^1 - m_4^2)^2] \\ \text{für } m_0 \neq 0 \text{ bzw.} \end{array} \right. \quad (5.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \frac{1}{(m_1^1)^2} \cdot [(m_2^1 - m_2^2)^2 + (m_3^1 - m_3^2)^2 - (m_4^1 - m_4^2)^2] \\ \text{für } m_0 = 0 \end{array} \right.$$

als Abstand der zugehörigen Ebenenkugeln bzw. Ebenengrenzkugeln definiert werden kann (vgl. W. BLASCHKE [5, S. 140]).

Berührung liegt zwischen zwei Ebenenkugeln bzw. Ebenengrenzkugeln genau dann vor, wenn $t = 0$ wird.

(B) Abstand zweier Ebenenkugeln, deren Trägerkreise nicht in derselben Ebene liegen: Diese Trägerebenen sind durch $m_0^i x_1 = m_1^i \cdot x_0$ gegeben. Der Abstand

$$t^* = \frac{m_1^2}{m_0^2} - \frac{m_1^1}{m_0^1} \quad (5.11)$$

dieser beiden Ebenen kann als Abstand der entsprechenden Ebenenkugeln angesehen werden.

(C) Der Abstand zwischen einer Ebenenkugel im engeren Sinn und einer Ebenengrenzkugel ist nicht definiert.

Als Zusammenfassung gilt somit der

SATZ 5.1: Bezüglich der Bewegungsgruppe B_6 lassen sich im galileischen Raum G_3 Winkel zwischen Punktkugeln ((5.2) und (5.3)) und Abstände von Ebenenkugeln ((5.10) und (5.11)) invariant definieren.

Im folgenden benötigen wir auch den Begriff der *Berührung* zweier Ebenenkugeln K_1 und K_2 (5.8) : K_1 und K_2 berühren sich genau dann, wenn dies für ihre Trägerkreise der Fall ist, was durch $t^* = 0$ in (5.11) und dazu $t = 0$ in (5.10) gekennzeichnet ist.

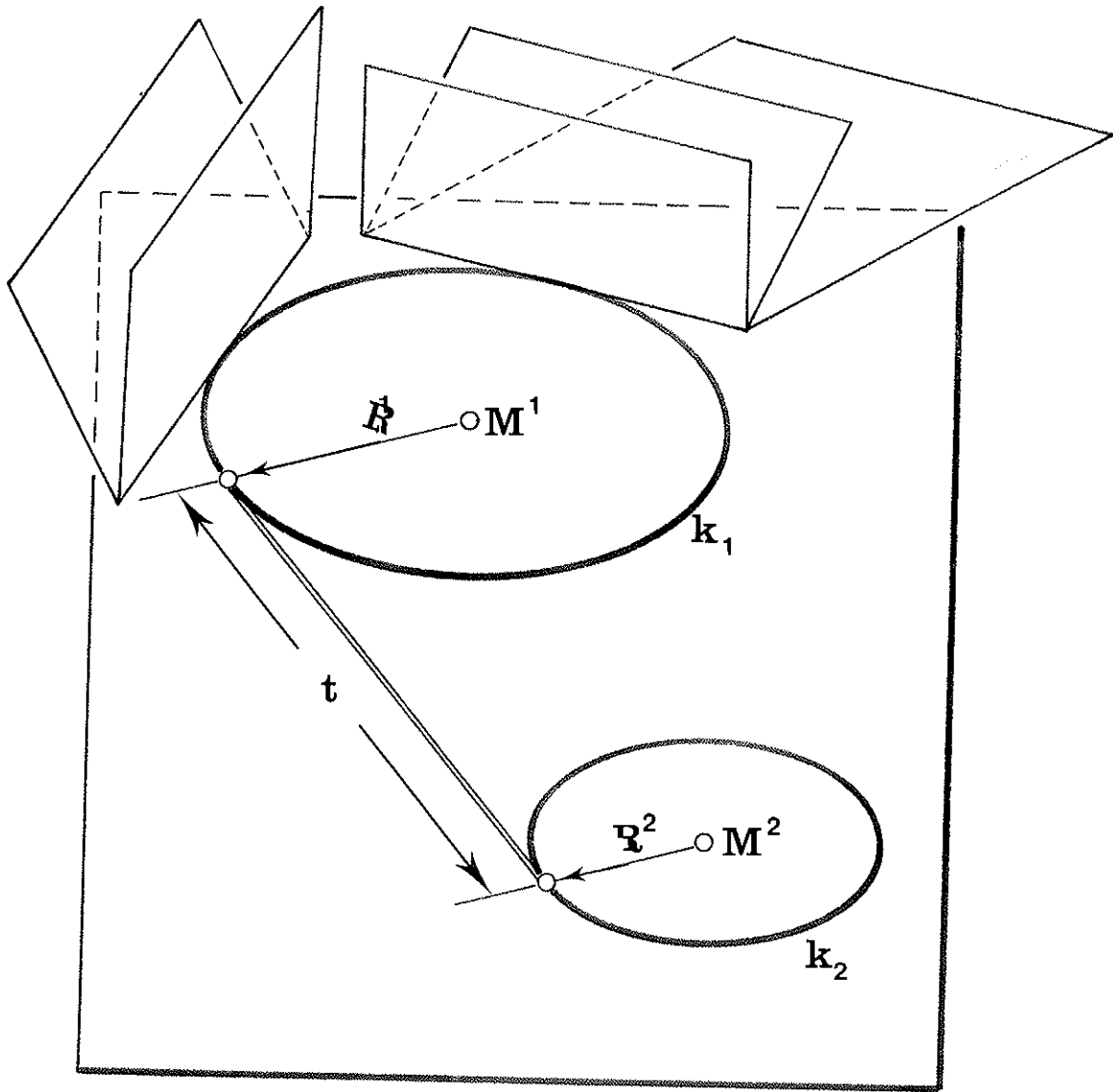


Abbildung 3 : Abstand zweier Ebenenkugeln
gemäß (A)

§ 6 MÖBIUSABBILDUNGEN DES PARABOLISCH AFFIN - AXIALEN RAUMES $\mathbb{A}_3^{\mathbb{P}}$

Die Möbiusabbildungen des galileischen Raumes \mathbb{G}_3 sind identisch mit denen des parabolisch affin - axialen Raumes $\mathbb{A}_3^{\mathbb{P}}$ und diese mit denen des Flaggenraumes $I_3^{(2)}$, wenn die durch $\alpha = \beta = \varepsilon = 1, \gamma = 0$ in (1.1) bestimmte Untergruppe der Fundamentalgruppe F_{10} des parabolisch affin - axialen Raumes $\mathbb{A}_3^{\mathbb{P}}$ als Bewegungsgruppe $\mathcal{B}_6^{(2)}$ des $I_3^{(2)}$ herangezogen wird. Diese Möbiusabbildungen des Flaggenraumes $I_3^{(2)}$ wurden mehrfach untersucht (vgl. H. BRAUNER [13, S. 136 ff.] und H. SACHS [52, § 23]). Da wir die dort gefundenen Ergebnisse aber benötigen, wollen wir hier das Wesentliche kurz bereitstellen :

Wir denken uns den parabolisch affin - axialen Raum $\mathbb{A}_3^{\mathbb{P}}$ in natürlicher Weise als *Hyperebene* $x_4 = 0$ in einen reellen vierdimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ mit den üblichen homogenen Koordinaten $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \in \mathbb{R}^5 - (0 : 0 : 0 : 0 : 0)$ eingebettet, in dem wir die *dreidimensionale Fläche zweiter Ordnung* Γ mit der Gleichung

$$x_1^2 - 2 \cdot x_0 \cdot x_4 = 0 \quad (6.1)$$

als *Maßfläche* auszeichnen. Γ ist vom Rang 3 und besitzt den *eindimensionalen Spitzenraum* f mit den Gleichungen

$$x_0 = x_1 = x_4 = 0 \quad (6.2)$$

und trägt eine Schar *erzeugender Ebenen* mit den Gleichungen

$$x_1 - \lambda \cdot x_0 = 0, \quad \lambda \cdot x_1 - 2 \cdot x_4 = 0 \quad (\lambda \in (-\infty, +\infty)). \quad (6.3)$$

Γ enthält überdies den Punkt $0 (0 : 0 : 0 : 0 : 1)$, mit dessen Hilfe wir durch

$$\begin{aligned} \text{st} : \mathbb{A}_3^P \setminus \omega &\longrightarrow \Gamma \in \mathbb{P}_4(\mathbb{R}) \\ P(1:x:y:z) &\longrightarrow P^{\text{st}}(1:x:y:z:\frac{x^2}{2}) \end{aligned} \quad (6.4)$$

eine stereographische Projektion der eigentlichen Punkte des parabolisch affin - axialen Raumes \mathbb{A}_3^P auf den Kegel Γ erklären können. Der Bildpunkt P^{st} ist genau der zweite Schnittpunkt des Projektionsstrahles $[O,P]$ mit dem Kegel Γ . Die Ebene $x_1 = x_4 = 0$ ist Fixpunktsebene dieser Projektion.

Jeder Punktkugel κ des parabolisch affin - axialen Raumes \mathbb{A}_3^P , die durch

$$A \cdot x^2 + B \cdot x - 2 \cdot C \cdot y - 2 \cdot D \cdot z + E = 0 \quad (6.5)$$

($A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$, $C^2 + D^2 \neq 0$) gegeben ist, entspricht in der stereographischen Projektion der Schnitt von Γ mit der Hyperebene

$$\rho(\kappa) \dots 2 \cdot A \cdot x_4 + B \cdot x_1 - 2 \cdot C \cdot x_2 - 2 \cdot D \cdot x_3 + E \cdot x_0, \quad (6.6)$$

deren Schnittpunkt mit f die bei der Abbildung festbleibende Spitze von κ festlegt. H. BRAUNER [13, S.137] und H. SACHS [52, §23] beweisen den folgenden auch im parabolisch affin - axialen Raum \mathbb{A}_3^P gültigen

SATZ 6.1: Den Kugeln κ des parabolisch affin - axialen Raumes \mathbb{A}_3^P entsprechen in der stereographischen Projektion die Schnitte des Maßkegels Γ mit einer Hyperebene $\rho(\kappa)$. Zwei sich im parabolisch affin - axialen Raum \mathbb{A}_3^P berührende Kugeln κ_1 und κ_2 besitzen Bildhyperebenen $\rho(\kappa_1)$ und $\rho(\kappa_2)$, die sich nach einer den Kegel Γ berührenden Ebene durch die gemeinsame Kugelspitze schneiden. Alle eine feste Kugel κ_1 des parabolisch affin - axialen Raumes \mathbb{A}_3^P oskulierenden (hyperoskulierenden) Kugeln κ_2 besitzen Bild-

hyperebenen $\rho(u_2)$, die $\rho(u_1)$ und die Ebene $x_0 = x_1 = 0$ von Γ nach einer festen Geraden durch die gemeinsame Kugelspitze schneiden (die mit $\rho(u_1)$ und $x_0 = 0$ eine Γ berührende Ebene gemeinsam haben).

Wenn wir neben den Punktkugeln des parabolisch affin - axialen Raumes A_3^P auch alle f nicht enthaltenden Ebenen als Möbiuskugeln bezeichnen, können wir nach H. BRAUNER [13, S 137 ff.] die Möbiustransformationen des parabolisch affin - axialen Raumes A_3^P durch

$$\mathcal{M}_{13} \begin{cases} x' = \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d} \\ y' = \frac{a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot z + a_4 \cdot x^2}{(c \cdot x + d)^2} \\ z' = \frac{b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot y + b_3 \cdot z + b_4 \cdot x^2}{(c \cdot x + d)^2} \end{cases} \quad (a \cdot d - b \cdot c) \neq 0 \quad (6.7)$$

beschreiben ($a, b, c, d, a_i, b_i \in \mathbb{R}, i=0, 1..4$), die eine dreizehngliedrige Gruppe \mathcal{M}_{13} quadratischer CREMONAtransformationen bilden (vgl. auch H. SACHS [52, § 23]). Über die stereographische Projektion induziert \mathcal{M}_{13} im $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ eine dreizehngliedrige Gruppe projektiver Automorphismen von Γ mit der Gestalt

$$M_{13} \begin{cases} x_0' = d^2 \cdot x_0 + 2 \cdot c \cdot d \cdot x_1 & + 2 \cdot c^2 \cdot x_4 \\ x_1' = b \cdot d \cdot x_0 + (a \cdot d + b \cdot c) \cdot x_1 & + 2 \cdot a \cdot c \cdot x_4 \\ x_2' = a_0 \cdot x_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 + 2 \cdot a_4 \cdot x_4 \\ x_3' = b_0 \cdot x_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + 2 \cdot b_4 \cdot x_4 \\ x_4' = \frac{1}{2} \cdot b^2 \cdot x_0 + a \cdot b \cdot x_1 & + a^2 \cdot x_4 \end{cases} \quad (6.8)$$

Es sei noch erwähnt, daß der Hyperebene $x_0 = 0$ des $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ und ihren von 0 verschiedenen Punkten auf Γ eine zweiparametrische Schar uneigentlicher Punkte erster Art im parabolisch affin - axialen Raum hinzuzufügen sind.¹⁶⁾ Dem Punkt 0 wird als stereographi -

¹⁶⁾ Diesbezüglich vergleiche man [13, S. 137 f.] und [52, § 23].

sches Urbild ein uneigentlicher Punkt zweiter Art zugewiesen. Der um diese uneigentlichen Punkte erweiterte parabolisch affin - axiale Raum $\mathbb{A}_3^{\mathbb{P}}$ soll *konisch abgeschlossener parabolisch-affin - axialer Raum* $\mathbb{A}_3^{\mathbb{P}^*}$ heißen; analog ist der zugehörige *konisch abgeschlossene galileische Raum* \mathbb{G}_3^* definiert.

Zu den Kreisen des $\mathbb{A}_3^{\mathbb{P}^*}$ bzw. des \mathbb{G}_3^* sind im Sinne der Möbiusgeometrie neben den *isotropen Kreisen* auch alle Geraden bis auf die absolute Gerade f zu zählen; die euklidischen Kreise und die Fernkreise sind hingegen keine Möbiuskreise.

§ 7 WINKELTREUE MÖBIUSTRANSFORMATIONEN IM KONISCH ABGESCHLOSSENEN GALILEISCHEN RAUM \mathbb{G}_3^*

Die Möbiuskugeln (5.1) (wobei hier die A_i auch zu Null werden können) erhalten bei einer Möbiustransformation (6.7) die Gestalt

$$A_i' \cdot x^2 + B_i' \cdot x - 2 \cdot C_i' \cdot y - 2 \cdot D_i' \cdot z + E_i' = 0 \quad (7.1)$$

($i=1,2$) mit

$$\begin{cases} A_i' = A_i \cdot a^2 + B_i \cdot a \cdot c - 2 \cdot C_i \cdot a_4 - 2 \cdot D_i \cdot b_4 + E_i \cdot c^2 \\ B_i' = 2 \cdot A_i \cdot a \cdot b + B_i \cdot (a \cdot d + b \cdot c) - 2 \cdot C_i \cdot a_1 - 2 \cdot D_i \cdot b_1 + 2 \cdot E_i \cdot c \cdot d \\ C_i' = C_i \cdot a_2 + D_i \cdot b_2 \\ D_i' = C_i \cdot a_3 + D_i \cdot b_3 \\ E_i' = A_i \cdot b^2 + B_i \cdot b \cdot d - 2 \cdot C_i \cdot a_0 - 2 \cdot D_i \cdot b_0 + E_i \cdot d^2. \end{cases} \quad (7.2)$$

Für die Spitzen der transformierten Möbiuskugeln erhalten wir

$$(0:0:C_i \cdot a_3 + D_i \cdot b_3 : -C_i \cdot a_2 - D_i \cdot b_2). \quad (7.3)$$

Die Möbiustransformation (6.7) ist für Möbiuskugeln mit verschiedenen Spitzen *winkeltreu*, wenn sie mit der elliptischen Involution J (1.2) auf f kommutiert. Dies ist gleichwertig damit, daß aus Möbiuskugeln des \mathbb{G}_3^* mit orthogonalen Spitzen

$$(0:0:D_1 : -C_1) \quad \text{und} \quad (0:0:D_2 : -C_2) = (0:0:C_1 : D_1) \quad (7.4)$$

wieder Möbiuskugeln mit orthogonalen Spitzen

$$\begin{aligned} & (0:0:C_1 \cdot a_3 + D_1 \cdot b_3 : -C_1 \cdot a_2 - D_1 \cdot b_2) \quad \text{und} \\ & (0:0:C_2 \cdot a_3 + D_2 \cdot b_3 : -C_2 \cdot a_3 - D_2 \cdot b_2) = (0:0:-D_1 \cdot a_3 + C_1 \cdot b_3 : \\ & \qquad \qquad \qquad : D_1 \cdot a_2 - C_1 \cdot b_2) \end{aligned} \quad (7.5)$$

werden müssen, was zur Folge hat, daß für alle $C_1 : D_1 \neq 0 : 0$

$$\frac{-D_1 \cdot a_3 + C_1 \cdot b_3}{D_1 \cdot a_2 - C_1 \cdot b_2} = \frac{C_1 \cdot a_2 + D_1 \cdot b_2}{C_1 \cdot a_3 + D_1 \cdot b_3} \quad (7.6)$$

gilt. Die Auswertung von (7.6) führt auf die zwei Bedingungs-
gleichungen

$$\begin{cases} a_3 \cdot b_3 + a_2 \cdot b_2 = 0 \\ a_3^2 - b_3^2 + a_2^2 - b_2^2 = 0, \end{cases} \quad (7.7)$$

als deren Lösungen wir

$$\begin{cases} a_2 = \alpha, & a_3 = \beta \\ b_2 = -\rho \cdot \beta, & b_3 = \rho \cdot \alpha \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \rho = \pm 1) \quad (7.8)$$

erhalten. Möbiustransformationen mit $\rho = +1$ wollen wir
gleichsinnig, solche mit $\rho = -1$ *ungleichsinnig winkeltreu*
nennen.

Gilt $C_1 = C_2$ und $D_1 = D_2$, so mit (7.2) auch

$$\begin{cases} C_1' = C_2' = C_1 \cdot \alpha - \rho \cdot \beta \cdot D_1 \\ D_1' = D_2' = C_1 \cdot \beta + \rho \cdot \alpha \cdot D_1, \end{cases} \quad (7.9)$$

woraus sich für den Ersatzwinkel $\gamma^{*'}$ mit (5.3)

$$\begin{aligned} & 4 \cdot (\gamma^{*'})^2 \cdot [(C_1 \cdot \alpha - \rho \cdot \beta \cdot D_1)^2 + (C_1 \cdot \beta + \rho \cdot \alpha \cdot D_1)^2] = \\ & = [2 \cdot a \cdot b \cdot (A_1 - A_2) + (a \cdot d + b \cdot c) \cdot (B_1 - B_2) + 2 \cdot c \cdot d \cdot (E_1 - E_2)]^2 - \\ & - 4 \cdot [a^2 \cdot (A_1 - A_2) + a \cdot c \cdot (B_1 - B_2) + c^2 \cdot (E_1 - E_2)] \cdot \\ & \cdot [b^2 \cdot (A_1 - A_2) + b \cdot d \cdot (B_1 - B_2) + d^2 \cdot (E_1 - E_2)] \end{aligned} \quad (7.10)$$

einstellt. Wird $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$ zu 1 normiert, so wird (7.10)
nach einigen Umformungen zu

$$\begin{aligned} & 4 \cdot (\gamma^{*'})^2 \cdot [(C_1 \cdot \alpha - \rho \cdot \beta \cdot D_1)^2 + (C_1 \cdot \beta + \rho \cdot \alpha \cdot D_1)^2] = \\ & = (B_1 - B_2)^2 - 4 \cdot (A_1 - A_2) \cdot (E_1 - E_2), \end{aligned} \quad (7.11)$$

woraus nach einem Vergleich mit dem Ersatzwinkel (5.3) zunächst

$$(C_1 \cdot \alpha - \rho \cdot \beta \cdot D_1)^2 + (C_1 \cdot \beta + \rho \cdot \alpha \cdot D_1)^2 = C_1^2 + D_1^2 \quad (7.12)$$

und daraus nach einigen Umformungen

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \quad (7.13)$$

folgt. Damit lassen sich α und β durch

$$\alpha = \cos \varphi \text{ und } \beta = \sin \varphi, \varphi \in \mathbb{R} \quad (7.14)$$

erfassen, womit die gleichsinnig winkeltreuen Möbiustransformationen des konisch abgeschlossenen galileischen Raumes G_3^* die neungliedrige Transformationsgruppe ($\rho = +1$)

$$M_9 \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d} \\ y' = \frac{a_0 + a_1 \cdot x + \rho \cdot \cos \varphi \cdot y + \rho \cdot \sin \varphi \cdot z + a_4 \cdot x^2}{(c \cdot x + d)^2} \\ z' = \frac{b_0 + b_1 \cdot x - \rho \cdot \sin \varphi \cdot y + \rho \cdot \cos \varphi \cdot z + b_4 \cdot x^2}{(c \cdot x + d)^2} \end{array} \right. \quad (7.15)$$

mit $a, b, c, d, a_i, b_i, \varphi \in \mathbb{R}$ ($i=0,1..4$; $a \cdot d - b \cdot c = 1$) bilden. Für $\rho = -1$ stellt sich keine Gruppe ein, sondern vielmehr die neungliedrige Schar der *gegensinnig winkeltreuen Möbiustransformationen*.

Im Sinne der Möbiusgeometrie wollen wir nun alle die absolute Gerade f enthaltenden Ebenen des konisch abgeschlossenen galileischen Raumes G_3^* als *euklidische Ebenen* betrachten (dazu zählt dann auch die uneigentliche Ebene). Die euklidische Ebene ϵ ($x = k = \text{konst.} \in \mathbb{R}$) wird von einer Möbiustransformation (7.15) auf die euklidische Ebene ϵ' mit

$$x' = \frac{a \cdot k + b}{c \cdot k + d} \quad (7.16)$$

abgebildet, und zwar so, daß

$$\begin{cases} y' = A(k) + R(k) \cdot [y \cdot \cos \varphi + z \cdot \sin \varphi] \\ z' = B(k) + R(k) \cdot [-y \cdot \sin \varphi + z \cdot \cos \varphi] \end{cases} \quad \rho = \pm 1 \quad (7.17)$$

mit reellen Konstanten $A(k)$, $B(k)$ und $R(k)$ gilt.¹⁷⁾ (7.17)
 stellt genau die viergliedrige Gruppe der euklidischen winkeltreuen Ähnlichkeiten zwischen den euklidischen Ebenen ε und ε' dar. Damit haben wir den

SATZ 7.1: Die gleichsinnig winkeltreuen Möbiustransformationen des konisch-abgeschlossenen galileischen Raumes \mathbb{G}_3^* bilden eine neungliedrige Gruppe quadratischer CREMONAtransformationen, welche eine Untergruppe der dreizehngliedrigen Gruppe \mathcal{M}_{13} der Möbiustransformationen ist. Diese winkeltreuen Möbiustransformationen bilden euklidische Ebenen des \mathbb{G}_3^* wieder auf euklidische Ebenen ab, und zwar so, daß die Punktabbildung zwischen diesen Ebenen eine euklidisch gleichsinnig winkeltreue Ähnlichkeit ist.

Über die stereographische Projektion induziert die Gruppe \mathcal{M}_9 im Bildraum $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ eine neungliedrige Gruppe von Projektivitäten

$$W_9 \begin{cases} x_0' = d^2 \cdot x_0 + 2 \cdot c \cdot d \cdot x_1 & + 2 \cdot c^2 \cdot x_4 \\ x_1' = b \cdot d \cdot x_0 + x_1 \cdot (a \cdot d + b \cdot c) & + 2 \cdot a \cdot c \cdot x_4 \\ x_2' = a_0 \cdot x_0 + a_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot \cos \varphi + x_3 \cdot \sin \varphi & + 2 \cdot a_4 \cdot x_4 \\ x_3' = b_0 \cdot x_0 + b_1 \cdot x_1 - x_2 \cdot \sin \varphi + x_3 \cdot \cos \varphi & + 2 \cdot b_4 \cdot x_4 \\ x_4' = \frac{1}{2} \cdot b^2 \cdot x_0 + a \cdot b \cdot x_1 & + a^2 \cdot x_4 \end{cases} \quad (7.18)$$

($a \cdot d - b \cdot c = 1$), die mit der auf f operierenden elliptischen Involution J (1.2) kommutiert.

Die Frage nach involutorischen Möbiustransformationen des

¹⁷⁾ $A(k)$, $B(k)$ und $R(k)$ hängen auch von den Koeffizienten a_i und b_i ab ($i=0, 1, \dots, 4$).

konisch abgeschlossenen parabolisch affin - axialen Raumes $\mathbb{A}_3^{P^*}$ wird von H. BRAUNER in [13, S. 142 ff.] beantwortet, wobei auch die Normalformen aller dieser involutorischen Möbiustransformationen angeführt werden. Durch Vergleich mit diesen Normalformen erkennt man sofort, daß alle involutorischen Möbiustransformationen des konisch abgeschlossenen parabolisch affin-axialen Raumes $\mathbb{A}_3^{P^*}$ als *winkeltreue* (unter Umständen ungleichsinnige) Möbiustransformationen eines geeignet im $\mathbb{A}_3^{P^*}$ eingebetteten galileischen Möbiusraumes \mathbb{G}_3^* aufzufassen sind.¹⁸⁾

Wir haben damit den

SATZ 7.2: *Alle involutorischen Möbiustransformationen des konisch abgeschlossenen parabolisch affin - axialen Raumes $\mathbb{A}_3^{P^*}$ können als winkeltreue Möbiustransformationen eines geeignet im $\mathbb{A}_3^{P^*}$ eingebetteten galileischen Möbiusraumes \mathbb{G}_3^* aufgefaßt werden.*

¹⁸⁾ H. BRAUNER zeigt in [13, S. 142 ff.] , daß dies für einen im konisch abgeschlossenen parabolisch affin - axialen Raum $\mathbb{A}_3^{P^*}$ eingebetteten zweifach isotropen Möbiusraum $\mathbb{I}_3^{(2)*}$ nicht gilt.

§ 8 LAGUERREGEOMETRIE IM GALILEISCHEN RAUM G_3

Da wir jede Ebenen(grenz)kugel des galileischen Raumes G_3 mit ihrem euklidischen Trägerkreis (Fernkreis) identifizieren können (vgl. Abschnitt 4), sind wir in der Lage, jeder Ebenen(grenz)kugel K

$$m_4^2 \cdot (u_2^2 + u_3^2) = (u_0 \cdot m_0 + u_1 \cdot m_1 + u_2 \cdot m_2 + u_3 \cdot m_3)^2 \quad (8.1)$$

$(m_0, m_1) \neq (0, 0)$ mit Hilfe einer *zyklographischen* Abbildung der Menge $K(G_3)$ der Ebenen(grenz)kugeln des galileischen Raumes G_3

$$Z : \quad K(G_3) \xrightarrow{\hspace{2cm}} \mathbb{P}_4(\mathbb{R}) \\ (m_0, m_1, m_2, m_3, R = \frac{m_4}{m_0}) \longrightarrow (m_0 : m_1 : m_2 : m_3 : m_4) \quad (8.2)$$

auf die Punkte eines reellen vierdimensionalen projektiven Raumes $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ einen *zyklographischen Bildpunkt* K^* zuzuweisen. $m_4 = 0$ kennzeichnet in (8.1) die *nichtabsoluten Punkte* des galileischen Raumes G_3 , die als Ebenenbündel aufzufassen sind. Ihnen sind in der zyklographischen Abbildung die Punkte der Hyperebene $x_4 = 0$ zugeordnet.¹⁹⁾ Wird der galileische Raum G_3 als *Hyperebene* $x_4 = 0$ des Bildraumes $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ aufgefaßt, so erkennen wir, daß der den Trägerkreis k (4.15) der Ebenen(grenz)kugel K mit dem Bildpunkt K^* verbindende Kegel zweiter Ordnung durch

$$\lambda \cdot (m_0 : m_1 : m_2 + m_4 \cdot \cos t : m_3 + m_4 \cdot \sin t : 0) + \\ + \mu \cdot (m_0 : m_1 : m_2 : m_3 : m_4) \quad (t \in (-\infty, +\infty), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 - (0, 0)) \quad (8.3)$$

beschrieben wird. Bei variabelm $(m_0 : m_1 : m_2 : m_3 : m_4)$ ($(m_0, m_1) \neq (0, 0)$) enthält dieser Kegel stets einen *einteiligen Kegel* -

¹⁹⁾ Diese zyklographische Abbildung besitzt sehr große Ähnlichkeit mit der der ebenen euklidischen LAGUERRE-Geometrie (vgl. W. BLASCHKE [5, S. 136 ff.]).

schnitt i_u in der Ebene π_u ($x_0 = x_1 = 0$), der durch

$$i_u \dots x_2^2 + x_3^2 = x_4^2, \quad x_0 = x_1 = 0 \quad (8.4)$$

beschrieben wird.

Jede isotrope Ebene ϵ des galileischen Raumes \mathbb{G}_3 läßt sich in Ebenenkoordinaten durch

$$u_0 \cdot x_0 + u_1 \cdot x_1 + u_2 \cdot x_2 + u_3 \cdot x_3 = 0 \quad (8.5)$$

darstellen. Sie gehört im allgemeinen (für $(u_2, u_3) \neq (0, 0)$) einer dreiparametrischen Schar von Ebenen(grenz)kugeln an, die durch die lineare Gleichung

$$m_4 \cdot \sqrt{u_2^2 + u_3^2} = u_0 \cdot m_0 + u_1 \cdot m_1 + u_2 \cdot m_2 + u_3 \cdot m_3 \quad (8.6)$$

bestimmt sind. Diesen Ebenen(grenz)kugeln entsprechen in der zyklographischen Abbildung Z die Punkte einer *Hyperebene* $H(\epsilon)$, die durch

$$x_4 = \frac{u_0 \cdot x_0 + u_1 \cdot x_1 + u_2 \cdot x_2 + u_3 \cdot x_3}{\sqrt{u_2^2 + u_3^2}} \quad (8.7)$$

erfaßt wird. $H(\epsilon)$ schneidet die Hyperebene $x_4 = 0$ (d.h. \mathbb{G}_3) nach der Ebene ϵ und die Ebene π_u nach einer *Tangente des Kegelschnitts* i_u (8.4).

Unter einem *Ebenen(grenz)kugelgebiet* des galileischen Raumes \mathbb{G}_3 wollen wir im folgenden eine Menge von Ebenen(grenz)kugeln verstehen, denen in der zyklographischen Abbildung Z ein Gebiet von Punkten des zyklographischen Bildraumes $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ entspricht. Eine *LAGUERRE-Abbildung* des galileischen Raumes \mathbb{G}_3 ist eine ebenentreue, ebenen(grenz)kugeltreue, eineindeutige und stetige Abbildung zwischen zwei hinreichend kleinen Ebenen(grenz)kugel-

gebieten des galileischen Raumes G_3 , welche berührungstreu ist (vgl. W. BLASCHKE [5, S. 4 ff.]). Daß dabei der Begriff der Ebenenkugeln noch um die nichtabsoluten Punkte zu erweitern ist, wurde vorausgesetzt.

Die Menge der Ebenenkugeln, der Ebenengrenzkugeln und der nichtabsoluten Punkte des galileischen Raumes G_3 werden wir im folgenden als *LAGUERRE-Kugeln* ansprechen. Diesen Kugeln ist in der zyklographischen Abbildung bijektiv ein Punkt des $\mathbb{P}_4(\mathbb{R}) \setminus \pi_u$ zugeordnet.

Seien nun K_i ($i=1,2$) zwei LAGUERRE-Kugeln mit den zyklographischen Bildpunkten K_i^*

$$(m_0^i : m_1^i : m_2^i : m_3^i : m_4^i) \quad (8.8)$$

mit $m_0^1 = m_0^2$ für $m_0^1 = m_0^2 \neq 0$ bzw. $m_1^1 = m_1^2$ für $m_0^1 = m_0^2 = 0$. K_1 und K_2 berühren sich gemäß Abschnitt 5 genau dann, wenn

$$(m_2^1 - m_2^2)^2 + (m_3^1 - m_3^2)^2 - (m_4^1 - m_4^2)^2 = 0 \quad (8.9)$$

wird, woraus folgt, daß dann die *Verbindungsgerade* der beiden zyklographischen Bildpunkte K_1^* und K_2^* den Kegelschnitt i_u trifft.

Die LAGUERRE-Abbildungen des galileischen Raumes G_3 induzieren so über die zyklographische Abbildung im Bildraum $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ Abbildungen L , die außerhalb der Ebene π_u *punkttreu* sind, die den Kegelschnitt i_u treffende Geraden, die nicht in π_u liegen, wieder in solche überführen und i_u berührende (aber π_u nicht enthaltende) Hyperebenen ebenfalls wieder in Hyperebenen dieser Schar transformieren. Dabei bleibt Kollinearität von Punkten auf den Treffgeraden des Kegelschnitts i_u ,

die nicht in π_u liegen, erhalten. L besitzt somit die Struktur der projektiven Automorphismen des Kegelschnitts i_u und kann auf den ganzen $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ ausgedehnt werden. Damit ist L mit der dreizehngliedrigen Gruppe der Projektivitäten

$$L_{13} \begin{cases} x_0' = \alpha \cdot x_0 + \beta \cdot x_1 \\ x_1' = \gamma \cdot x_0 + \delta \cdot x_1 \\ x_2' = a \cdot x_0 + b \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 + a_{24} \cdot x_4 \\ x_3' = c \cdot x_0 + d \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 + a_{34} \cdot x_4 \\ x_4' = e \cdot x_0 + f \cdot x_1 + a_{42} \cdot x_2 + a_{43} \cdot x_3 + a_{44} \cdot x_4 \end{cases} \quad (8.10)$$

des $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ identisch, wobei alle auftretenden Konstanten aus \mathbb{R} gewählt sind, und überdies

$$\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma \neq 0 \quad (8.11)$$

und

$$\begin{cases} a_{22}^2 + a_{32}^2 - a_{42}^2 = \rho & a_{22} \cdot a_{23} + a_{32} \cdot a_{33} = a_{42} \cdot a_{43} \\ a_{23}^2 + a_{33}^2 - a_{43}^2 = \rho & a_{22} \cdot a_{24} + a_{32} \cdot a_{34} = a_{42} \cdot a_{44} \\ a_{24}^2 + a_{34}^2 - a_{44}^2 = -\rho & a_{23} \cdot a_{24} + a_{33} \cdot a_{34} = a_{43} \cdot a_{44} \end{cases} \quad (8.12)$$

($\rho = \text{konst.} \in \mathbb{R} - \{0\}$) gilt. L_{13} induziert daher nach (8.12) in der Ebene π_u genau die dreigliedrige Gruppe der hyperbolischen Bewegungen mit i_u als Maßkegelschnitt (vgl. [19, S.202 ff.]). In Hyperebenenkoordinaten besitzt L_{13} die Darstellung

$$L_{13}^* \begin{cases} u_0' = \alpha \cdot u_0 + \gamma \cdot u_1 + a \cdot u_2 + c \cdot u_3 + e \cdot u_4 \\ u_1' = \beta \cdot u_0 + \delta \cdot u_1 + b \cdot u_2 + d \cdot u_3 + f \cdot u_4 \\ u_2' = a_{22} \cdot u_2 + a_{32} \cdot u_3 + a_{42} \cdot u_4 \\ u_3' = a_{23} \cdot u_2 + a_{33} \cdot u_3 + a_{43} \cdot u_4 \\ u_4' = a_{24} \cdot u_2 + a_{34} \cdot u_3 + a_{44} \cdot u_4 \end{cases} \quad (8.13)$$

mit den Nebenbedingungen (8.11) und (8.12) für alle reellen

Koeffizienten, woraus überdies

$$\begin{cases} a_{22}^2 + a_{23}^2 - a_{24}^2 = \rho & a_{22} \cdot a_{32} + a_{23} \cdot a_{33} = a_{24} \cdot a_{34} \\ a_{32}^2 + a_{33}^2 - a_{34}^2 = \rho & a_{22} \cdot a_{42} + a_{23} \cdot a_{43} = a_{24} \cdot a_{44} \\ a_{42}^2 + a_{43}^2 - a_{44}^2 = -\rho & a_{32} \cdot a_{42} + a_{33} \cdot a_{43} = a_{34} \cdot a_{44} \end{cases} \quad (8.14)$$

folgt. Gehen wir in (8.6) von der normierten Darstellung

$$u_2^2 + u_3^2 = 1 \quad (8.15)$$

einer isotropen Ebene ϵ des galileischen Raumes G_3 aus, so wird die zyklographische Bildhyperebene $H(\epsilon)$ (8.7) durch

$$u_4 = -1 \quad (8.16)$$

gekennzeichnet. Unterwerfen wir $H(\epsilon)$ einer Transformation aus der Gruppe L_{13}^* , so entsteht eine Bildhyperebene $H'(\epsilon)$, die sich wegen $u_4' \neq 0$ in der Normalform

$$\begin{cases} U_0' = \frac{u_0'}{u_4'} = \frac{\alpha \cdot u_0 + \gamma \cdot u_1 + a \cdot u_2 + c \cdot u_3 - e}{a_{24} \cdot u_2 + a_{34} \cdot u_3 - a_{44}} \\ U_1' = \frac{u_1'}{u_4'} = \frac{\beta \cdot u_0 + \delta \cdot u_1 + b \cdot u_2 + d \cdot u_3 - f}{a_{24} \cdot u_2 + a_{34} \cdot u_3 - a_{44}} \\ U_2' = \frac{u_2'}{u_4'} = \frac{a_{22} \cdot u_2 + a_{32} \cdot u_3 - a_{42}}{a_{24} \cdot u_2 + a_{34} \cdot u_3 - a_{44}} \\ U_3' = \frac{u_3'}{u_4'} = \frac{a_{23} \cdot u_2 + a_{33} \cdot u_3 - a_{43}}{a_{24} \cdot u_2 + a_{34} \cdot u_3 - a_{44}} \\ U_4' = \frac{u_4'}{u_4'} = 1 \end{cases} \quad (8.17)$$

anschreiben läßt, woraus wir als Darstellung der dreizehnglied-
rigen LAGUERRE-Gruppe \mathcal{L}_{13} des galileischen Raumes G_3

$$\mathcal{L}_{13} \left\{ \begin{array}{l} u_0' = \frac{\alpha \cdot u_0 + \gamma \cdot u_1 + a \cdot u_2 + c \cdot u_3 - e}{a_{24} \cdot u_2 + a_{34} \cdot u_3 - a_{44}} \\ u_1' = \frac{\beta \cdot u_0 + \delta \cdot u_1 + b \cdot u_2 + d \cdot u_3 - f}{a_{24} \cdot u_2 + a_{34} \cdot u_3 - a_{44}} \\ u_2' = \frac{a_{22} \cdot u_2 + a_{32} \cdot u_3 - a_{42}}{a_{24} \cdot u_2 + a_{34} \cdot u_3 - a_{44}} \\ u_3' = \frac{a_{23} \cdot u_2 + a_{33} \cdot u_3 - a_{43}}{a_{24} \cdot u_2 + a_{34} \cdot u_3 - a_{44}} \end{array} \right. \quad (8.18)$$

mit reellen Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, a, b, c, d, e, f$ und a_{ij} ($i, j=2, 3, 4$) gewinnen, die den Nebenbedingungen (8.11), (8.12) und (8.14) genügen. Wir notieren den

SATZ 8.1: Die LAGUERRE-Abbildungen des galileischen Raumes \mathbb{G}_3 bilden eine dreizehngliedrige Gruppe \mathcal{L}_{13} (8.18), die durch zyklographische Abbildung bijektiv auf die dreizehngliedrige Gruppe L_{13} projektiver Automorphismen eines einteiligen Kegelschnitts i_u in einem reellen vierdimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ abgebildet wird.

§ 9 ABSTANDSTREUE LAGUERRETRANSFORMATIONEN DES GALILEISCHEN
RAUMES \mathbb{G}_3

In der Klasse der LAGUERRE-Kugeln besitzen diejenigen mit Trägerkreisen in der Fernebene ω des galileischen Raumes \mathbb{G}_3 keinen wohldefinierten Abstand zu den anderen. Da sie durch $m_0 = 0$ gekennzeichnet werden, müssen *abstandstreue LAGUERRE-Transformationen* in der zyklographischen Abbildung die *Hyperebene* Ω ($x_0 = 0$) im $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ festlassen. Dies bewirkt, daß in (8.13) $\beta = 0$ gelten muß.

Für zwei LAGUERRE-Kugeln, deren Trägerkreise in verschiedenen euklidischen Ebenen ε_1 und ε_2 liegen, wurde durch (5.11) ein Abstand definiert, dessen Invarianz mit

$$\varepsilon_i \dots m_0^i \cdot x_1 = m_1^i \cdot x_0 \quad (i=1,2; m_0^i \neq 0) \quad (9.1)$$

im Bildraum $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ gemäß (8.10)

$$t^* = \frac{m_1^2}{m_0^2} - \frac{m_1^1}{m_0^1} = \frac{\gamma \cdot m_0^2 + \delta \cdot m_1^2}{\alpha \cdot m_0^2} - \frac{\gamma \cdot m_0^1 + \delta \cdot m_1^1}{\alpha \cdot m_0^1} \quad (9.2)$$

für alle $(m_0^i, m_1^i) \in \mathbb{R}^2 - (0,0)$ bedeutet. Es gilt demnach

$$\alpha = \delta \neq 0. \quad (9.3)$$

Sind zwei LAGUERRE-Grenzkugeln durch ihre Fernkreise

$$x_0 = 0, \quad (m_1^i \cdot x_2 - m_2^i \cdot x_1)^2 + (m_1^i \cdot x_3 - m_3^i \cdot x_1) = (m_4^i)^2 \cdot x_1^2 \quad (9.4)$$

(vgl. (5.9)) gegeben, so bedeutet die Konstanz der Tangentialentfernung nach der Normierung $m_1^1 = m_1^2$

$$t = \frac{1}{(m_1^1)^2} \cdot [(m_2^1 - m_2^2)^2 + (m_3^1 - m_3^2)^2 - (m_4^1 - m_4^2)^2] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\alpha^2 \cdot (m_1^1)^2} \cdot \{ [a_{22} \cdot (m_2^1 - m_2^2) + a_{23} \cdot (m_3^1 - m_3^2) + a_{24} \cdot (m_4^1 - m_4^2)]^2 + \\
 &+ [a_{32} \cdot (m_2^1 - m_2^2) + a_{33} \cdot (m_3^1 - m_3^1) + a_{34} \cdot (m_4^1 - m_4^2)]^2 - \\
 &- [a_{42} \cdot (m_2^1 - m_2^2) + a_{43} \cdot (m_3^1 - m_3^2) + a_{44} \cdot (m_4^1 - m_4^2)]^2 \} \quad (9.5)
 \end{aligned}$$

für alle $m_j^i \in \mathbb{R}$ ($i=1,2; j=2,3,4$). Die Auswertung dieser Gleichung liefert mit (8.12) bzw. (8.14)

$$\alpha = \rho \neq 0 \quad (9.6)$$

mit ρ aus (8.12) bzw. (8.14). Investiert man schließlich die Abstandstreue zweier LAGUERRE-Kugeln mit Trägerkreisen in derselben euklidischen Ebene des galileischen Raumes \mathbb{G}_3 , so erhält man keine neuen Bedingungen für die Koeffizienten in (8.10). Normiert man noch $\alpha = \delta = \rho = 1$, so erhält man als zyklographisches Bild der abstandstreuen LAGUERRE-Transformationen des galileischen Raumes \mathbb{G}_3 die durch

$$A_{10} \begin{cases} x_0' = x_0 \\ x_1' = x_0 + x_1 \\ x_2' = a \cdot x_0 + b \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 + a_{24} \cdot x_4 \\ x_3' = c \cdot x_0 + d \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 + a_{34} \cdot x_4 \\ x_4' = e \cdot x_0 + f \cdot x_1 + a_{42} \cdot x_2 + a_{43} \cdot x_3 + a_{44} \cdot x_4 \end{cases} \quad (9.7)$$

beschriebene zehngliedrige Untergruppe der Projektivitäten des zyklographischen Bildraumes $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ (hierbei gelten die Nebenbedingungen (8.12) bzw. (8.14) mit $\rho = 1$). A_{10} läßt die Hyperebene Ω ($x_0 = 0$) invariant und induziert in Ω die sechsgliedrige Gruppe der Bewegungen eines pseudoeuklidischen Raumes, dessen absoluter Kegelschnitt i_u durch (8.4) gegeben ist. Nach O. GIERING [22, S. 117] kann somit die Gruppe A_{10} als Bewegungsgruppe eines vierdimensionalen galileischen Raumes vom Index 1

angesprochen werden, in dem das Absolutgebilde von der Hyper-
ebene Ω , der in Ω gelegenen Ebene π_u ($x_0 = x_1 = 0$) und dem in π_u
enthaltenen Kegelschnitt i_u gebildet wird. Damit haben wir den

SATZ 9.1: Die abstandstreuen LAGUERRE-Transformationen des ga-
lileischen Raumes G_3 bilden eine zehngliedrige Gruppe \mathcal{A}_{10} ,
die im zyklographischen Bildraum $P_4(\mathbb{R})$ als zehngliedrige Be-
wegungsgruppe eines geeigneten vierdimensionalen galileischen
Raumes vom Index 1 anzusehen ist.

§ 10 KURVENTHEORIE DES GALILEISCHEN RAUMES G_3

Nach Abschnitt 1 stimmt die innere Geometrie einer Ebene des galileischen Raumes G_3 mit der ebenen isotropen oder der ebenen euklidischen Geometrie überein. Die Differentialgeometrie ebener Kurven des galileischen Raumes G_3 ist damit bereits ausführlich untersucht (vgl. etwa [52], [66] bzw. [7], [27] und [28]).

Eine durch

$$\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (10.1)$$

$(x(t), y(t), z(t) \in C^3, t \in (-\infty, +\infty))$ gegebene *Raumkurve* c soll im folgenden *zulässig* heißen, wenn sie frei von Wendepunkten $(\dot{\varphi}(t) \times \ddot{\varphi}(t) \neq \sigma)^{20)}$ ist und keine die absolute Gerade f treffenden Tangenten besitzt ($\dot{x}(t) \neq 0$). Für eine zulässige Raumkurve c ist das *Bogenelement* ds nach (2.1) durch

$$ds = \dot{x}(t)dt = dx \quad (10.2)$$

bestimmt, wobei nach unseren Voraussetzungen $(\dot{\varphi}(t) \times \ddot{\varphi}(t) \neq \sigma$ und $\dot{x}(t) \neq 0 \forall t \in (-\infty, +\infty))$ die *Bogenlänge* x als Parameter verwendet werden kann. Ableitungen nach x werden wir im folgenden durch Striche kennzeichnen. Da diese Bogenlänge eine B_6 - Invariante ist, können wir durch

$$\kappa(x) := \sqrt{y''(x)^2 + z''(x)^2} \quad (10.3)$$

für c an der Stelle x eine B_6 - invariante *galileische Krümmung* definieren. In einem regulären Punkt P besitzt c eine durch $\mathcal{A}(x) := \varphi'(x)$ und $\varphi''(x)$ aufgespannte *Schmiegebene* σ mit dem

²⁰⁾ Durch Punkte kennzeichnen wir im folgenden Ableitungen nach t .

absoluten Pol H , der durch

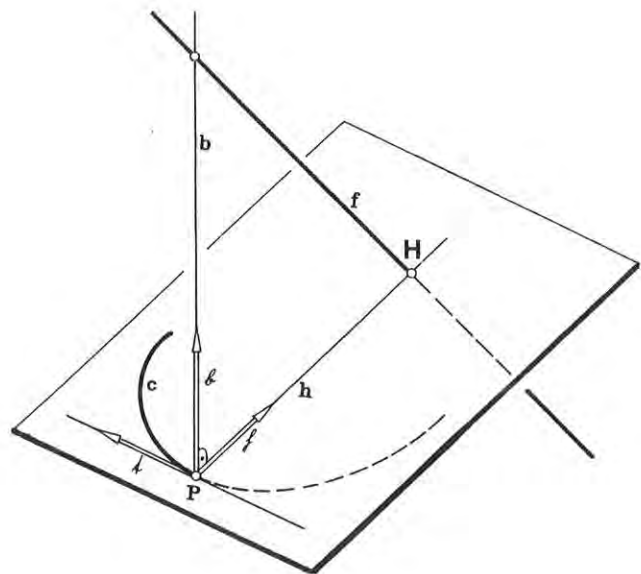
$$(0:0:y''(x):z''(0)) \quad (10.4)$$

beschrieben wird. H ist der Fernpunkt der Richtung $\varphi''(x)$, deren Einheitsvektor durch

$$f(x) = \frac{\varphi''(x)}{\kappa(x)} \quad (10.5)$$

dargestellt wird. $f(x)$ wird im folgenden als *Hauptnormalenvektor* von c im Punkt P bezeichnet (vgl. Abbildung 4).

Abbildung 4 :
Begleitendes Dreibein
einer Raumkurve c



Gemäß (2.11) wird dann durch

$$b(x) := \frac{1}{\kappa(x)} \cdot (0, -z'', y'') \quad (10.6)$$

ein *Binormaleneinheitsvektor* bestimmt, der zusammen mit dem Tangenteneinheitsvektor und dem Hauptnormalenvektor das in Abbildung 4 gezeigte *begleitende Dreibein* der Raumkurve c im Punkt P festlegt. Bezüglich analoger Definitionen vergleiche man etwa P.Г. БУХАРАЕВ [18, S. 41 f.], V. CRUCEANU [21, S. 634 f.] bzw. H. STACHEL [54, S. 7 f.]. Im obigen Dreibein gelten die folgenden *Ableitungsgleichungen*

$$\begin{cases} A'(x) = \kappa(x) \cdot f(x) \\ f'(x) = \tau(x) \cdot b(x) \\ b'(x) = -\tau(x) \cdot f(x), \end{cases} \quad (10.7)$$

wobei

$$\begin{aligned} \tau(x) &:= \frac{1}{\kappa^2(x)} \cdot [y''(x) \cdot z'''(x) - y'''(x) \cdot z''(x)] = \\ &= \frac{\det(\varphi'(x), \varphi''(x), \varphi'''(x))}{\kappa^2(x)} \end{aligned} \quad (10.8)$$

gesetzt wurde.²¹⁾ $\tau(x)$ ist wie $\kappa(x)$ eine B_6 - Invariante der Raumkurve c im Punkt P und soll als *galileische Torsion* (*Windung*) von c im Punkt P angesprochen werden. Die Formelgruppe (10.7) ist damit als Analogon zu den bekannten *FRENET'schen Formeln* der euklidischen Kurventheorie anzusehen.

Um im Rahmen der Metrik des galileischen Raumes G_3 die Krümmung $\kappa(x)$ und die Torsion $\tau(x)$ geometrisch zu deuten, bestimmen wir den Winkel φ zweier Tangenten von c in den Punkten $(x, y(x), z(x))$ und $(x+dx, y(x+dx), z(x+dx))$, für den wir mit (2.8)

$$\begin{aligned} \varphi &= + \sqrt{(y'(x) - y'(x+dx))^2 + (z'(x) - z'(x+dx))^2} = \\ &= + \sqrt{y''(x)^2 + z''(x)^2} \cdot dx + \dots \end{aligned} \quad (10.9)$$

errechnen. Mit (10.2) und (10.3) erhalten wir so

$$\kappa(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{ds}, \quad (10.10)$$

was für die Krümmung eine Kennzeichnung als *Verhältnis von Kontingenzwinkel zum Bogenelement* der Raumkurve c erlaubt. Für die entsprechenden Schmiegeebenen $\sigma(x)$ und $\sigma(x+dx)$ erhalten wir

²¹⁾ Man vergleiche die entsprechenden Ableitungsgleichungen von P.Г.ЭВХАРАЕВ [18] bezüglich der Gruppe H_8 , von V. CRUCEANU [21] bezüglich der Fundamentalgruppe F_{10} des A_3^P und von H. BRAUNER [13] bzw. H. SACHS [52] für den ebenfalls im A_3^P enthaltenen Flaggenraum I_3 .

gemäß (2.5) den Winkel

$$\begin{aligned} \sin \psi &= \cos (90^\circ - \psi) = \cos \angle (h(x+dx), b(x)) = \\ &= \frac{y''(x) \cdot z''(x+dx) - y''(x+dx) \cdot z''(x)}{\kappa(x) \cdot \kappa(x+dx)} = \\ &= \frac{[y''(x) \cdot z'''(x) - y'''(x) \cdot z''(x)] dx + \dots}{\kappa^2(x) + \dots}, \end{aligned} \quad (10.11)$$

wobei mit $h(x)$ ($b(x)$) die Hauptnormale (Binormale) von c im Punkt P bezeichnet wurde. Aus (10.11) gewinnen wir durch Grenzübergang

$$\tau(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\psi}{ds}, \quad (10.12)$$

womit wir den folgenden Satz haben :

SATZ 10.1: Die galileische Krümmung $\kappa(x)$ und die Torsion $\tau(x)$ einer zulässigen Raumkurve c des galileischen Raumes G_3 lassen sich in einem regulären Punkt P als Verhältnis des Kontingenzwinkels bzw. des Winkels benachbarter Schmiegeebenen zum Bogenelement der Raumkurve c deuten.

Wir vermerken noch, daß aus den FRENET'schen Formeln die Beziehung

$$\varrho'''(x) = \kappa(x) \cdot \tau(x) \cdot b(x) + \kappa'(x) \cdot f(x) \quad (10.13)$$

gewonnen werden kann.²²⁾

Der Richtkegel der zulässigen Raumkurve c besitzt die durch

$$(0:1:y'(x):z'(x)) \quad (10.14)$$

²²⁾ Man vergleiche das völlig identische Resultat für den Flaggenraum bei H. BRAUNER [14, S. 135].

festgelegte Fernkurve c_u . Da in der Fernebene ω die euklidische Metrik herrscht, kann diesbezüglich die Krümmung $k(x)$ von c_u berechnet werden. Wir finden

$$k(x) = \frac{y''(x) \cdot z'''(x) - y'''(x) \cdot z''(x)}{[y''(x)^2 + z''(x)^2]^{3/2}} = \frac{\tau(x)}{\kappa(x)}. \quad (10.15)$$

$k(x)$ wird wie üblich *konische Krümmung* der Raumkurve c im regulären Punkt P genannt.

Die Kurven *konstanter konischer Krümmung* nennen wir *Böschungslinien* des galileischen Raumes G_3 . Wie im Flaggenraum $I_3^{(2)}$ (vgl. H. BRAUNER [14, S. 137]) gilt, daß ihre Tangenten im allgemeinen keinen festen Winkel mit einer festen Bezugsebene einschließen. Sie sind dadurch gekennzeichnet, daß ihre Tangenten zu einer nichtisotropen Geraden g konstante Neigung besitzen. Die Fernkurve c_u des Richtkegels ist ein Fernkreis mit dem Fernpunkt G_u von g als Mittelpunkt: Faßt man c_u als Fernkreis in einem geeignet gewählten euklidischen Raum E_3 sowie G_u und f als orthogonale Richtungen im E_3 auf, so sind die Böschungslinien zur festen Richtung g im euklidischen Raum E_3 und im galileischen Raum G_3 identisch. Eine ausführliche Diskussion der Böschungslinien des galileischen Raumes G_3 kann daher unterbleiben. Für den euklidischen Fall vergleiche man etwa die von W. WUNDERLICH in [72] angegebene Literatur.

Wir beweisen nun den folgenden *Fundamentalsatz der Kurventheorie des galileischen Raumes G_3* :

SATZ 10.2: Im Intervall $I \in \mathbb{R}$ ($0 \subset I$) sei $f(s)$ eine C^1 -Funktion und $g(s)$ eine Funktion aus C mit $f(s) \geq 0$ für alle $s \in I$;

weiterhin sei ein Punkt P_0 gegeben, mit dem ein im Sinne der Bewegungsgruppe B_6 orthonormiertes Dreibein $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ und \mathcal{M}_3 verknüpft ist. Dann gilt : Es gibt genau eine Raumkurve c mit der galileischen Bogenlänge s , die $f(s)$ als galileische Krümmung und $g(s)$ als galileische Torsion besitzt und im Punkt P_0 für $s = 0$ $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ und \mathcal{M}_3 als begleitendes Dreibein hat.

BEWEIS : Über die konische Krümmung $k(s) = \frac{g(s)}{f(s)}$ (10.15) ist die Krümmung der Richtkurve c_u der gesuchten Raumkurve c bekannt. Ihre im Sinne der in der Fernebene ω herrschenden ebenen euklidischen Geometrie gemessene Bogenlänge s^* kann mit

$$s^* = \int_0^s f(s) ds \quad (10.16)$$

bestimmt werden, was es ermöglicht, $k(s)$ auf den Parameter s^* zu beziehen. Werden die Fernpunkte der Vektoren $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ und \mathcal{M}_3 mit E_{1u}, E_{2u} und E_{3u} bezeichnet, so existiert nach dem Fundamentalsatz der ebenen euklidischen Geometrie (vgl. etwa E. KRUPPA [29, S. 71]) eine eindeutig bestimmte Kurve c_u in der Fernebene ω , die s^* als Bogenlänge und $k(s^*)$ als Krümmung besitzt sowie im Punkt E_{1u} für $s^* = 0$ die Geraden $[E_{1u}, E_{2u}]$ und $[E_{1u}, E_{3u}]$ als Tangente bzw. Kurvennormale hat. Damit liegen $A(s^*), f(s^*)$ und $b(s^*)$ sowie $A(s), f(s)$ und $b(s)$ fest, woraus über Integration der Gleichung (10.13) mit den Anfangsbedingungen

$$A(0) = \mathcal{M}_1, \quad f(0) = \mathcal{M}_2, \quad b(0) = \mathcal{M}_3 \quad \text{und} \quad \varphi(0) \dots P_0 \quad (10.17)$$

eine eindeutige Raumkurve c bestimmt ist. Wie im euklidischen Fall kann leicht nachgewiesen werden, daß diese eindeutige Lösungskurve c eine zulässige Parameterdarstellung abgibt. \square .

Kurven konstanter Krümmung sind insbesondere die isotropen

Kreise des galileischen Raumes G_3 . Kurven *konstanter Krümmung* κ und *konstanter Torsion* τ finden wir mit Hilfe von Satz 10.2: Die in (3.16) mit $b_1 \neq 0$ aufgetretene *Schraublinie* besitzt nämlich die Bogenlänge $x = b_1 \cdot t$, die Krümmung

$$\kappa^2(x) = \frac{y_0^2 + z_0^2}{b_1^4} = \text{konst.} \quad (10.18)$$

und die Torsion

$$\tau(x) = -\frac{1}{b_1} = \text{konst.} \quad (10.19)$$

Da durch jeden Punkt P_0 des galileischen Raumes eine Schraublinie c mit festem b_1 gefunden werden kann, die in P_0 ein beliebig vorgelegtes orthonormiertes Dreibein besitzt, sind nach Satz 10.2 die *Schraublinien des galileischen Raumes G_3 die einzigen Kurven mit (nichtverschwindender) konstanter Krümmung und Torsion.*

Werfen wir durch eine Bewegung aus der Gruppe B_6 den Punkt P_0 einer beliebigen zulässigen Raumkurve c in den Ursprung U , die Kurventangente in die x -Achse und die Hauptnormale h in die y -Achse unseres Koordinatensystems, und setzen wir nun c als analytisch voraus, so wird die Raumkurve c in der Umgebung des Punktes $P_0 = U$ durch die Reihenentwicklung

$$\begin{cases} y(x) = \frac{x^2}{2} \cdot \kappa(0) + \frac{x^3}{6} \cdot \kappa'(0) + \frac{x^4}{24} \cdot \kappa''(0) + \dots \\ z(x) = \frac{\kappa(0) \cdot \tau(0)}{6} \cdot x^3 + \frac{x^4}{24} \cdot [\tau'(0) \cdot \kappa(0) + 2 \cdot \tau(0) \cdot \kappa'(0)] + \dots \end{cases} \quad (10.20)$$

beschrieben. Die *Tangentenfläche* Φ von c besitzt die Darstellung

$$(x + \lambda, y(x) + \lambda \cdot y'(x), z(x) + \lambda \cdot z'(x)) \quad (10.21)$$

($\lambda \in (-\infty, +\infty)$) und schneidet die *Schmiegebene* σ_0 ($z = 0$) von c

im Punkt P_0 nach der ebenen Kurve \tilde{c}

$$\begin{cases} \tilde{x}(x) = x - \frac{z(x)}{z'(x)} \\ \tilde{y}(x) = y(x) - \frac{y'(x) \cdot z(x)}{z'(x)} \end{cases}, \quad (10.22)$$

die in der Umgebung von P_0 die Darstellung

$$\begin{cases} \tilde{x}(x) = \frac{2}{3} \cdot x + \dots \\ \tilde{y}(x) = \frac{x^2 \cdot \kappa(0)}{6} + \dots \end{cases} \quad (10.23)$$

besitzt. Für die Krümmung $\tilde{\kappa}(0)$ der ebenen Kurve \tilde{c} im Punkt P_0 finden wir so

$$\tilde{\kappa}(0) = \frac{3}{4} \cdot \kappa(0), \quad (10.24)$$

womit als Analogon zu einem Satz von BELTRAMI (vgl. [3, S. 31]) der folgende Satz bewiesen ist :

SATZ 10.3: Die Krümmung $\tilde{\kappa}$ des Schnittes \tilde{c} einer Torse mit einer Schmiegeebene ihrer zulässigen Gratlinie c in einem regulären Punkt P_0 beträgt im Punkt P_0 genau $\frac{3}{4}$ der Krümmung κ von c in P_0 .

Die zulässige Raumkurve c (10.20) besitzt im Punkt P_0 den Krümmungskreis k^*

$$y = \frac{\kappa(0)}{2} \cdot x^2, \quad (10.25)$$

durch den die einparametrische Schar von Punktkugeln

$$\kappa(0) \cdot \lambda \cdot x^2 - 2 \cdot \lambda \cdot y - 2 \cdot z = 0 \quad (\lambda \in (-\infty, +\infty)) \quad (10.26)$$

hindurchgeht, deren Spitzen S durch

$$(0:0:1:-\lambda) \quad (10.27)$$

festgelegt sind. Genau die in (10.26) durch

$$\lambda = - \frac{\kappa(0) \cdot \tau(0)}{\kappa'(0)} \quad (10.28)$$

festgelegte Punktkugel *hyperoskuliert* die Kurve c in P_0 . Sie wird *Schmiegekugel* von c in P_0 genannt und besitzt die Spitze

$$S \cdot (0:0:\kappa'(0):\kappa(0) \cdot \tau(0)) = (0:0:y'''(0):z'''(0)), \quad (10.29)$$

die Gleichung

$$\frac{\kappa^2(0) \cdot \tau(0)}{\kappa'(0)} \cdot x^2 - 2 \cdot \frac{\kappa(0) \cdot \tau(0)}{\kappa'(0)} \cdot y + 2 \cdot z = 0 \quad (10.30)$$

und den Radius

$$R = - \frac{\kappa'(0)}{\kappa^2(0) \cdot \tau(0)} \cdot \sqrt{1 + \frac{\kappa^2(0) \cdot \tau^2(0)}{\kappa'^2(0)}} \quad (10.31)$$

(10.31) ist gleichwertig mit

$$\kappa^4(0) \cdot \tau^2(0) \cdot R^2 = \kappa'^2(0) + \kappa^2(0) \cdot \tau^2(0). \quad (10.32)$$

Nehmen wir umgekehrt eine beliebige sphärische Kurve s mit

$$y(x) = f(x) \in C^3, \quad z = \frac{x^2}{2 \cdot R} \quad (10.33)$$

auf der Kugel $z = \frac{x^2}{2 \cdot R}$ an, so erhalten wir als *natürliche Gleichungen* einer sphärischen Kurve mit

$$\begin{cases} \kappa^2(x) = f''^2(x) + \frac{1}{R^2} \\ \tau(x) = - \frac{f'''(x)}{R \cdot [f''^2(x) + \frac{1}{R^2}]} \end{cases} \quad (10.34)$$

die Beziehung

$$\kappa'^2(x) + \kappa^2(x) \cdot \tau^2(x) = R^2 \cdot \kappa^4(x) \cdot \tau^2(x). \quad (10.35)$$

Ein Vergleich von (10.35) mit (10.32) zeigt, daß die Konstanz des Schmiegkugelradius für eine sphärische Kurve schon hinreichend ist.²³⁾

²³⁾ Man vergleiche das analoge Resultat für den euklidischen Raum ([7, S. 39]) und für den Flaggenraum ([14, S. 137]).

§ 11 BEGLEITBEWEGUNG EINER RAUMKURVE DES GALILEISCHEN RAUMES

Wir betrachten eine zulässige Raumkurve c des galileischen Raumes G_3 im *kanonischen Koordinatensystem* (10.20) und versuchen, im Punkt $P_0 = U$ zu c eine oskulierende Schraubung zu finden. Dabei müssen für die Bahnschraublinie s des Punktes U die folgenden Anfangsbedingungen erfüllt sein :

$$\begin{cases} x(0) = y(0) = z(0) = 0, \\ x'(0) = 1, \quad y'(0) = z'(0) = 0, \\ y''(0) = \kappa(0), \quad z''(0) = 0, \quad z'''(0) = \kappa(0) \cdot \tau(0). \end{cases} \quad (11.1)$$

Ziel ist es, $b_1 \dots b_6$ aus (3.7) so zu bestimmen, daß die Bahnschraublinie von U bei (3.7) bis in dritter Differentiationsordnung mit der Raumkurve c übereinstimmt. Wir erhalten die Bedingungen

$$\begin{cases} y'(0) = \frac{b_2}{b_1} = 0, \quad z'(0) = \frac{b_4}{b_1}, \quad \text{d.h. } b_2 = b_4 = 0, & (11.2) \\ y''(0) = \frac{b_3}{b_1} = \kappa(0), \quad z''(0) = \frac{b_5}{b_1} = 0, \quad \text{d.h. } b_5 = 0 \text{ und} & (11.3) \\ z'''(0) = -\frac{b_6 \cdot b_3}{b_1^2} = \kappa(0) \cdot \tau(0), \quad \text{d.h. } \tau(0) = -\frac{b_6}{b_1}. & (11.4) \end{cases}$$

Die *oskulierende Schraubung* besitzt demnach die infinitesimale Transformation

$$X_1 + \kappa(0) \cdot X_3 - \tau(0) \cdot X_6 \quad (11.5)$$

und läßt sich mit den Abkürzungen $\kappa(0) = \kappa_0$ sowie $\tau(0) = \tau_0$ durch

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + t \\ y(t) = \frac{1}{\tau_0} \cdot \left\{ \frac{\kappa_0}{\tau_0} + \left(\tau_0 y_0 - \frac{\kappa_0}{\tau_0} \right) \cdot \cos \tau_0 t + (\kappa_0 x_0 - \tau_0 z_0) \cdot \sin \tau_0 t \right\} \\ z(t) = \frac{1}{\tau_0} \cdot \left\{ \kappa_0 x_0 + \kappa_0 t + \left(\tau_0 y_0 - \frac{\kappa_0}{\tau_0} \right) \sin \tau_0 t - (\kappa_0 x_0 - \tau_0 z_0) \cdot \cos \tau_0 t \right\} \end{cases} \quad (11.6)$$

darstellen ($\tau_0 \neq 0$). Zum Zeitpunkt $t = 0$ besitzen die Punkte Bahntangenten der Richtung

$$A(x_0, y_0, z_0) = (1, \kappa_0 \cdot x_0 - \tau_0 \cdot z_0, \tau_0 \cdot y_0). \quad (11.7)$$

Punkte, die zum Zeitpunkt $t = 0$ keine Beschleunigung erfahren, sind durch

$$\begin{cases} y''(0) = -\tau_0 \cdot (\tau_0 \cdot y_0 - \frac{\kappa_0}{\tau_0}) = 0 \\ z''(0) = \tau_0 \cdot (\kappa_0 \cdot x_0 - \tau_0 \cdot z_0) = 0 \end{cases} \quad (11.8)$$

gekennzeichnet. Sie bestimmen für $\tau_0 \neq 0$ die *Schmiegschraubachse* a

$$(\lambda \cdot \tau_0, \frac{\kappa_0}{\tau_0} \lambda, \lambda \cdot \kappa_0) \quad (\lambda \in (-\infty, +\infty)), \quad (11.9)$$

deren Richtung durch den *DARBOUX-Vektor*

$$\mathcal{N}^{\mathcal{J}} = (\tau_0, 0, \kappa_0) = \tau_0 \cdot A(0) + \kappa_0 \cdot b(0) \quad (11.10)$$

gegeben ist. Die Schmiegschraubachse a trifft die Schmiegeebene ($z = 0$) der Raumkurve c in P_0 im Punkt

$$A \dots (0, \frac{\kappa_0}{\tau_0} \lambda, 0), \quad (11.11)$$

der der Hauptnormalen h angehört. Die *Begleitbewegung* besitzt demnach im Gangsystem (begleitendes Dreibein !) Momentanachsen, die stets parallel zur *rektifizierenden Ebene* $[t, b]$ sind und die Hauptnormale h treffen. Bezeichnen wir die Momentanachsenflächen als *Rast- und Gangaxoid*, so haben wir analog zum euklidischen Ergebnis (vgl. E. KRUPPA [29, S. 184 f.]) den

SATZ 11.1: Die Begleitbewegung einer zulässigen Raumkurve c des galileischen Raumes \mathbb{G}_3 mit $\tau(x) \neq 0$ wird von Momentan-

schraubungen erzeugt, deren Achsen im begleitenden Dreibein ein gerades Konoid bilden, dessen Richtebene die rektifizierende Ebene und dessen eigentliche Leitgerade die Kurvenhauptnormale ist.

Bei der Begleitbewegung werden die Punkte (x_0, y_0, z_0) des begleitenden Dreibeins auf Bahnkurven geführt, die zum Zeitpunkt $t = 0$ Tangenten der Richtung (11.7) besitzen. Da die Momentanschraubung auch als euklidische Schraubung eines geeignet gewählten euklidischen Raumes E_3 aufgefaßt werden kann, erübrigt sich eine Untersuchung des momentanen Schraubtangentenkomplexes. Die $U = P_0$ enthaltenden Schraubtangenten bilden den Kegel zweiter Ordnung Γ

$$\kappa_0 \cdot z = \tau_0 \cdot (y^2 + z^2), \quad (11.12)$$

der im Sinne des galileischen Raumes G_3 als Drehkegel aufzufassen ist. Er berührt die Schmiegebene σ_0 ($z = 0$) längs der Kurventangente t . Die Erzeugenden dieses Kegels bilden bei der Begleitbewegung $\mathcal{V}(x)$ auf ihren Bahnregelflächen momentan Torsalerzeugenden. Dieser Kegel Γ ist bei der gesamten Begleitbewegung genau dann im Gangraum stationär, wenn

$$\kappa(x) : \tau(x) = \text{konst.} \in \mathbb{R} \text{ für alle } x \in (-\infty, +\infty) \quad (11.13)$$

gilt, die Ausgangskurve also eine Böschungslinie ist. Umgekehrt gibt es im Gangraum der Begleitbewegung $\mathcal{V}(x)$ von c in dem Fall, daß c Böschungslinie ist, stets einen solchen Drehkegel, dessen Geraden bei der Begleitbewegung Torsen beschreiben, womit eine weitere Kennzeichnung der Böschungslinien des galileischen Raumes G_3 gefunden ist. Der Kegel Γ ist als Analogon des Kegels von APELL (vgl. W. BLASCHKE [3, S.200]) anzusehen. Damit haben wir den

SATZ 11.2: Bei der Begleitbewegung $\mathcal{F}(x)$ einer zulässigen Raumkurve c des galileischen Raumes \mathbb{G}_3 mit $\tau(x) \neq 0$ existiert in jedem Augenblick x_0 ein Drehkegel Γ , dessen Erzeugenden den Kurvenpunkt $P(x_0)$ enthalten und die bei $\mathcal{F}(x_0)$ Torsallinien ihrer Bahnregelflächen durchlaufen. Dieser Kegel Γ ist im begleitenden Dreibein genau dann stationär, wenn die Raumkurve c eine Böschungslinie ist.

Wird bei der Begleitbewegung $\mathcal{F}(x)$ längs einer zulässigen Raumkurve c mit $\tau(x) \neq 0$ eine im Dreibein feste Gerade g

$$a \cdot \mathcal{A}(x) + b \cdot \mathcal{F}(x) + c \cdot \mathcal{B}(x) + \lambda \cdot [\alpha \cdot \mathcal{A}(x) + \beta \cdot \mathcal{F}(x) + \gamma \cdot \mathcal{B}(x)] \quad (11.14)$$

($a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\lambda \in (-\infty, +\infty)$) mitgenommen, so überstreicht sie eine Regelfläche $\Phi(g)$

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda) &= \varphi(x) + a \cdot \mathcal{A}(x) + b \cdot \mathcal{F}(x) + c \cdot \mathcal{B}(x) + \\ &+ \lambda \cdot [\alpha \cdot \mathcal{A}(x) + \beta \cdot \mathcal{F}(x) + \gamma \cdot \mathcal{B}(x)] = \\ &= \eta(x) + \lambda \cdot \mathcal{d}(x), \end{aligned} \quad (11.15)$$

die genau dann eine *Torse* ist, wenn für alle x

$$\det(\eta'(x), \mathcal{d}(x), \mathcal{d}'(x)) = 0 \quad (11.16)$$

gilt. Eine Gerade g dieser Art soll *CESARO-Gerade* heißen.²⁴⁾ Zusammen mit den Ableitungsgleichungen (10.7) liefert diese Bedingung (11.16) die folgende Beziehung

$$\frac{A}{\kappa(x)} + \frac{B}{\tau(x)} + C + \frac{\tau(x)}{\kappa(x)} \cdot D = 0 \quad (11.17)$$

zwischen $\kappa(x)$ und $\tau(x)$, wobei $A, B, C, D = \text{konst.} \in \mathbb{R}$ mit

²⁴⁾ Man vergleiche das entsprechende euklidische Resultat bei E. CESARO [20, S. 189 ff.].

$$A:B:C:D = \beta^2 + \gamma^2 : -\alpha \cdot \gamma : \alpha \cdot (\alpha \cdot b - a \cdot \beta) : \alpha \cdot (\beta \cdot c - b \cdot \gamma) \quad (11.18)$$

gesetzt wurde. Im begleitenden Dreibein besitzt die Gerade g (11.14) die Plückerkoordinaten

$$\begin{cases} p_{01} = \alpha, & p_{02} = \beta, & p_{03} = \gamma, \\ p_{12} = a \cdot \beta - \alpha \cdot b, & p_{13} = a \cdot \gamma - \alpha \cdot c, & p_{23} = b \cdot \gamma - \beta \cdot c, \end{cases} \quad (11.19)$$

woraus wir

$$A:B:C:D = p_{02}^2 + p_{03}^2 : -p_{01} \cdot p_{03} : -p_{01} \cdot p_{12} : -p_{01} \cdot p_{23} \quad (11.20)$$

gewinnen. Für die Plückerkoordinaten von g ergibt sich aus der CESARO-Bedingung (11.17) die Gleichung

$$\begin{aligned} & \tau(x) \cdot (p_{02}^2 + p_{03}^2) - \tau^2(x) \cdot p_{01} \cdot p_{23} - \kappa(x) \cdot p_{01} \cdot p_{03} - \\ & - \kappa(x) \cdot \tau(x) \cdot p_{01} \cdot p_{12} = 0, \end{aligned} \quad (11.21)$$

die genau den Tangentenkomplex der oskulierenden Schraubung zum Zeitpunkt x darstellt.

Existiert zwischen der Krümmung $\kappa(x)$ und der Torsion $\tau(x)$ kein Zusammenhang der Art (11.17), so ergeben sich CESARO - Geraden nur für $A = B = C = D = 0$, also

$$p_{02}^2 + p_{03}^2 = p_{01} \cdot p_{03} = p_{01} \cdot p_{12} = p_{01} \cdot p_{23} = 0. \quad (11.22)$$

Diskussion von (11.22) ergibt, daß $p_{01} = 0$ keine reellen Lösungsgeraden liefert. Für $p_{01} \neq 0$ stellt sich gemäß (11.19)

$$\alpha \neq 0, \quad \beta = \gamma = 0, \quad b = 0 \quad (11.23)$$

ein, wodurch alle in der Schmiegeebene σ_0 von P_0 gelegenen und zur Kurventangente parallelen Geraden erfaßt werden. Wir haben damit den

SATZ 11.3: Im begleitenden Dreibein einer zulässigen Raumkurve c des galileischen Raumes G_3 mit $\tau(x) \neq 0$ existiert im allgemeinen genau eine Schar von CESARO-Geraden: Es sind dies die zur Kurventangente parallelen Geraden in der Schmiegebene.

Weitere CESARO-Geraden existieren genau dann, wenn die CESARO-Bedingung (11.17) mit $(A:B:C:D) \neq (0:0:0:0)$ erfüllt ist. Diese Geraden liegen offensichtlich im quadratischen Schraubtangentialkomplex (11.21) und in den sechs weiteren Komplexen

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_1 \dots B \cdot (p_{02}^2 + p_{03}^2) + A \cdot p_{01} \cdot p_{03} &= 0 \\
 \mathcal{R}_2 \dots C \cdot p_{01} \cdot p_{03} - B \cdot p_{01} \cdot p_{12} &= 0 \\
 \mathcal{R}_3 \dots D \cdot p_{01} \cdot p_{03} - B \cdot p_{01} \cdot p_{23} &= 0 \\
 \mathcal{R}_4 \dots D \cdot p_{01} \cdot p_{12} - C \cdot p_{01} \cdot p_{23} &= 0 \\
 \mathcal{R}_5 \dots C \cdot (p_{02}^2 + p_{03}^2) + A \cdot p_{01} \cdot p_{12} &= 0 \\
 \mathcal{R}_6 \dots D \cdot (p_{02}^2 + p_{03}^2) + A \cdot p_{01} \cdot p_{23} &= 0 .
 \end{aligned}
 \tag{11.24}$$

Im Fall $p_{01} = 0$ erhalten wir wie vorhin keine reellen Lösungen, außer wenn gleichzeitig $B = C = D = 0$ gilt. Dann liegt aber mit (11.17) als Raumkurve bloß ein einziger Punkt vor, was im folgenden auszuschließen ist.

Im Fall $p_{01} \neq 0$ erkennt man nach kurzer Rechnung für den Normalfall $A \cdot B \cdot C \cdot D \neq 0$, daß je drei dieser Komplexe in einem gemeinsamen Komplexbüschel liegen, und man sich daher bei der Bestimmung von CESARO-Geraden auf das Aufsuchen des Schnittes von $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ mit dem Schraubtangentialkomplex (11.21) beschränken kann. \mathcal{R}_1 ist der quadratische Treffgeradenkomplex des Fernkreises

$$k_u \dots x_0 = 0, \quad B \cdot (x_2^2 + x_3^2) + A \cdot x_1 \cdot x_3 = 0, \tag{11.25}$$

\mathcal{R}_2 und \mathcal{R}_3 sind lineare Komplexe, die eine lineare Kongruenz \mathcal{K} gemeinsam haben, deren Leitgeraden n_1 und n_2 durch

$$\begin{cases} n_1 \dots (\lambda \cdot B, 0, -\frac{D}{B}) , & (\lambda \in (-\infty, +\infty)) \\ n_2 \dots (\lambda \cdot \frac{B \cdot C}{D}, 0, -B \cdot \lambda) \end{cases} \quad (11.26)$$

gegeben sind, wobei sich zeigt, daß n_1 den Fernkreis k_u trifft. \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 und \mathcal{R}_3 schneiden sich somit im allgemeinen nach den Erzeugenden einer Regelfläche vierter Ordnung, die von einer (2,2) - Korrespondenz zwischen n_1 und n_2 erzeugt wird. Wir haben damit im Gegensatz zum euklidischen Resultat (vgl. E. CESARO [20, S. 190] den folgenden

SATZ 11.4: Zu jeder zulässigen Raumkurve c des galileischen Raumes G_3 , die der CESARO-Bedingung (11.17) genügt, existiert im allgemeinen eine im begleitenden Dreibein von c feste Regelfläche vierter Ordnung, deren Erzeugenden bei der Begleitbewegung längs c Torsen beschreiben.²⁵⁾

Dies war der Normalfall. Es sind noch folgende Ausartungsfälle möglich :

Fall 1 : $A = 0$: Dann gilt für $g : \beta = \gamma = 0$, was g als Parallele zur Kurventangente kennzeichnet. Da g obendrein noch die Geraden n_1 und n_2 (11.26) treffen muß, gibt es nur eine einzige Lösungsgerade. Dazu kommen wie in allen anderen Fällen noch die in Satz 11.3 erwähnten Parallelen zur Kurventangente in der Schmiegebene.

²⁵⁾ Dem gegenüber gilt nach H. BRAUNER im Flaggenraum $I_3^{(2)}$ [14, S. 140], daß im allgemeinen eine Geradenkongruenz von CESARO-Geraden existiert (vgl. auch die Verallgemeinerung von H. SACHS [52]). An diesem Ergebnis ist deutlich zu sehen, daß der galileische Raum ein Bindeglied zwischen dem euklidischen Raum und dem Flaggenraum darstellt.

Fall 2 : $A \neq 0, B=0$: Mit (11.18) gilt $\alpha \cdot \gamma = 0$. $\alpha = 0$ bedeutet $B=C=D=0$, was schon betrachtet wurde. $\gamma = 0$ kennzeichnet g als Gerade parallel zur Schmiegebene. Die Diskussion der Komplexe (11.24) vereinfacht sich nun erheblich ; es bleiben

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_4 \dots D \cdot p_{12} - C \cdot p_{23} &= 0 \\ \mathcal{R}_5 \dots C \cdot p_{02}^2 + A \cdot p_{01} \cdot p_{12} &= 0 \quad \text{und} \\ \mathcal{R}_6 \dots D \cdot p_{02}^2 + A \cdot p_{01} \cdot p_{23} &= 0, \end{aligned} \tag{11.27}$$

wobei \mathcal{R}_4 in $[\mathcal{R}_5, \mathcal{R}_6]$ enthalten ist und daher die CESARO-Geraden in diesen Fall einer *linearen Kongruenz* angehören.

Fall 3: $A \cdot B \neq 0, C = 0$: Dieser Fall ist zum allgemeinen zu zählen; die CESARO-Geraden erfüllen eine Regelfläche vierter Ordnung. Gilt überdies $D = 0$, so ist c eine Böschungslinie, und wir erhalten $p_{12} = p_{23} = 0$. Die CESARO-Geraden erfüllen den Kegel von APELL und zwei Parallelstrahlbüschel in der rektifizierenden Ebene.

Fall 4: $A \cdot B \cdot C \neq 0, D = 0$: Die Leitgeraden n_1 und n_2 fallen zusammen; die CESARO-Geraden gehören einer *Regelfläche vierter Ordnung* an, die in einem *parabolischen Netz* mit der Leitgeraden $n_1 = n_2$ liegt.

§ 12 BERTRAND'SCHE KURVENPAARE

Die von den Hauptnormalen $h(x)$ einer zulässigen Raumkurve c des galileischen Raumes G_3 gebildete *Hauptnormalenfläche* $H(c)$ ist konoidal mit der absoluten Geraden f als Leitgeraden. $H(c)$ wird durch

$$\varphi(x, \lambda) = \varphi(x) + \lambda \cdot f(x) \quad \lambda \in (-\infty, +\infty) \quad (12.1)$$

parametrisiert, wenn $\varphi(x) = (x, y(x), z(x))$ die Raumkurve c darstellt. Die Raumkurve c ist *Schmiegleinie* auf $H(c)$, da die Schmiegeebenen $\sigma(x)$ der Raumkurve c mit den entsprechenden Tangentialebenen von $H(c)$ übereinstimmen. $H(c)$ ist für nichtebene Kurven c windschief und besitzt genau in jenen Hauptnormalen $h(x)$ Torsalerzeugende, in denen $\tau(x) = 0$ gilt, und somit c an der Stelle x einen *Henkelpunkt* besitzt.

Zwei zulässige Raumkurven c und \bar{c} des galileischen Raumes mit gemeinsamer Hauptnormalenfläche $H(c) = H(\bar{c})$ sollen *BERTRAND-Kurven* heißen. Im Gegensatz zum euklidischen und zum einfach isotropen Raum (vgl. [3, S. 19 f.] und [59, S. 28]) gibt es im galileischen Raum G_3 so wie im Flaggenraum $I_3^{(2)}$ (vgl. [14, S. 141]) zu jeder Raumkurve stets eine einparametrische Schar von BERTRAND-Kurven.

Setzen wir $\lambda = \lambda(x)$ in (12.1), und versuchen wir, eine BERTRAND-Kurve zu c zu kennzeichnen: Evidentlich muß

$$\frac{d^2 \varphi(x, \lambda(x))}{dx^2} = \rho(x) \cdot f(x) \quad \text{mit} \quad \rho(x) \in \mathbb{R} - 0 \quad (12.2)$$

gelten, was auf die Gleichung

$$\frac{y''(x) \cdot [\kappa(x) + \lambda''(x) - \lambda(x) \cdot \tau^2(x)] - z''(x) \cdot [2 \cdot \lambda'(x) \cdot \tau(x) + \lambda(x) \cdot \tau'(x)]}{z''(x) \cdot [\kappa(x) + \lambda''(x) - \lambda(x) \cdot \tau^2(x)] + y''(x) \cdot [2 \cdot \lambda'(x) \cdot \tau(x) + \lambda(x) \cdot \tau'(x)]} = \frac{y''(x)}{z''(x)} \quad (12.3)$$

und schließlich auf

$$[y''(x)^2 + z''(x)^2] \cdot [2 \cdot \lambda'(x) \cdot \tau(x) + \lambda(x) \cdot \tau'(x)] = 0 \quad (12.4)$$

führt. Unter der Voraussetzung, daß c zulässig ist, besitzt die Differentialgleichung (12.4) die Lösungen

$$\lambda^2(x) = \frac{K}{\tau(x)}, \quad (12.5)$$

wobei K eine reelle Integrationskonstante bedeutet. Damit existiert zu jeder zulässigen Raumkurve c des galileischen Raumes eine einparametrische Schar von BERTRAND - Kurven, die von den nichtgeradlinigen Schmieglinien der gemeinsamen Hauptnormalenfläche $H(c)$ gebildet werden.

Mit (12.3) nimmt dann $\rho(x)$ die Gestalt

$$\rho(x) = \kappa(x) + \lambda''(x) - \lambda(x) \cdot \tau^2(x) \quad (12.6)$$

an, womit sich die Krümmung $\bar{\kappa}(x)$ und die Torsion $\bar{\tau}(x)$ der BERTRAND-Kurve \bar{c} als

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\kappa}(x) = \rho(x) \cdot \kappa(x) \\ \bar{\tau}(x) = \rho(x) \cdot \tau(x) \end{array} \right. \quad (12.7)$$

errechnen. Da $\lambda(x)$ den auf der gemeinsamen Hauptnormalen $h(x)$ gemessenen Abstand zwischen c und \bar{c} angibt, und sich der Winkel $\varphi(x)$ der Tangenten von c und \bar{c} in entsprechenden Punkten zu

$$\varphi(x) = \kappa(x) \cdot \sqrt{\lambda'(x)^2 + K^2 \cdot \tau(x)} \quad (12.8)$$

berechnet, erhalten wir als Analogon zu einem aus der euklidischen Theorie bekannten Resultat die Aussage, daß BERTRAND-Kurvenpaare, bei denen der Abstand entsprechender Punkte und der Winkel entsprechender Kurventangenten konstant ist, mit den *Schraublinien* des galileischen Raumes identisch sind (vgl. [7, S. 40 ff.]).

§ 13 EVOLVENTEN UND EVOLUTEN

Als *Filarevolventen* $f(\alpha)$ einer zulässigen Raumkurve c des galileischen Raumes mit $\tau(x) \neq 0$ werden die Orthogonal - trajektorien der Tangentenfläche von c bezeichnet (vgl. [29, S. 70]); c heißt *Filarevolute* von $f(\alpha)$. Die Filarevolventen sind hier zu den Schnitten der Tangentenfläche von c mit den euklidischen Ebenen $x = \alpha \in \mathbb{R}$ entartet und besitzen die Darstellung

$$f(\alpha, x) = p(x) + (\alpha - x) \cdot A(x). \quad (13.1)$$

Die rektifizierende Ebene $[t, b]$ der Ausgangskurve c ist eine Ebene normal zu $f(\alpha)$. Verdreht man die Kurventangenten $t(x)$ in den entsprechenden rektifizierenden Ebenen $[t(x), b(x)]$ um ihren Schnittpunkt mit einer festen Filarevolvente $f(\alpha)$ um den Winkel $\beta(x)$, so entsteht die Regelfläche

$$r_{\alpha, \beta(x)}(x, \lambda) = f(\alpha, x) + \lambda \cdot [\kappa(x) \cdot A(x) + \beta(x) \cdot b(x)], \quad (13.2)$$

die genau dann eine Torse ist, wenn

$$\det[f'(\alpha, x), \kappa(x) \cdot A(x) + \beta(x) \cdot b(x), (\kappa(x) \cdot A(x) + \beta(x) \cdot b(x))'] = 0 \quad (13.3)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Die Auswertung der Gleichung (13.3) liefert die Beziehung

$$\kappa(x) \cdot (\alpha - x) \cdot [\beta(x) \cdot \kappa'(x) - \beta'(x) \cdot \kappa(x)] = 0, \quad (13.4)$$

womit die Torsen für

$$\beta(x) = \kappa(x) \cdot K \quad (K = \text{konst.} \in \mathbb{R} - 0) \quad (13.5)$$

gewonnen werden. Die rektifizierende Ebene $[t, b]$ ist eine iso-

trope Ebene des galileischen Raumes G_3 . Mißt man den Drehwinkel im *isotropen Sinn* ($\omega(x) = \frac{\beta(x)}{\kappa(x)}$), so erhält man Torsen, wenn der *isotrope Drehwinkel konstant ist*.²⁶⁾ In Übereinstimmung mit [14, S. 143] und [29, S. 70] erhalten wir damit den

SATZ 13.1: *Dreht man jede Tangente einer zulässigen Raumkurve c des galileischen Raumes G_3 in den rektifizierenden Ebenen ε um ihre Schnittpunkte mit einer festen Filarevolvente $f(\alpha)$ um einen im Sinne der in ε herrschenden isotropen Metrik konstanten Winkel ω , so erhält man für jedes $\omega \in \mathbb{R}$ eine Torse. Die Kurve $f(\alpha)$ ist dann auch Filarevolute der Gratlinien aller so gefundenen Torsen.*

Nur ebene Kurven c in euklidischen Ebenen des galileischen Raumes G_3 besitzen Filarevoluten; es sind dies die Gratlinien aller durch c legbaren Torsen des galileischen Raumes G_3 .

Als *Planevolventen* einer zulässigen Raumkurve c des galileischen Raumes G_3 mit $\tau(x) \neq 0$ bezeichnet man die zweiparametrische Schar von Orthogonaltrajektorien der Schmiegebene von c (vgl. [29, S. 70]). Sie sind durch

$$\eta(x, u(x), v(x)) = \varphi(x) + u(x) \cdot A(x) + v(x) \cdot f(x) \quad (13.6)$$

mit $u(x), v(x) \in C^1$ und

$$\frac{d\eta(x, u(x), v(x))}{dx} = \lambda(x) \cdot b(x) \quad (\lambda(x) \in C) \quad (13.7)$$

gekennzeichnet. Sie besitzen damit die Darstellung (13.6) mit

²⁶⁾ Es ist ganz entscheidend, daß hier der isotrope Drehwinkel betrachtet wird, obwohl er nicht B_6 - invariant ist !

den Zusatzbedingungen

$$\begin{cases} u(x) = K - x \\ v(x) = \int \kappa(x) \cdot (K - x) dx, \end{cases} \quad (13.8)$$

in denen K eine reelle Integrationskonstante ist.

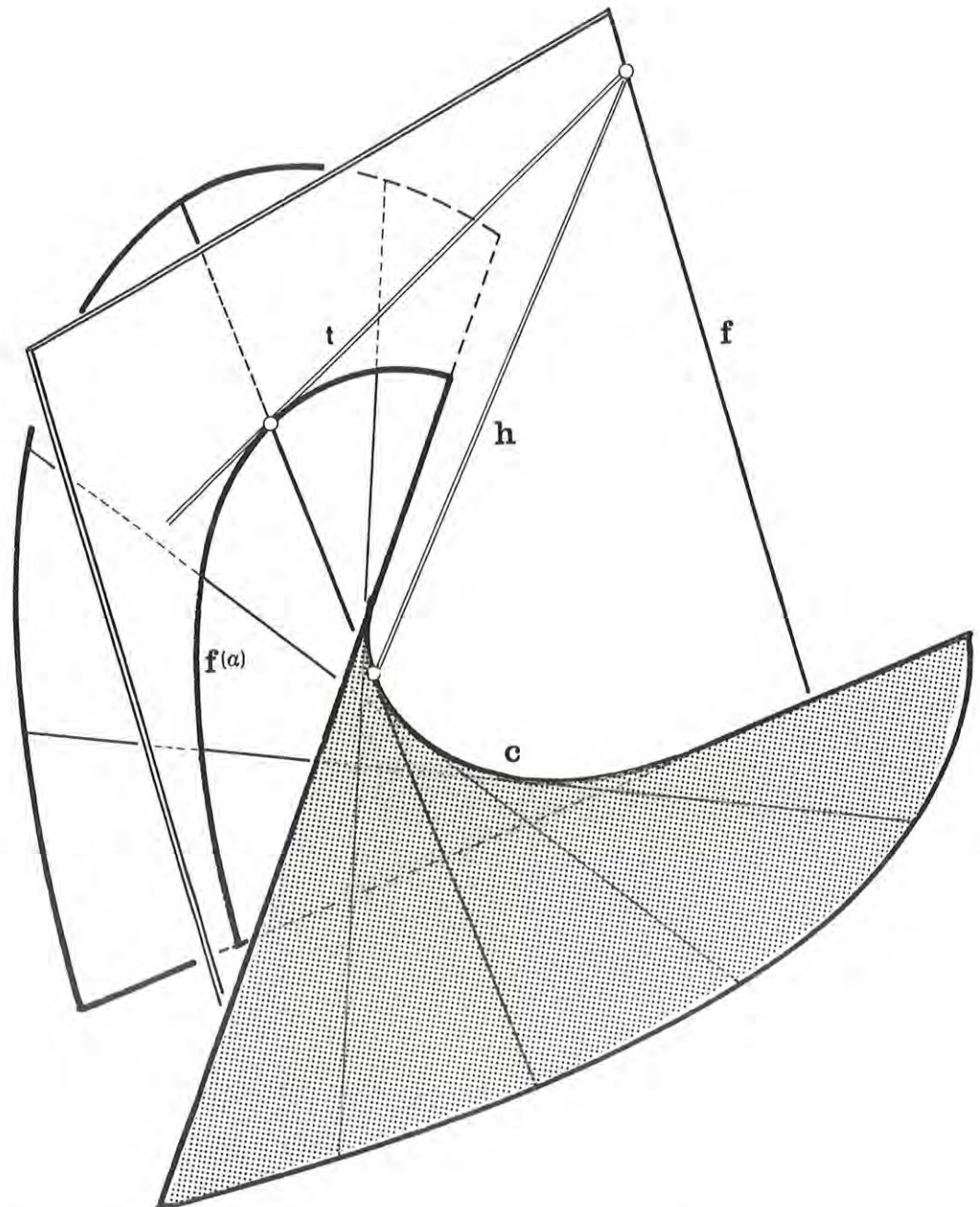


Abbildung 5 : Filarevolvente $f(\alpha)$ einer Raumkurve c

§ 14 REGELFLÄCHEN DES GALILEISCHEN RAUMES G_3 : VOLLSTÄNDIGE INVARIANTENSYSTEME

Sei Φ eine durch die Leitkurve $l \dots \varphi = \varphi(v)$ und den Erzeugendenvektor $\alpha(v)$ gegebene Regelfläche

$$\begin{aligned} \eta(u,v) &= \varphi(v) + u \cdot \alpha(v) = \\ &= (x(v), y(v), z(v)) + u \cdot (a_1(v), a_2(v), a_3(v)) \end{aligned} \quad (14.1)$$

$(\eta_u(u,v) \times \eta_v(u,v) \neq \emptyset; a_i(v), x(v), y(v), z(v) \in C^3, i = 1, 2, 3; u \in (-\infty, +\infty), v \in I \subset \mathbb{R}).$ ²⁷⁾ Dabei kann die Leitkurve l ohne Beschränkung der Allgemeinheit außerhalb einer euklidischen Ebene des galileischen Raumes G_3 angenommen werden, was es gestattet, l auf die Bogenlänge $x = v$ zu beziehen. Nun sind im galileischen Raum G_3 ersichtlich *drei Typen von Regelflächen* getrennt zu diskutieren :

Typ A: Nichtkonoidale Regelflächen oder konoidale Regelflächen mit nichtabsoluter Fernleitgeraden, deren *Striktionslinie* in keiner euklidischen Ebene des galileischen Raumes G_3 enthalten ist.

Typ B: Regelflächen, deren Striktionslinie in einer euklidischen Ebene des galileischen Raumes G_3 enthalten ist.

Typ C: Konoidale Regelflächen mit der absoluten Geraden als Fernleitgeraden.

Für alle drei Typen sollen im folgenden vollständige Invariantensysteme angegeben werden.

²⁷⁾ Dabei wurde $\frac{d\varphi(u)}{du} = \varphi_u$ und $\frac{d\varphi(v)}{dv} = \varphi_v$ gesetzt.

TYP A

Wir können voraussetzen, daß die Fläche nur isolierte isotrope Erzeugende trägt, die wir im folgenden von unseren Betrachtungen ausschließen. Es kann daher $\alpha(x)$ in einem Intervall $I_1 \subset I \subset \mathbb{R}$ zu

$$\alpha(x) = (1, a_2(x), a_3(x)) \quad (14.2)$$

normiert werden. Die Fernkurve Φ_u von Φ besitzt dann die Darstellung

$$(0:1:a_2(x):a_3(x)), \quad (14.3)$$

womit die *asymptotische Ebene* der Erzeugenden $e(x)$ ($x = \text{konst.} \in I_1$) den Pol

$$A_u(x) \dots (0:0:a_2'(x):a_3'(x)) \quad (14.4)$$

besitzt; im folgenden bezeichnen wir mit Strichen Ableitungen nach der Bogenlänge x der Leitkurve. In einem beliebigen Punkt P ($x = x_0, u = u_0$) der Erzeugenden $e(x_0)$ wird die Tangentialebene τ_P von Φ bekanntlich von

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta'(x_0, u_0) = (1, y'(x_0), z'(x_0)) + u_0 \cdot (0, a_2'(x_0), a_3'(x_0)) \\ \text{und } \eta_u(x_0, u_0) = (1, a_2(x_0), a_3(x_0)) \end{array} \right. \quad (14.5)$$

aufgespannt. Als Pol T_P von τ_P erhalten wir damit

$$\begin{aligned} T_P \dots (0:0:y'(x_0) - a_2(x_0) + u_0 \cdot a_2'(x_0) : \\ : z'(x_0) - a_3(x_0) + u_0 \cdot a_3'(x_0)), \end{aligned} \quad (14.6)$$

der genau für die durch

$$\Delta(x_0) = \det [\varphi'(x_0), \alpha(x_0), \alpha'(x_0)] = 0 \quad (14.7)$$

gekennzeichneten Torsalerzeugenden von u_0 unabhängig ist. In allen anderen Fällen ist T_P genau für jenen Punkt $S(x_0)$ auf der Erzeugenden $e(x_0)$ zum Pol A_u (14.4) der asymptotischen Ebene orthogonal, für den

$$s_0 = u_0 = - \frac{a_2'(x_0)[y'(x_0) - a_2(x_0)] + a_3'(x_0)[z'(x_0) - a_3(x_0)]}{a_2'^2(x_0) + a_3'^2(x_0)} \quad (14.8)$$

gilt. $S(x_0)$ soll *Striktionspunkt* auf der Erzeugenden $e(x_0)$ genannt werden. Die *Striktionslinientangente* besitzt im Punkt P den Richtungsvektor

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) = & (1, y'(x_0), z'(x_0)) + s_0 \cdot (0, a_2'(x_0), a_3'(x_0)) + \\ & + s_0' \cdot (1, a_2(x_0), a_3(x_0)) \end{aligned} \quad (14.9)$$

und schließt mit dem Erzeugendenvektor $\mathcal{A}(x_0)$ den Winkel $\sigma(x_0)$

$$\sigma(x_0) = \frac{\sqrt{[y'(x_0) - a_2(x_0) + s_0(x_0)a_2'(x_0) + s_0'(x_0)a_2(x_0)]^2 + [z'(x_0) - a_3(x_0) + s_0(x_0)a_3'(x_0) + s_0'(x_0)a_3(x_0)]^2}}{\quad} \quad (14.10)$$

ein; $\sigma(x_0)$ bezeichnen wir als *Striktion*. Genau dann, wenn für x_0 die Striktionslinientangente eine isotrope Gerade ist, ist die Striktion nicht erklärt. Die Striktionslinie liegt daher in einer euklidischen Ebene des galileischen Raumes G_3 , wenn

$$s_0(x) = K - x \quad \text{für alle } x \in I_1 \quad (14.11)$$

mit einer reellen Konstanten gilt. Diesem Fall wenden wir uns später bei der Betrachtung des Typs B zu. In allen anderen Fällen ist es möglich, die Striktionslinie als Leitlinie zu wählen. Bezeichnen wir mit

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_1(x) = \mathcal{A}(x) \text{ den Erzeugendenvektor,} \\ \mathcal{M}_2(x) = \frac{1}{\alpha(x)} \cdot \mathcal{A}'(x) \text{ den Zentralnormalenvektor und} \\ \mathcal{M}_3(x) = \frac{1}{\alpha(x)} \cdot (0, -a_3'(x), a_2'(x)) \text{ den Zentraltangenten-} \\ \text{vektor und mit} \\ \alpha(x) = \sqrt{a_2'^2(x) + a_3'^2(x)} \text{ die Krümmung,} \end{array} \right. \quad (14.12)$$

so haben wir gemäß [23, S. 15] ein *begleitendes Dreibein* zur Erzeugenden $e(x)$ konstruiert. $\mathcal{M}_2(x)$ ist der Richtungsvektor der Flächennormalen im Striktionspunkt, $\mathcal{M}_3(x)$ der zur Erzeugenden orthogonale Richtungsvektor in der Tangentialebene τ_S im Striktionspunkt (vgl. Abbildung 6).

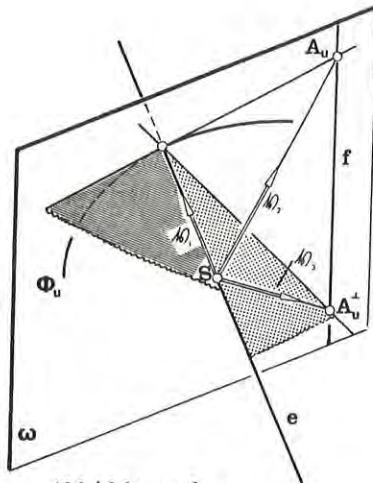


Abbildung 6 :
Begleitendes Dreibein einer Regelfläche vom Typ A

Als Ableitungsgleichungen von (14.12) erhalten wir

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_1'(x) = \alpha(x) \cdot \mathcal{M}_2(x) \\ \mathcal{M}_2'(x) = \beta(x) \cdot \mathcal{M}_3(x) \\ \mathcal{M}_3'(x) = -\beta(x) \cdot \mathcal{M}_2(x), \end{array} \right. \quad (14.13)$$

wobei

$$\beta(x) = \frac{a_2'(x) \cdot a_3''(x) - a_2''(x) \cdot a_3'(x)}{\alpha^2(x)} \quad (14.14)$$

als *Torsion* der Regelfläche definiert werden kann.

Die Striktion $\sigma(x)$ (14.10) erhält die einfachere Gestalt

$$\sigma(x) = +\sqrt{[y'(x) - a_2(x)]^2 + [z'(x) - a_3(x)]^2}. \quad (14.15)$$

Da die Striktionslinientangente sich nun in der Form

$$\mathcal{K}(x) = \alpha(x) + \sigma(x) \cdot \mathcal{M}_3(x) = \mathcal{M}_1(x) + \sigma(x) \cdot \mathcal{M}_3(x) \quad (14.16)$$

einstellt, gewinnen wir durch Integration von (14.16) die natürliche Regelflächendarstellung

$$\eta(x, u) = \int_0^x [\mathcal{M}_1(x) + \sigma(x) \cdot \mathcal{M}_3(x)] dx + u \cdot \mathcal{M}_1(x), \quad (14.17)$$

wobei für $\sigma(x) = 0$ für alle $x \in I_1$ der Grenzfall der Tangentflächen vorliegt. So wie im euklidischen Fall (vgl. [29, S 61 f.]) umfassen somit die oben eingeführten Begriffe die Theorie der Raumkurven des galileischen Raumes \mathbb{G}_3 .

So können wir als *konische Krümmung* $\gamma(x)$ der Regelfläche Φ längs der Erzeugenden $e(x)$ den Wert

$$\gamma(x) = \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \quad (14.18)$$

definieren. Die in der euklidischen Fernebene ω des galileischen Raumes \mathbb{G}_3 gelegene Fernkurve Φ_u (14.3) von Φ besitzt die Bogenlänge s

$$s = \int_0^x \alpha(x) dx \quad (14.19)$$

und die Krümmung

$$\kappa^*(x) = \frac{a_2'(x) \cdot a_3''(x) - a_2''(x) \cdot a_3'(x)}{+\sqrt{[a_2'(x)]^2 + [a_3'(x)]^2}^{3/2}} = \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}, \quad (14.20)$$

die mit der konischen Krümmung $\gamma(x)$ (14.18) übereinstimmt.

Damit kann analog zum Fundamentalsatz der Kurventheorie des galileischen Raumes \mathbb{G}_3 der folgende Satz bewiesen werden :

SATZ 14.1: Im Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ($0 \in I$) sei $f(x)$ eine Funktion der Klasse C^1 und $g(x)$ sowie $h(x)$ Funktionen der Klasse C mit $g(x) \geq 0$, $h(x) \geq 0$ für alle $x \in I$; weiterhin sei ein Punkt P_0 gegeben, mit dem ein im Sinne der Bewegungsgruppe B_0 orthonormiertes Dreibein \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 und \mathcal{M}_3 verknüpft ist. Dann gilt : Es gibt im galileischen Raum \mathbb{G}_3 genau eine Regelfläche vom Typ A, die $f(x)$ als Krümmung, $g(x)$ als Torsion und $h(x)$ als Striktion besitzt und zum Zeitpunkt $x = 0$ den Punkt P_0 als Striktionspunkt mit \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 und \mathcal{M}_3 als begleitendem Dreibein im Punkt P_0 besitzt, bei der überdies x die Bogenlänge der Striktionslinie ist.

BEWEIS : Über die konische Krümmung $\gamma(x)$ (14.18) ist die Krümmung der Fernkurve Φ_u der gesuchten Regelfläche bekannt; auch ihre im Sinne der in der Fernebene herrschenden euklidischen Metrik gemessene Bogenlänge s kann bestimmt werden (14.19). Bezeichnen wir mit E_1 , E_2 und E_3 die Fernpunkte der drei gegebenen Dreibeinvektoren \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 und \mathcal{M}_3 , so existiert nach dem Fundamentalsatz der ebenen euklidischen Geometrie (vgl. [29, S. 71]) eine eindeutig bestimmte Fernkurve c , die s als Bogenlänge und $\gamma(s) = \frac{g(s)}{f(s)}$ als Krümmung besitzt, sowie im Punkt E_1 die Geraden $[E_1, E_2]$ und $[E_1, E_3]$ als Tangente bzw. als Kurvennormale hat. Damit liegen $\mathcal{M}_1(x)$, $\mathcal{M}_2(x)$ und $\mathcal{M}_3(x)$ fest, woraus über Integration der Gleichung (14.16) bzw. (14.17) mit der Anfangsbedingung

$$\eta(0,0) \dots P_0 \tag{14.21}$$

eine eindeutige Regelfläche vom Typ A ermittelt werden kann. Wie im euklidischen Fall kann leicht nachgewiesen werden, daß diese eindeutige Lösungsregelfläche eine zulässige Parameterdarstellung abgibt. □

Für den Winkel aufeinanderfolgender Erzeugenden $e(x)$ und $e(x+dx)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \sphericalangle[e(x), e(x+dx)] &= \frac{\sqrt{[a_2(x) - a_2(x+dx)]^2 + [a_3(x) - a_3(x+dx)]^2}}{\sqrt{a_2'^2(x) + a_3'^2(x)}} dx + \dots = \alpha(x) dx + \dots \end{aligned} \quad (14.22)$$

Der Winkel φ der entsprechenden asymptotischen Ebenen nimmt den Wert

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{a_2'(x) \cdot a_3'(x+dx) - a_2'(x+dx) \cdot a_3'(x)}{\sqrt{a_2'^2(x) + a_3'^2(x)} \cdot \sqrt{a_2'^2(x+dx) + a_3'^2(x+dx)}} = \\ &= \frac{[a_2'(x) \cdot a_3''(x) - a_2''(x) \cdot a_3'(x)] dx + \dots}{a_2'^2(x) + a_3'^2(x) + dx \cdot (\dots) + \dots} = (14.23) \\ &= \beta(x) dx + \dots \end{aligned}$$

an, womit wir den folgenden Satz eingesehen haben :

SATZ 14.2: Die Krümmung $\alpha(x)$ einer Regelfläche vom Typ A des galileischen Raumes G_3 läßt sich als Verhältnis des Winkels benachbarter Erzeugender zur Bogenlänge der Striktionslinie deuten; die Torsion $\beta(x)$ kann als Verhältnis des Winkels benachbarter asymptotischer Ebenen zur Bogenlänge x der Striktionslinie aufgefaßt werden. Die konische Krümmung $\gamma(x)$ stimmt mit der Krümmung der Fernkurve der Regelfläche überein.

Berechnen wir noch den Abstand $d(e(x), e(x+dx))$ der beiden benachbarten Erzeugenden $e(x)$ und $e(x+dx)$: Dazu schneiden wir $e(x)$ und $e(x+dx)$ mit einer beliebigen euklidischen Ebene $x = K$ ($K \in \mathbb{R}$) und erhalten die Schnittpunkte

$$\left. \begin{aligned} &E_K(x) \dots (K, y(x) + (K-x)a_2(x), z(x) + (K-x)a_3(x)) \text{ bzw.} \\ &E_K(x+dx) \dots (K, y(x+dx) + (K-x-dx)a_2(x+dx), z(x+dx) + \\ &\quad + (K-x-dx)a_3(x+dx)), \end{aligned} \right\} (14.24)$$

für deren Abstand wir

$$d(E_K(x), E_K(x+dx)) = \sqrt{\{[y'(x) - a_2(x) + (K-x)a_2'(x) - a_2'(x)dx]dx + \dots\}^2 + \{[z'(x) - a_3(x) + (K-x)a_3'(x) - a_3'(x)dx]dx + \dots\}^2} \quad (14.25)$$

finden. Das Minimum erhalten wir in (14.25) für

$$K-x = -\frac{1}{\alpha^2(x)} \cdot \{a_2'(x) \cdot [y'(x) - a_2(x)] + a_3'(x) \cdot [z'(x) - a_3(x)] + \dots\}, \quad (14.26)$$

woraus wir für den Normalabstand $d(e(x), e(x+dx))$

$$\begin{aligned} d(e(x), e(x+dx)) &= \frac{a_3'(x)[y'(x) - a_2(x)] - a_2'(x)[z'(x) - a_3(x)]}{\alpha(x)} dx + \\ &+ \dots = \quad (14.27) \\ &= -\frac{\det(\varphi'(x), \alpha(x), \alpha'(x))}{\alpha(x)} dx + \dots \end{aligned}$$

erhalten. Mit (14.22) können wir nun

$$\begin{aligned} d(x) &:= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{d(e(x), e(x+dx))}{d(e(x), e(x+dx))} = -\frac{\det(\varphi'(x), \alpha(x), \alpha'(x))}{\alpha^2(x)} = \\ &= -\frac{\det(\varphi'(x), \alpha(x), \alpha_2(x))}{\alpha(x)} \quad (14.28) \end{aligned}$$

als *Drall* der Regelfläche längs der Erzeugenden $e(x)$ definieren; er ist als Grenzwert des Quotienten aus Normalabstand

und Winkel zweier benachbarter Erzeugenden erklärt. Die Tangentenflächen sind durch das Verschwinden des Dralls gekennzeichnet.

(14.28) kann auch anders dargestellt werden; unter Verwendung von (14.16) gilt

$$d(x) = - \frac{\sigma(x)}{\alpha(x)} \quad (14.29)$$

in Analogie zu [14, S. 148], [29, S. 65] und [23, S. 24].

Die *Berührungskorrelation* längs einer festen Erzeugenden $e(x)$ läßt sich wie folgt deuten: Mit (14.17) gilt

$$\begin{cases} \eta_x = \mathcal{H}_1(x) + \sigma(x) \cdot \mathcal{H}_3(x) + u \cdot \alpha(x) \cdot \mathcal{H}_2(x) & \text{und} \\ \eta_u = \mathcal{H}_1(x), \end{cases} \quad (14.30)$$

womit der im Sinne der Bewegungsgruppe B_6 normierte Normaleneinheitsvektor $\mathcal{H}(x,u)$ in einem Punkt $P(x,u)$ der Erzeugenden $e(x)$ die Darstellung

$$\mathcal{H}(x,u) = \frac{-\sigma(x) \cdot \mathcal{H}_2(x) + \alpha(x) \cdot u \cdot \mathcal{H}_3(x)}{\sqrt{\sigma^2(x) + u^2 \cdot \alpha^2(x)}} \quad (14.31)$$

und unter Berücksichtigung von (14.29)

$$\mathcal{H}(x,u) = \frac{d(x) \cdot \mathcal{H}_2(x) + u \cdot \mathcal{H}_3(x)}{\sqrt{d^2(x) + u^2}} \quad (14.32)$$

besitzt. Wird x festgehalten und der Winkel φ der Tangentialebene im Punkt $P(x,u)$ zur *Zentralebene* (Tangentialebene im Striktionspunkt $P(x,0)$) über

$$\begin{cases} \cos \varphi = \mathcal{H}(x,u) \cdot \mathcal{H}(x,0) = \mathcal{H}(x,u) \cdot \mathcal{H}_2(x) & = \frac{d(x)}{\sqrt{d^2(x) + u^2}} \\ \sin \varphi = \mathcal{H}(x,u) \cdot \mathcal{H}_3(x) & = \frac{u}{\sqrt{d^2(x) + u^2}} \end{cases} \quad (14.33)$$

bestimmt, so stellt sich

$$d(x) = u \cdot \cot \varphi \quad (14.34)$$

ein, womit eine Deutung der Berührungskorrelation im galileischen Raum G_3 gelungen ist.²⁸⁾

Von den *begleitenden Torsen* einer Regelfläche des Typs A sind hier nur die beiden folgenden von Interesse :

(α) Die asymptotische Torse: Sie besitzt die Gleichung

$$(\mathfrak{X} - \varphi(x)) \cdot (\mathcal{N}_1(x) \times \mathcal{N}_2(x)) = 0 . \quad (14.35)$$

Stellt $\varphi = \varphi(x)$ die Striktionslinie dar, so gilt

$$\varphi'(x) = \mathcal{N}_1(x) + \sigma(x) \cdot \mathcal{N}_3(x), \quad (14.36)$$

woraus mit (14.35) nach zweimaligem Differenzieren

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathfrak{X} - \varphi(x)) \cdot (\mathcal{N}_1(x) \times \mathcal{N}_3(x)) - \frac{\sigma(x)}{\beta(x)} = 0 \text{ und} \\ (\mathfrak{X} - \varphi(x)) \cdot (\alpha(x) \cdot \mathcal{N}_2(x) \times \mathcal{N}_3(x) - \beta(x) \cdot \mathcal{N}_1(x) \times \mathcal{N}_2(x)) = \\ = \left(\frac{\sigma(x)}{\beta(x)} \right)' \end{array} \right. \quad (14.37)$$

folgt. Die asymptotische Torse besitzt damit die Darstellung

$$\mathfrak{X} = \varphi(x) + \mu \cdot \mathcal{N}_1(x) - \frac{\sigma(x)}{\beta(x)} \cdot \mathcal{N}_2(x) \quad (\mu \in \mathbb{R}) \quad (14.38)$$

und die *Gratlinie* g

$$g(x) = \varphi(x) + \frac{1}{\alpha(x)} \cdot \left(\frac{d(x)}{\gamma(x)} \right)' \cdot \mathcal{N}_1(x) + \frac{d(x)}{\gamma(x)} \cdot \mathcal{N}_2(x), \quad (14.39)$$

analog zu [14 ,S. 149] und [29, S. 66]. Die Hauptnormale von g besitzt die Richtung von $\mathcal{N}_2(x)$; die konische Krümmung $\gamma(x)$ der Regelfläche ist auch die konische Krümmung von g . Damit ist

²⁸⁾ Man vergleiche das analoge Resultat bei E. KRUPPA [29, S.65].

auch hier die folgende *einheitliche Erzeugung* der Regelflächen vom Typ A möglich :

SATZ 14.3: *Verschiebt man die Tangenten einer nichtebenen Raumkurve g des galileischen Raumes G_3 in den Schmiegeebenen von g um die Strecke $-\frac{d(x)}{k(x)}$ in Richtung der Hauptnormalen von g - wobei $k(x)$ die konische Krümmung der Raumkurve g bezeichnet, und $d(x)$ eine beliebige Funktion der Klasse C^1 ist -, so erhält man eine Regelfläche des galileischen Raumes G_3 , die vom Typ A ist und $d(x)$ als Drall besitzt.*

Damit ist die von H. BRAUNER in [12, S. 306] angegebene einheitliche Erzeugung konstant gedrahter Flächen des euklidischen Raumes E_3 leicht in den galileischen Raum zu übertragen.²⁹⁾

(β) Die Zentraltorse : Die von den Tangentialebenen der Striktionslinie gebildete Zentraltorse besitzt die Gleichung

$$(\mathbf{y} - \varphi(x)) \cdot (\mathcal{A}_1(x) \times \mathcal{A}_3(x)) = 0, \quad (14.40)$$

woraus durch zweimaliges Differenzieren

$$\begin{cases} (\mathbf{y} - \varphi(x)) \cdot (\alpha(x) \cdot \mathcal{A}_2(x) \times \mathcal{A}_3(x) - \beta(x) \cdot \mathcal{A}_1(x) \times \mathcal{A}_2(x)) = 0 \text{ und} \\ (\mathbf{y} - \varphi(x)) \cdot [\alpha'(x) \cdot \mathcal{A}_2(x) \times \mathcal{A}_3(x) - \beta'(x) \cdot \mathcal{A}_1(x) \times \mathcal{A}_2(x) - \\ - \alpha(x) \cdot \beta(x) \cdot \mathcal{A}_1(x) \times \mathcal{A}_3(x)] = \alpha(x) - \sigma(x) \cdot \beta(x) \end{cases} \quad (14.41)$$

folgt. Die Zentraltorse besitzt demnach die Darstellung

$$\mathbf{y} = \varphi(x) + \lambda \cdot [\beta(x) \cdot \mathcal{A}_1(x) + \alpha(x) \cdot \mathcal{A}_3(x)] = \varphi(x) + \lambda \cdot \mathcal{A}(x) \quad (14.42)$$

$$(\lambda \in \mathbb{R})$$

²⁹⁾ Dieses Resultat hat H. BRAUNER in [14, S. 149] in den Flaggenraum und H. SACHS in [42] bzw. [43] in den einfach isotropen Raum übertragen.

und die Gratlinie g_z

$$\eta_z(x) = \varphi(x) + \frac{\alpha(x) - \beta(x) \cdot \sigma(x)}{\beta(x) \cdot \alpha'(x) - \alpha(x) \cdot \beta'(x)} \cdot \eta(x) \quad (14.43)$$

(vgl. [29, S.67] für den euklidischen Raum \mathbb{E}_3).

Mit $\sigma(x) = 0$ erhalten wir in (14.42) die *Torse der rektifizierenden Ebenen* einer Raumkurve und deren Gratlinie (14.43).

Die Zentraltangenten - und die Zentralnormalenfläche ist hier stets eine Regelfläche vom Typ C; eine eingehende Untersuchung erfolgt in Abschnitt 15.

TYP B

Hier liegt die Striktionslinie l in einer euklidischen Ebene des galileischen Raumes \mathbb{G}_3 und kann daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit durch

$$\varphi(u) = (0, y(u), z(u)) \quad (u \in I) \quad (14.44)$$

beschrieben werden, wobei u die Bogenlänge von l sein soll.

Damit gilt

$$y'^2(u) + z'^2(u) = 1, \quad (14.45)$$

wobei wir mit Strichen wieder Ableitungen nach der Bogenlänge u der Striktionslinie kennzeichnen. l ist genau dann auf der Regelfläche Φ

$$\begin{aligned} \eta(u, v) &= \varphi(u) + v \cdot \alpha(u) = \quad (v \in (-\infty, +\infty)) \\ &= (0, y(u), z(u)) + v \cdot (1, a_2(u), a_3(u)) \end{aligned} \quad (14.46)$$

$(a_1(u), a_2(u), a_3(u), y(u), z(u) \in C^3)$ Striktionslinie, wenn

$$a_2'(u) \cdot y'(u) + a_3'(u) \cdot z'(u) = 0 \text{ für alle } u \in I \quad (14.47)$$

gilt. Wir bezeichnen

$$\begin{cases} \mathcal{N}_1(u) = \alpha(u) = (1, a_2(u), a_3(u)) \text{ als Erzeugendenvektor,} \\ \mathcal{N}_2(u) = (0, -z'(u), y'(u)) \text{ als Zentralnormalenvektor,} \\ \mathcal{N}_3(u) = (0, y'(u), z'(u)) \text{ als Zentraltangentenvektor} \end{cases} \quad (14.48)$$

(vgl. Abbildung 7) und gewinnen damit die Ableitungsgleichungen

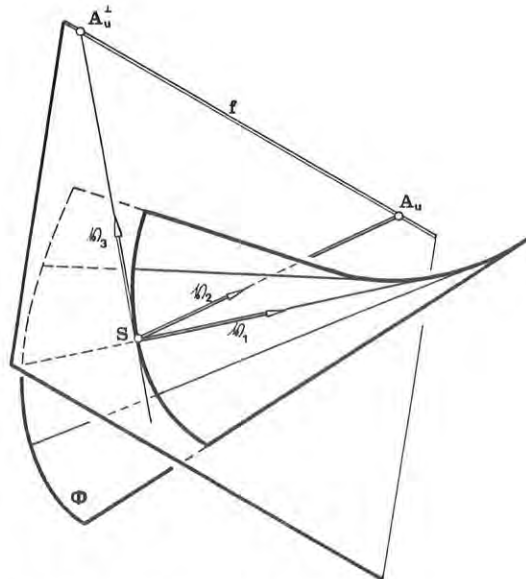
$$\begin{cases} \mathcal{N}_1'(u) = \alpha(u) \cdot \mathcal{N}_2(u), \\ \mathcal{N}_2'(u) = \beta(u) \cdot \mathcal{N}_3(u), \\ \mathcal{N}_3'(u) = -\beta(u) \cdot \mathcal{N}_2(u), \end{cases} \quad (14.49)$$

wobei

$$\begin{cases} \alpha(u) = -\frac{a_2'(u)}{z'(u)} \text{ als Krümmung und} \\ \beta(u) = \frac{y''(u)}{z'(u)} \text{ als Torsion} \end{cases} \quad (14.50)$$

der Regelfläche Φ bezeichnet werden soll.

Abbildung 7 : Begleitendes Dreibein einer Regelfläche vom Typ B



Dabei ist wesentlich, daß mit (14.45) und (14.47)

$$\begin{cases} y'(u) \cdot y''(u) + z'(u) \cdot z''(u) = 0 \quad \text{und} \\ y'(u) \cdot a_2''(u) + a_2'(u) \cdot y''(u) + a_3''(u) \cdot z'(u) + a_3'(u) \cdot z''(u) = 0 \end{cases} \quad (14.51)$$

gilt.

Als Krümmung der Fernkurve Φ_u der Regelfläche Φ stellt sich

$$\gamma(x) = \frac{\det \begin{bmatrix} a_2'(u) & a_3'(u) \\ a_2''(u) & a_3''(u) \end{bmatrix}}{(a_2'(u)^2 + a_3'(u)^2)^{3/2}} = - \frac{y''(u)}{a_2'(u)} = \frac{\beta(u)}{\alpha(u)} \quad (14.52)$$

ein; eine geometrische Größe, die als *konische Krümmung* der Regelfläche Φ längs der Erzeugenden $e(u)$ bezeichnet werden soll. Die Krümmung $\kappa(u)$ der Striktionslinie l berechnet sich zu

$$\kappa(u) = y'(u) \cdot z''(u) - y''(u) \cdot z'(u) = - \frac{y''(u)}{z'(u)} = -\beta(u), \quad (14.53)$$

womit eine Deutung der Torsion $\beta(u)$ gegeben ist. Aus (14.50) und (14.47) folgt noch

$$\begin{cases} a_2(u) = - \int_0^u \alpha(u) \cdot z'(u) du & \text{und} \\ a_3(u) = \int_0^u \alpha(u) \cdot y'(u) du. \end{cases} \quad (14.54)$$

Daraus und aus dem Fundamentalsatz der ebenen euklidischen Kurventheorie (vgl. [29, S. 71]) erhalten wir den

SATZ 14.4: *Durch Vorgabe von beliebigen Funktionen $\alpha(u)$ der Klasse C und $\beta(u)$ der Klasse C^1 ($u \in I$) ist bis auf Bewegungen der Gruppe B_6 im galileischen Raum G_3 eine eindeutige C^2 -Regelfläche vom Typ B festgelegt, die u als Bogenlänge der in einer euklidischen Ebene des galileischen Raumes G_3 gelegenen Striktionslinie, $\alpha(u)$ als Krümmung und $\beta(u)$ als Torsion besitzt; $\alpha(u)$ und $\beta(u)$ bilden ein vollständiges Invariantensystem der Regelfläche.*

Flächen dieses Typs, deren Krümmung $\alpha(u) = A = \text{konst.} \in \mathbb{R}$ ist, besitzen die Parameterdarstellung

$$\eta(u, v) = (0, y(u), z(u)) + v \cdot (1, -A \cdot z(u), A \cdot y(u)); \quad (14.55)$$

sie lassen sich durch die Transformationen

$$\begin{cases} x' = v \\ y' = y - A \cdot v \cdot z \\ z' = A \cdot v \cdot y + z \end{cases} \quad (14.56)$$

aus der Ähnlichkeitsgruppe H_8 (1.3) aus der Striktionslinie l ($v = 0$) erzeugen. Ihre Schnitte mit den euklidischen Ebenen des galileischen Raumes G_3 sind daher im Sinne der von H_8 in diesen Ebenen induzierten euklidischen Metrik zueinander ähnlich. Für $\alpha(u) = 0$ stellen sich Zylinderflächen ein; die durch (14.56) gegebene Erzeugung wird mit $A = \alpha(u) = 0$ zu einer nichtisotropen eingliedrigen Schiebungsgruppe (vgl. (I.2)).

Flächen des Typs B mit *konstanter Torsion* $\beta(u) = B = \text{konst.}$ aus $\mathbb{R} - 0$ besitzen nach (14.53) einen euklidischen Kreis als Striktionslinie l . Ist $\beta(u) = 0$, so handelt es sich bei der Regelfläche um ein gerades Konoid mit einer *eigentlichen* isotropen Leitgeraden l und einer dazu orthogonalen Fernleitgeraden.

Regelflächen des Typs B mit konstanten Invarianten $\alpha(u) = A$ und $\beta(u) = B$ ($A \cdot B \neq 0$) besitzen mit (14.50) und (14.55) die Parameterdarstellung

$$\eta(u, v) = \left(0, u, \frac{1+C}{B}\right) + v \cdot \left(1, -A \cdot \frac{1+C}{B}, A \cdot u\right), \quad v \in (-\infty, +\infty) \quad (14.57)$$

wobei C eine reelle Integrationskonstante bedeutet. Diese Regelfläche wird durch die Gleichung

$$B \cdot z = x^2 \cdot A^2 \cdot (1+C) + x \cdot y \cdot A \cdot B + 1 + C \quad (14.58)$$

beschrieben; es handelt sich dabei um ein *hyperbolisches Paraboloid*, das die absolute Gerade f enthält.

Betrachten wir noch den Abstand $d(e(u), e(u+du))$ der beiden Erzeugenden $e(u)$ und $e(u+du)$. Als Schnittpunkte mit der Träger-ebene der Striktionslinie ($x = 0$) erhalten wir aus (14.46) mit (14.47) die Punkte

$$\begin{cases} E(u) \dots (0, y(u), z(u)) \text{ sowie} \\ E(u+du) \dots (0, y(u+du), z(u+du)), \end{cases} \quad (14.59)$$

deren Abstand sich zu

$$\begin{aligned} d(E(u), E(u+du)) &= d(e(u), e(u+du)) = \\ &= \sqrt{[y'(u)du + \dots]^2 + [z'(u)du + \dots]^2} = \\ &= du + \dots \end{aligned} \quad (14.60)$$

berechnet. Für den Winkel ψ zwischen diesen Erzeugenden erhalten wir

$$\begin{aligned} \psi &= \sqrt{[a_2'(u)du + \dots]^2 + [a_3'(u)du + \dots]^2} = \\ &= \alpha(u)du + \dots, \end{aligned} \quad (14.61)$$

womit sich als *Drall* $d(u)$ der Regelfläche längs der Erzeugenden $e(u)$

$$d(u) = \lim_{du \rightarrow 0} \frac{d(e(u), e(u+du))}{s(e(u), e(u+du))} = \frac{1}{\alpha(u)} \quad (14.62)$$

einstellt.

Die Tangentialebenen der Punkte der Erzeugenden $e(u)$ besitzen die Pole $(0:0:y'(u)+v \cdot a_2'(u):z'(u)+v \cdot a_3'(u))$ und daher die Normaleneinheitsvektoren

$$\mathcal{N}(u, v) = \frac{\mathcal{N}_2(u) - v \cdot \alpha(u) \cdot \mathcal{N}_3(u)}{\sqrt{1 + v^2 \cdot \alpha^2(u)}}, \quad (14.63)$$

deren Winkel $\varphi = \sphericalangle(\mathcal{N}(u,v), \mathcal{N}(u,0))$ zum Zentralnormalenvektor die Darstellung

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \cos(90^\circ - \varphi) = \frac{[\mathcal{N}_2(u) - v\alpha(u)\mathcal{N}_3(u)] \cdot \mathcal{N}_3(u)}{+\sqrt{1 + v^2 \cdot \alpha^2(u)}} = \\ &= - \frac{v \cdot \alpha(u)}{+\sqrt{1 + v^2 \cdot \alpha^2(u)}} \quad \text{bzw.} \end{aligned} \quad (14.64)$$

$$\cos \varphi = \frac{[\mathcal{N}_2(u) - v \cdot \alpha(u) \cdot \mathcal{N}_3(u)] \cdot \mathcal{N}_2(u)}{+\sqrt{1 + v^2 \cdot \alpha^2(u)}} \quad (14.65)$$

besitzt. Als Interpretation der *Berührungskorrelation* längs der Erzeugenden $e(u)$ erhalten wir somit

$$d(u) = -v \cdot \cot \varphi \quad (14.66)$$

in Analogie zu Formel (14.34). Wir notieren den

SATZ 14.5: *Im galileischen Raum \mathbb{G}_3 stimmt bei einer Regel - fläche vom Typ B der Drall $d(u)$ längs einer nichtisotropen Erzeugenden $e(u)$ mit dem Reziprokwert der Krümmung überein. Insbesondere sind daher die konstant gedrahten Regelflächen des Typs B mit den Regelflächen konstanter Krümmung identisch. Diese Regelflächen gestatten die in (14.56) angegebene Erzeugung als Bahnfläche ihrer Striktionslinie bei einem gewissen Ähnlichkeitszwanglauf, bei dem die Bahnkurven der Striktionspunkte die Erzeugenden der Fläche abgeben.*

TYP C

Die Regelfläche \mathfrak{Q} ist konoidal mit der absoluten Geraden f als Fernleitgeraden. Als invarianten Parameter führen wir die Bogenlänge u auf einem Schnitt der Fläche mit einer isotropen Ebene des galileischen Raumes \mathbb{G}_3 ein. Ohne Beschränkung der

Allgemeinheit besitze Φ dann die Darstellung

$$\begin{aligned} \eta(u,v) &= (u, y(u), 0) + v \cdot (0, a_2(u), a_3(u)) = \\ &= \varphi(u) + v \cdot \alpha(u) \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned} \quad (14.67)$$

($y(u), a_2(u), a_3(u) \in \mathbb{C}^3$), wobei $\alpha(u)$ normiert sei, d.h.

$$\begin{cases} a_2^2(u) + a_3^2(u) = 1 & \text{und damit} \\ a_2'(u) \cdot a_2(u) + a_3'(u) \cdot a_3(u) = 0 \end{cases} \quad (14.68)$$

gelte; mit Strichen kennzeichnen wir die Ableitungen nach der Bogenlänge u der Leitkurve.

Als *begleitendes Dreibein* definieren wir hier (vgl. Abb. 8)

$$\begin{cases} \mathcal{M}_1(u) = \varphi'(u) = (1, y'(u), 0) \\ \mathcal{M}_2(u) = \alpha(u) = (0, a_2(u), a_3(u)) \quad \text{und} \\ \mathcal{M}_3(u) = (0, -a_3(u), a_2(u)). \end{cases} \quad (14.69)$$

Daraus gewinnen wir die folgenden Ableitungsgleichungen

$$\begin{cases} \mathcal{M}_1'(u) = (0, y''(u), 0) = \kappa(u) \cdot (\mathcal{M}_2(u) \cdot \cos \varphi(u) - \\ \quad - \mathcal{M}_3(u) \cdot \sin \varphi(u)), \\ \mathcal{M}_2'(u) = \frac{1}{\delta(u)} \cdot \mathcal{M}_3(u) \quad \text{und} \\ \mathcal{M}_3'(u) = -\frac{1}{\delta(u)} \cdot \mathcal{M}_2(u), \end{cases} \quad (14.70)$$

wobei

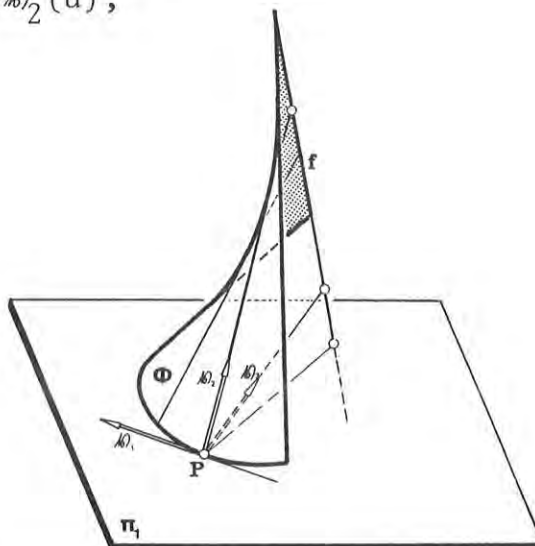


Abbildung 8 : Begleitendes Dreibein einer Regelfläche vom Typ C

$$\begin{cases} \kappa(u) = y''(u) & \text{die Krümmung der Leitkurve mißt,}^{30)} \text{ und} \\ \delta(u) = -\frac{a_3(u)}{a_2'(u)} & \text{als Drall bezeichnet wird;} \end{cases} \quad (14.71)$$

$\varphi(u)$ ist der Winkel zwischen der Trägerebene π_1 ($z = 0$) der Leitkurve l und der Erzeugenden $e(u)$.

$\delta(u)$ ist eine Invariante der Regelfläche und werde deshalb als Drall bezeichnet, weil für den Winkel ψ zweier benachbarter Erzeugenden $e(u)$ und $e(u+du)$ der Regelfläche

$$\begin{aligned} \sin \psi &= a_2(u) \cdot a_3(u+du) - a_3(u) \cdot a_2(u+du) = \\ &= [a_2(u) \cdot a_3'(u) - a_2'(u) \cdot a_3(u)] du + \dots = (14.72) \\ &= -\frac{a_2'(u)}{a_3(u)} du + \dots \end{aligned}$$

gilt, woraus sich $\delta(u)$ als Verhältnis des Abstandes zweier benachbarter Erzeugenden zum entsprechenden Winkel ψ ergibt. Der Winkel α zweier Tangentialebenen τ_1 und τ_2 der Regelfläche in Punkten P_1 und P_2 der Erzeugenden $e(u)$ wird über den Abstand der Ferngeraden von τ_1 und τ_2 berechnet :

$$\begin{aligned} \alpha &= \sphericalangle(\tau_1, \tau_2) = (v_2 - v_1) \cdot [a_3'(u) \cdot a_2(u) - a_2'(u) \cdot a_3(u)] = \\ &= (v_2 - v_1) \cdot \frac{1}{\delta(u)}. \end{aligned} \quad (14.73)$$

Damit ist es gelungen, die *Berührungskorrelation* längs einer Erzeugenden zu deuten :

$$\delta(u) = \frac{d(P_1, P_2)}{\sphericalangle(\tau_1, \tau_2)}. \quad (14.74)$$

Regelflächen des Typs C mit konstantem Drall $\delta(u) = D \in \mathbb{R} \setminus 0$ sind durch

³⁰⁾ $\kappa(u)$ ist keine Invariante der Regelflächen dieses Typs C.

$$\begin{cases} a_3(u) + D \cdot a_2'(u) = 0 \\ a_2(u) - D \cdot a_3'(u) = 0 \end{cases} \quad (14.75)$$

gekennzeichnet und besitzen die Darstellung

$$\begin{aligned} \eta(u,v) = & (u, y(u), 0) + \\ & + v \cdot (0, K \cdot \cos \frac{u}{D} - L \cdot \sin \frac{u}{D}, K \cdot \sin \frac{u}{D} + L \cdot \cos \frac{u}{D}), \end{aligned} \quad (14.76)$$

wobei K und L reelle Integrationskonstanten darstellen.

Als *Beispiel* betrachten wir den Fall, daß als Leitkurve der isotrope Kreis $(u, A \cdot u^2, 0)$ ($A \in \mathbb{R} - 0$) vorliegt, und gleichzeitig $K = D = 1$ sowie $L = 0$ gilt: Nach kurzer Rechnung stellt sich die Regelflächengleichung

$$(y - A \cdot x^2)^2 = 1 - z^2 \quad (14.77)$$

ein; es handelt sich somit um eine konoidale Regelfläche vierter Ordnung, die die Fernebene ω längs der absoluten Leitgeraden f berührt.

§ 15 ZENTRALTANGENTEN - UND ZENTRALNORMALENFLÄCHEN DER
REGELFLÄCHEN DES GALILEISCHEN RAUMES \mathbb{G}_3

Als Anwendung der eben untersuchten Regelflächen des Typs C wollen wir den Drall $\delta(x)$ der *Zentraltangente*fläche Z

$$\begin{aligned} \bar{z}(x, u) &= (x, y(x), z(x)) + \\ &+ u \cdot \frac{1}{\alpha(x)} \cdot (0, -a_3'(x), a_2'(x)) \end{aligned} \quad (15.1)$$

einer Regelfläche Φ vom Typ A (vgl. (14.12)) bestimmen : Mit (14.71) erhalten wir nach kurzer Rechnung unter Berücksichtigung von (14.14)

$$\delta(x) = \frac{\alpha^2(x)}{a_2'(x) \cdot a_3''(x) - a_3'(x) \cdot a_2''(x)} = \frac{1}{\beta(x)} . \quad (15.2)$$

Die *Zentralnormalen*fläche N einer Regelfläche Φ vom Typ A lautet

$$\begin{aligned} \bar{n}(x, u) &= (x, y(x), z(x)) + \\ &+ u \cdot \frac{1}{\alpha(x)} \cdot (0, a_2'(x), a_3'(x)) \end{aligned} \quad (15.3)$$

(vgl. (14.12)) und besitzt mit (14.71) ebenfalls den Drall

$$\bar{\delta}(x) = \frac{1}{\beta(x)} , \quad (15.4)$$

womit in Analogie zu einem bekannten Ergebnis über euklidische Regelflächen (vgl. E. KRUPPA [29, S. 68 ff.]) der folgende Satz bewiesen ist :

SATZ 15.1: *Der Drall der Zentraltangente - und der Zentralnormalenfläche einer Regelfläche vom Typ A des galileischen Raumes \mathbb{G}_3 stimmt längs jeder Erzeugenden mit dem reziproken Wert der Torsion der zugehörigen Erzeugenden auf der Ausgangs-*

regelfläche überein.

Es sei noch bemerkt, daß ähnliche Untersuchungen für Regelflächen vom Typ B nicht interessant sind, weil die zugehörigen Zentraltangenten - und Zentralnormalenflächen entarten. Auch für Regelflächen des Typs C sind analoge Aussagen aufgrund des Fehlens einer Striktionslinie nicht zu gewinnen.

§ 16 FLÄCHENTHEORIE : LÄNGEN - UND WINKELMESSUNG

Ein nichtebenes C^3 - Flächenstück Φ des galileischen Raumes G_3 sei durch

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi(v^1, v^2) = (x(v^1, v^2), y(v^1, v^2), z(v^1, v^2)) := \\ &= (x, y, z) \end{aligned} \quad (16.1)$$

($v^1, v^2 \in \mathbb{R}$) auf zulässige GAUSS'sche Parameter bezogen³¹⁾. Φ soll außerdem frei von Punkten mit euklidischer Tangentialebene sein; ein so gegebenes Flächenstück soll *zulässig* heißen. Bezeichnen wir Ableitungen nach v^1 und v^2 durch

$$\frac{dx(v^1, v^2)}{dv^i} := x_{,i} \quad (i = 1, 2), \quad (16.2)$$

so haben wir die Möglichkeit, den in der Tangentialebene $\tau(v^1, v^2)$ von Φ im regulären Flächenpunkt $P(v^1, v^2)$ liegenden *isotropen* Seitenvektor δ durch

$$\delta = \frac{x_{,2} \cdot \varphi_{,1} - x_{,1} \cdot \varphi_{,2}}{w} \quad (16.3)$$

mit

$$w := +\sqrt{(x_{,2}y_{,1} - x_{,1}y_{,2})^2 + (x_{,2}z_{,1} - x_{,1}z_{,2})^2} \quad (16.4)$$

zu beschreiben. Definieren wir für $w \neq 0$

$$\begin{cases} g_1 := x_{,1}, & g_2 := x_{,2}, & g_{ij} = g_i \cdot g_j \\ g^1 := \frac{1}{w} \cdot x_{,2}, & g^2 := -\frac{1}{w} \cdot x_{,1}, & g^{ij} := g_i \cdot g_j, \end{cases} \quad (i, j=1, 2) \quad (16.5)$$

so gilt unter Verwendung der EINSTEIN'schen Summationskonvention

$$\delta = g^i \cdot \varphi_{,i}. \quad (16.6)$$

³¹⁾ Es sei darauf hingewiesen, daß in [18] einige der folgenden Ergebnisse für die Ähnlichkeitsgruppe H_8 bewiesen wurden.

Die Längenmessung auf der Fläche wird durch

$$(ds)^2 = (g_i \cdot dv^i)^2 + \varepsilon \cdot (h_{ij} \cdot dv^i \cdot dv^j) \quad (16.7)$$

festgelegt, wobei $\varepsilon = 0$ oder 1 ist, je nachdem die in $\tau(v^1, v^2)$ ausgewählte Richtung $dv^1:dv^2$ nichtisotrop ist oder nicht, und

$$h_{ij} := \varphi_{,i} \cdot \varphi_{,j} \quad (16.8)$$

gesetzt wurde. Die erste Grundform (16.7) kann mit (16.5) auch in der Gestalt

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (g_{ij} \cdot dv^i \cdot dv^j) + \varepsilon \cdot (h_{ij} \cdot dv^i \cdot dv^j) = \\ &= (g_{ij} + \varepsilon \cdot h_{ij}) dv^i \cdot dv^j \end{aligned} \quad (16.9)$$

dargestellt werden. Dabei gilt

$$\begin{cases} g_{ij} = g_{ji}, h_{ij} = h_{ji}, g_{11} \cdot g_{22} = (g_{12})^2 \text{ und} \\ h_{11} \cdot h_{22} - (h_{12})^2 \geq 0, \end{cases} \quad (16.10)$$

womit wir den folgenden Satz haben :

SATZ 16.1: Die Metrik eines zulässigen C^3 - Flächenstückes Φ des galileischen Raumes \mathbb{G}_3 wird durch sechs stetige Funktionen $g_{ij}(v^1, v^2) = g_{ij}$ und $h_{ij}(v^1, v^2) = h_{ij}$ ($i, j=1, 2$) beschrieben, die den Nebenbedingungen (16.10) genügen.

Werden im Flächenpunkt $P = P(v^1, v^2)$ durch

$$dv^1:dv^2 \quad \text{und} \quad \bar{d}v^1:\bar{d}v^2 \quad (16.11)$$

mit

$$g_i \cdot dv^i \neq 0 \quad \text{und} \quad g_i \cdot \bar{d}v^i \neq 0 \quad (16.12)$$

zwei nichtisotrope Richtungen ausgezeichnet, so stellt sich für

den Winkel φ zwischen diesen Richtungen

$$\varphi = \frac{+\sqrt{h_{ij} \cdot (dv^i - \overline{dv}^i) \cdot (dv^j - \overline{dv}^j)}}{g_{ij} \cdot dv^i \cdot \overline{dv}^j} \quad (16.13)$$

ein. Für den Winkel ψ zwischen den Parameterlinien $dv^2 = 0$ und $\overline{dv}^1 = 0$ erhalten wir speziell

$$\psi = \frac{+\sqrt{h_{11} - 2 \cdot h_{12} + h_{22}}}{g_{12}} \quad (16.14)$$

Wir vermerken noch, daß mit (16.4), (16.5) und (16.6)

$$w = +\sqrt{(g^i \cdot \ell_{,i})^2} = +\sqrt{g^{ij} \cdot h_{ij}} \quad (16.15)$$

gilt.

Besonderes Augenmerk verdient noch der Fall, daß eine der Parameterlinien eine isotrope Tangente besitzt. Ist das etwa für $v^2 = \text{konst.}$ der Fall, so gilt

$$g_{12} = 0, \quad (16.16)$$

womit der Winkel ψ (16.14) unbestimmt wird.

§ 17 ABLEITUNGSGLEICHUNGEN

Der Normalenvektor $\mathcal{N} = \mathcal{N}(v^1, v^2)$ der Tangentialebene $\tau(v^1, v^2)$ eines zulässigen Flächenstücks Φ des galileischen Raumes \mathbb{G}_3 wird in einem regulären Flächenpunkt $P(v^1, v^2)$ durch

$$\mathcal{N} = \frac{1}{w} \cdot (0, -x_{,2} \cdot z_{,1} + x_{,1} \cdot z_{,2}, x_{,2} \cdot y_{,1} - x_{,1} \cdot y_{,2}) \quad (17.1)$$

erfaßt. Für ihn gilt

$$\mathcal{N} \cdot \mathcal{S} = 0, \quad \mathcal{N}^2 = 1 \quad (17.2)$$

und daher zusammen mit $\mathcal{S}^2 = 1$

$$\begin{cases} \mathcal{N}_{,i} \cdot \mathcal{S} + \mathcal{N} \cdot \mathcal{S}_{,i} = 0 \\ \mathcal{N} \cdot \mathcal{N}_{,i} = 0 \\ \mathcal{S} \cdot \mathcal{S}_{,i} = 0. \end{cases} \quad (i=1,2) \quad (17.3)$$

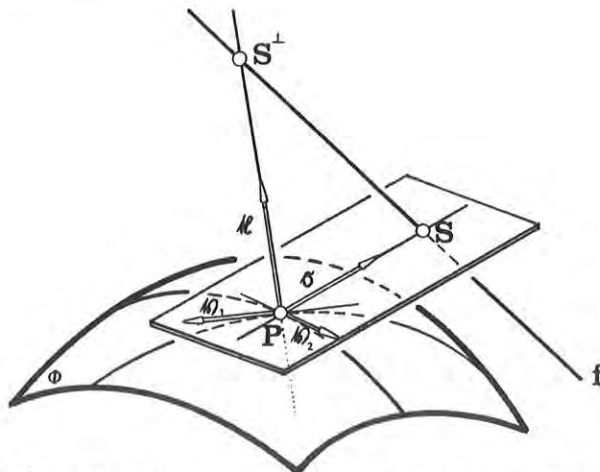


Abbildung 9 : Orthonormiertes Dreibein in einem zulässigen Flächenpunkt P

Wir wollen nun versuchen, die Ableitungsvektoren $\mathcal{C}_{i,j}$ und $\mathcal{N}_{,i}$ als Linearkombinationen im Dreibein $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ und \mathcal{N} zu bestimmen (vgl. [7, S. 130 ff.]) und setzen

$$\begin{cases} \varrho_{,i,j} = \Gamma_{ij}^k \cdot \varrho_{,k} + L_{ij} \cdot \mathcal{M} & \text{(GAUSS'sche Ableitungs-} \\ & \text{gleichungen)} \\ \mathcal{M}_{,i} = B_i \cdot \delta + C_i \cdot \mathcal{M} & \text{(WEINGARTEN'sche Ableitungs-} \\ & \text{gleichungen)}. \end{cases} \quad (17.4)$$

Dabei bezeichnen wir Γ_{ij}^k ($i, j, k=1, 2$) als CHRISTOFFEL - Symbole im galileischen Raum \mathcal{G}_3 (vgl. [29, S. 38 ff.]), für die wir mit

$$x_{,i,j} = \Gamma_{ij}^k \cdot x_{,k}; \quad g_{i,j} - \Gamma_{ij}^k \cdot g_k = 0 \quad (17.5)$$

und wegen $\varrho_{,i,j} = \varrho_{,j,i}$

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \quad (17.6)$$

gewinnen.

Investieren wir (17.5), und multiplizieren wir die GAUSS'schen Ableitungsleichungen skalar mit \mathcal{M} , so erhalten wir

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \frac{x_{,2} \cdot \varrho_{,i,j} - x_{,i,j} \cdot \varrho_{,2}}{x_{,2}} \cdot \mathcal{M} = \\ &= \frac{x_{,1} \cdot \varrho_{,i,j} - x_{,i,j} \cdot \varrho_{,1}}{x_{,1}} \cdot \mathcal{M}. \end{aligned} \quad (17.7)$$

Wir werden im folgenden die L_{ij} als *Fundamentalgrößen 2. Art* und

$$(II) = L_{ij} \cdot dv^i \cdot dv^j \quad (17.8)$$

als *zweite Fundamentalform* bezeichnen. Analog zu (17.7) lassen sich auch die Christoffelsymbole zu

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^1 &= \frac{x_{,2} \cdot \varrho_{,i,j} - x_{,i,j} \cdot \varrho_{,2}}{w} \cdot \delta \quad \text{und} \\ \Gamma_{ij}^2 &= - \frac{x_{,1} \cdot \varrho_{,i,j} - x_{,i,j} \cdot \varrho_{,1}}{w} \cdot \delta \end{aligned} \quad (17.9)$$

berechnen.

Werden die WEINGARTEN'schen Ableitungsgleichungen (17.4) skalar mit $\tilde{\delta}$ multipliziert, so erhalten wir

$$\mathcal{N}_{,i} \cdot \tilde{\delta} = -\mathcal{N} \cdot \tilde{\delta}_{,i} = B_i; \quad (17.10)$$

durch Multiplikation mit \mathcal{N} folgt unter Verwendung von (17.3)

$$C_i = 0. \quad (17.11)$$

Mit (16.6) und (17.4) gilt

$$\tilde{\delta}_{,i} = g^k_{,i} \cdot \mathcal{L}_{,k} + g^k \cdot (\Gamma_{ki}^j \cdot \mathcal{L}_{,j} + L_{ki} \cdot \mathcal{N}), \quad (17.12)$$

wobei aus (17.3)

$$g^k_{,i} + g^l \cdot \Gamma_{li}^k = 0 \quad (17.13)$$

und weiter

$$\tilde{\delta}_{,i} = g^k \cdot L_{ki} \cdot \mathcal{N} \quad \text{sowie} \quad B_i = -g^k \cdot L_{ki} \quad (17.14)$$

folgt. Die WEINGARTEN'schen Ableitungsgleichungen nehmen damit die Gestalt

$$\mathcal{N}_{,i} = -g^k \cdot L_{ki} \cdot \tilde{\delta} = -g^k \cdot L_{ki} \cdot g^l \cdot \mathcal{L}_{,l} = -g^{lk} \cdot L_{ki} \cdot \mathcal{L}_{,l} \quad (17.15)$$

an 32).

32) Hier zeigt sich eine sehr große Ähnlichkeit mit den Ergebnissen der quasielliptischen Flächentheorie (vgl. H. STACHEL [54, S. 14 ff]).

§ 18 INTEGRIERBARKEITSBEDINGUNGEN

Das System der Ableitungsgleichungen lautet

$$\begin{cases} \varphi_{,i} = \frac{d\varphi}{dv} i, \\ \varphi_{,i,j} = \Gamma_{ij}^m \cdot \varphi_{,m} + L_{ij} \cdot \mathcal{A} \\ \mathcal{A}_{,i} = -L_{ij} \cdot g^{jm} \cdot \varphi_{,m} \end{cases} \quad (18.1)$$

(vergleiche die analogen Ergebnisse bezüglich der **Fundamental-**gruppe H_g in [18, S. 42 ff.]), wobei wegen $\varphi_{,i,j} = \varphi_{,j,i}$ die Tensoren Γ_{ij}^k und L_{ij} *symmetrisch sind*. Das Differentialgleichungssystem (18.1) ist für die Komponenten von $\varphi, \varphi_{,i}$ und \mathcal{A} lösbar, wenn die *Integrierbarkeitsbedingungen*

$$\begin{cases} \varphi_{,i,j,k} = \varphi_{,i,k,j} & \text{und} \\ \mathcal{A}_{,i,j} = \mathcal{A}_{,j,i} \end{cases} \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (18.2)$$

erfüllt sind. Daraus folgen als notwendige Bedingungen für die Lösbarkeit von (18.1)

$$\begin{aligned} \varphi_{,i,j,k} - \varphi_{,i,k,j} &= (L_{ij,k} - L_{ik,j} + \Gamma_{ij}^n L_{nk} - \Gamma_{ik}^n L_{nj}) \cdot \mathcal{A} + \\ &+ (\Gamma_{ij}^m{}_{,k} - \Gamma_{ik}^m{}_{,j} + \Gamma_{ij}^n \Gamma_{nk}^m - \Gamma_{ik}^n \Gamma_{nj}^m - L_{ij} L_{kn} g^{nm} + L_{ik} L_{jn} g^{nm}) \cdot \varphi_{,m} = \\ &= 0 \end{aligned} \quad (18.3)$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{,i,j} - \mathcal{A}_{,j,i} &= 0 = (L_{kj,i} g^{jm} + L_{kj} g^{jm}{}_{,i} - L_{ij,k} g^{jm} - \\ &- L_{ij} g^{jm}{}_{,k} - L_{ij} g^{jn} \Gamma_{nk}^m + L_{kj} g^{jn} \Gamma_{ni}^m) \cdot \varphi_{,m} + \\ &+ (L_{kj} g^{jn} L_{ni} - L_{ij} g^{jn} L_{nk}) \cdot \mathcal{A} \end{aligned} \quad (18.4)$$

beziehungsweise wegen der linearen Unabhängigkeit von $\varphi_{,1}, \varphi_{,2}$ und \mathcal{A}

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{ij}^m, k - \Gamma_{ik}^m, j + \Gamma_{ij}^n \Gamma_{nk}^m - \Gamma_{ik}^n \Gamma_{nj}^m = (L_{ij} L_{kn} - L_{ik} L_{jn}) g^{nm} \\ \text{(Integrierbarkeitsbedingung von GAUSS),} \\ L_{ij, k} - L_{ik, j} = \Gamma_{ik}^n \cdot L_{nj} - \Gamma_{ij}^n \cdot L_{nk} \\ \text{(Integrierbarkeitsbedingung von MAINARDI-CODAZZI),} \\ L_{kj, i} g^{jm} - L_{ij, k} g^{jm} + L_{kj} g^{jm}, i - L_{ij} g^{jm}, k = L_{ij} g^{jn} \Gamma_{nk}^m - L_{kj} g^{jn} \Gamma_{ni}^m, \\ L_{kj} g^{jn} L_{ni} = L_{ij} g^{jn} L_{nk}. \end{array} \right. \quad (18.5)$$

Die vierte Gleichung dieser Formelgruppe stellt die Identität dar; die dritte läßt sich - wie man durch kurze Rechnung bestätigt - aus den beiden ersten herleiten, die im allgemeinen voneinander unabhängig sind. (18.5) stellt das Analogon zu den aus der euklidischen Flächentheorie bekannten Integrierbarkeitsbedingungen dar (vergleiche W. BLASCHKE - K. LEICHTWEISS [7, S. 135 ff.])³³⁾.

Wir haben damit den

SATZ 18.1: Für die Lösbarkeit des Differentialgleichungssystems (18.1) sind die Analoga zu den Integrierbarkeitsbedingungen von GAUSS (18.5) und MAINARDI-CODAZZI (18.5) notwendig.

³³⁾ Der Beweis des zugehörigen Fundamentalsatzes der galileischen Flächentheorie soll einer eigenen Publikation vorbehalten bleiben.

§ 19 NORMALKRÜMMUNG, KRÜMMUNGSLINIEN

Auf einem C^3 - Flächenstück Φ des galileischen Raumes G_3 $\varphi = \varphi(v^1, v^2)$ sei durch $v^i = v^i(s)$ eine auf die positiv orientierte Bogenlänge s ($s \in \mathbb{R}$) bezogene Flächenkurve c mit nicht-isotropen Tangenten gegeben. Es gilt dann

$$g_i \cdot v^{i'} = 1, \quad (19.1)$$

wobei durch Striche Ableitungen nach der Bogenlänge s gekennzeichnet wurden. Weiter gilt

$$\begin{cases} \varphi' = \varphi_{,i} \cdot v^{i'} & \text{und} \\ \varphi'' = \varphi_{,i} v^{i''} + \varphi_{,i} v^{i''} = \varphi_{,i,j} v^{i'} v^{j'} + \varphi_{,k} v^{k''}, \end{cases} \quad (19.2)$$

woraus mit (17.4)

$$\varphi'' = (\Gamma_{ij}^k v^{i'} v^{j'} + v^{k''}) \cdot \varphi_{,k} + L_{ij} v^{i'} v^{j'} \cdot \varphi \quad (19.3)$$

und wegen $x'' = 0$

$$(\Gamma_{ij}^k v^{i'} v^{j'} + v^{k''}) \cdot \varphi_{,k} = \rho \cdot \delta = \rho \cdot g^k \cdot \varphi_{,k} \quad (19.4)$$

mit einem reellen Proportionalitätsfaktor ρ folgt. Bezeichnen wir mit φ den Winkel zwischen der Kurvenhauptnormalen h von c und der Flächennormalen ϱ , so stellt sich nach kurzer Rechnung

$$\cos \varphi = \frac{\varrho \cdot \varphi''}{|\varphi''|} \quad \text{und} \quad \sin \varphi = \frac{\delta \cdot \varphi'}{|\varphi''|} \quad (19.5)$$

ein, wobei für

$$+\sqrt{y''^2 + z''^2} = |\varphi''| \quad (19.6)$$

gesetzt wurde, wofür nach (10.3) auch die Krümmung κ von c eingesetzt werden kann :

$$\begin{cases} \kappa \cdot \cos \varphi = \mathcal{K} \cdot \varphi'' = L_{ij} v^i{}_{,v^j}{}', & \text{und} \\ \kappa \cdot \sin \varphi = \delta \cdot \varphi'' = \rho. \end{cases} \quad (19.7)$$

Für $\varphi = 0$ erhalten wir die Kurvenhauptnormale h in Richtung der Flächennormalen ; die entsprechende Krümmung κ_n nennen wir wie üblich *Normalkrümmung*, für die damit das galileische Analogon zum Satz von MEUSNIER

$$\kappa_n = \kappa \cdot \cos \varphi \quad (19.8)$$

gilt. Analog soll ρ als *geodätische Krümmung* κ_g der Flächenkurve bezeichnet werden; wir errechnen mit (19.4)

$$\kappa_g = \frac{\Gamma_{ij}^k v^i{}_{,v^j}{}' + v^k{}''}{g^k}. \quad (19.9)$$

Die *Schmieglinien* der Fläche sind durch $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und damit

$$\begin{cases} L_{ij} v^i{}_{,v^j}{}' = 0 & \text{bzw.} \\ L_{ij} dv^i dv^j = 0 \end{cases} \quad (19.10)$$

gekennzeichnet und sind somit die Nullrichtungen der zweiten Grundform (17.8).

Als *Krümmungslinien* definieren wir jene Flächenkurven $v^i(t)$ ($t \in I \subset \mathbb{R}$), längs denen die *Flächennormalen eine Torse bilden* (vgl. E. KRUPPA [29, S. 33]). Sie sind durch

$$\det (\dot{\varphi}, \mathcal{K}, \mathcal{K}') = 0 \quad (19.11)$$

gekennzeichnet, was nach (19.2) und (17.15) durch

$$\det (\varphi_{,k} \dot{v}^k, \mathcal{K}, -g^i L_{ij} \dot{v}^j \delta) = 0 \quad (19.12)$$

ersetzt werden kann. Da δ und \mathcal{K} stets zueinander orthogonal sind (wir setzen im folgenden stets $w \neq 0$ voraus), kommen als Krümmungslinien genau die durch

$$\varrho_{,k} \cdot \dot{v}^k = \lambda \cdot \delta \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \iff x_{,k} \cdot \dot{v}^k = g_k \cdot \dot{v}^k = 0 \quad (19.13)$$

beziehungsweise

$$g^i \cdot L_{ij} \cdot \dot{v}^j = 0 \quad (19.14)$$

gekennzeichneten Flächenkurven in Betracht. Die Lösungskurven von (19.13) besitzen stets isotrope Tangenten und sind daher als ebene Schnitte der Fläche mit euklidischen Ebenen des galileischen Raumes G_3 zu interpretieren; wir werden sie als *isotrope Flächenkurven* bezeichnen. (19.14) kennzeichnet die *Krümmungslinien im engeren Sinn*; sie sind im allgemeinen konjugiert zu den isotropen Flächenkurven und daher als *ebene Schattengrenzen* von Φ bei Beleuchtung aus einem Punkt der absoluten Geraden f aufzufassen³⁴⁾. Als Analogon zu [7, S. 108 ff] gilt der

SATZ 19.1: Die Normalkrümmung κ_n ist genau für die Krümmungslinien eines C^2 -Flächenstückes Φ des galileischen Raumes G_3 extremal.

BEWEIS: Es gilt

$$\kappa_n = L_{ij} v^i v^j, = \frac{L_{ij} \dot{v}^i \dot{v}^j}{g_{ij} \dot{v}^i \dot{v}^j}, \quad (19.15)$$

woraus wir

$$\lim_{g_k \dot{v}^k \rightarrow 0} \kappa_n = \infty \quad (19.16)$$

gewinnen; für isotrope Flächenkurven (19.13) ist κ_n daher extremal.

³⁴⁾ Dasselbe Resultat liegt auch für den Flaggenraum (vgl. [15, S. 40]) und den quasielliptischen Raum (vgl. [54, S. 23]) vor.

Durch Differenzieren von (19.15) erhalten wir, daß κ_n sein Minimum genau längs

$$g^i \cdot L_{ij} \cdot \dot{v}^j = 0 \quad (19.17)$$

annimmt, wodurch in Übereinstimmung mit (19.14) Satz 19.1 bewiesen ist. \square

Mit Hilfe der Lagrange'schen Multiplikatorenregel kann der zugehörige Wert K_1 der Normalkrümmung als

$$K_1 = \frac{L_{11} \cdot L_{22} - (L_{12})^2}{g_{11} \cdot L_{22} - 2 \cdot g_{12} \cdot L_{12} + g_{22} \cdot L_{11}} \quad (19.18)$$

errechnet werden (vgl. [7, S. 108 ff.]), der durch Umformung mittels (16.5) auf die Form

$$K_1 = \frac{L_{11} \cdot L_{22} - (L_{12})^2}{w^2 \cdot g^{ij} \cdot L_{ij}} = \frac{\det(L_{ij})}{w^2 \cdot g^{ij} \cdot L_{ij}} \quad (19.19)$$

gebracht werden kann.³⁵⁾ In Analogie zur Flächentheorie des Flaggenraumes (vgl. [15, S. 46]) wollen wir

$$K := \frac{\det(L_{ij})}{w^2} \quad (19.20)$$

als GAUSS'sche Krümmung und

$$H := g^{ij} \cdot L_{ij} \quad (19.21)$$

als mittlere Krümmung der Fläche Φ im betreffenden Punkt definieren, womit (19.19) für $H \neq 0$ die Gestalt

$$K_1 = \frac{K}{H} \quad (19.22)$$

erhält.

³⁵⁾ Man vergleiche das analoge Resultat für den quasielliptischen Raum bei H. STACHEL [54, S. 24].

Da die Krümmungslinien im engeren Sinn und die isotropen Flächenkurven auch als Krümmungslinien und isotrope Flächenkurven in einem geeignet gewählten Flaggenraum $I_3^{(2)}$ aufzufassen sind, gilt nach H. BRAUNER [15, S. 41] der folgende

SATZ 19.2: Die Krümmungslinien eines C^2 - Flächenstückes Φ des galileischen Raumes G_3 sind als relative Krümmungslinien hinsichtlich der vierparametrischen Mannigfaltigkeit von Punktkugeln aufzufassen und damit ebenso wie die isotropen Flächenkurven nicht nur gegenüber Bewegungen aus der Gruppe B_6 sondern auch gegenüber den Möbiustransformationen aus der Gruppe \mathcal{M}_{13} invariant mit dem Flächenstück verknüpft. ³⁶⁾

Schneiden sich zwei Flächenstücke Φ_1 und Φ_2 des galileischen Raumes G_3 nach einer Krümmungslinie c , so läßt sich Φ_1 und Φ_2 längs c je ein Zylinder mit Spitze auf der absoluten Geraden f umschreiben ; der Schnittwinkel zwischen Φ_1 und Φ_2 ist somit längs c konstant. Es gilt daher als Analogon zu einem Satz von O. BONNET (vgl. [29, S. 34]) der

SATZ 19.3: Ist die Schnittkurve c zweier C^2 - Flächenstücke Φ_1 und Φ_2 des galileischen Raumes G_3 auf beiden Flächen eine Krümmungslinie im engeren Sinn, so schneiden sich Φ_1 und Φ_2 längs c unter konstantem Winkel. Schneiden sich umgekehrt zwei C^2 - Flächenstücke Φ_1 und Φ_2 des galileischen Raumes G_3 längs einer Kurve c , die auf einem der beiden Flächenstücke eine Krümmungslinie im engeren Sinn ist, unter konstantem Winkel, so ist c auch auf dem anderen Flächenstück eine Krümmungslinie.

³⁶⁾ Diese Auffassung der Krümmungslinien geht auf E. MÜLLER [31, S. 17 f.] zurück.

Daraus kann so wie im euklidischen Raum E_3 (vgl. [29, S. 34]) das folgende Analogon zu einem Satz von F. JOACHIMSTAL gefolgert werden :

SATZ 19.4: Schneidet eine Punktkugel oder eine isotrope Ebene des galileischen Raumes G_3 ein C^2 - Flächenstück Φ nach einer Krümmungslinie, so schneiden sie sich unter konstantem Winkel. Schneidet eine Punktkugel oder eine isotrope Ebene ein C^2 - Flächenstück Φ des galileischen Raumes G_3 unter konstantem Winkel, so ist die Schnittkurve Krümmungslinie auf Φ .³⁷⁾

Die mittlere Krümmung H (19.21) gestattet folgende Deutung :

SATZ 19.5: Die mittlere Krümmung H eines C^2 - Flächenstückes Φ des galileischen Raumes G_3 läßt sich in einem zulässigen Flächenpunkt P als Krümmung κ^* des ebenen Schnittes des Flächenstückes mit der den Punkt P enthaltenden euklidischen Ebene deuten.

BEWEIS: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann die isotrope

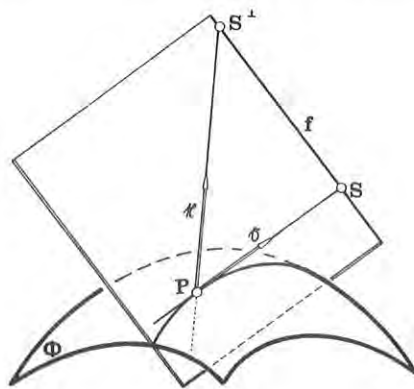


Abbildung 10 : Isotrope Flächenkurve auf einem zulässigen Flächenstück Φ des G_3

³⁷⁾ Es ist bemerkenswert, daß alle diese Sätze nicht nur im euklidischen und im galileischen Raum sondern auch im Flaggenraum [15, S. 42], im quasielliptischen [54, S. 23 f.] und im einfach isotropen Raum [61, S. 390] gültig sind.

Flächenkurve c auf ihre euklidische Bogenlänge t bezogen werden, was in (19.2) und (19.3) mit (17.14)

$$\begin{cases} \varrho' = \varrho_{,i} \cdot v^{i'} = \delta = g^i \cdot \varrho_{,i} & \text{und damit} \\ \varrho'' = L_{ij} \cdot v^{i'} \cdot v^{j'} \mathcal{K} = L_{ij} \cdot g^i \cdot g^j \cdot \mathcal{K} \end{cases} \quad (19.23)$$

bewirkt. Investieren wir (19.21), so gilt

$$\varrho'' = H \cdot \mathcal{K}. \quad (19.24)$$

Für die gesuchte Krümmung κ^* stellt sich damit

$$\kappa^* = |\varrho''| = H \quad (19.25)$$

ein.³⁸⁾ □

Wird $\kappa^* = K_2$ als *zweite Hauptkrümmung* definiert, so gilt

$$K = K_1 \cdot K_2, \quad (19.26)$$

und wir sind in der Lage, durch den folgenden Satz alle Minimalflächen des galileischen Raumes zu charakterisieren - für sie verschwindet H auf dem ganzen Flächenstück :

SATZ 19.6: Die Minimalflächen des galileischen Raumes \mathbb{G}_3 sind die Kegel mit Spitze auf der absoluten Geraden f und die Regelflächen des Typs C ; sie sind konoidal mit der absoluten Geraden als Fernleitgeraden.³⁹⁾

³⁸⁾ Dieses Ergebnis gilt auch im Flaggenraum (vgl. H. BRAUNER [15, S. 45]), wo allerdings der Faktor 2 auftritt, und im quasielliptischen Raum (vgl. H. STACHEL [54, S. 22]).

³⁹⁾ Auch dieser Satz gilt analog im Flaggenraum (vgl. [15]) und im quasielliptischen Raum (vgl. [54]).

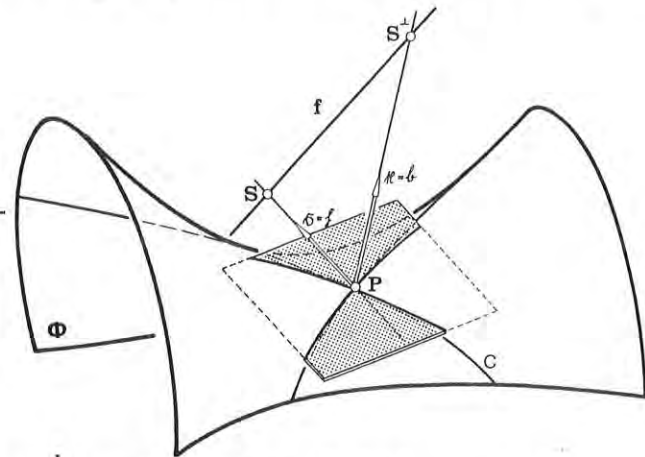
§ 20 SCHMIEGLINIEN

Wir wollen im folgenden ausschließen, daß auf dem gegebenen C^3 - Flächenstück Φ isotrope Schmieglinientangenten vorliegen. Da die Schmiegeebene einer Schmieglinie c von Φ mit der Tangentialebene im betrachteten Flächenpunkt P zusammenfällt, können ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Hauptnormale h und die Binormale b von c durch

$$\begin{cases} f = \delta & \text{und} \\ b = \mathcal{N} \end{cases} \quad (20.1)$$

beschrieben werden (vgl. Abbildung 11). Außerdem soll c auf die

Abbildung 11 : Begleitendes Dreibein von Schmieglinien in einem zulässigen Flächenpunkt P



Bogenlänge s bezogen sein ($g_i \cdot v^{i'} = 0$); dann folgt aus den Ableitungsgleichungen (10.7)

$$\delta' = \tau \cdot \mathcal{N}, \quad (20.2)$$

wobei τ die Torsion der Schmieglinie c im Punkt P bezeichnet.

Aus (20.2) erhalten wir mit (17.14)

$$\delta' = \delta_{,i} \cdot v^{i'} = g^k \cdot L_{ki} \cdot v^{i'} \cdot \mathcal{N}. \quad (20.3)$$

Es gilt somit

$$\tau = g^k \cdot L_{ki} \cdot v^{i'}. \quad (20.4)$$

Daraus und aus $g_i v^{i'} = 0$ können für $H \neq 0$

$$\begin{cases} v^{1'} = \frac{1}{w \cdot H} \cdot (g_2 \cdot \tau - g^k \cdot L_{k2}) \\ v^{2'} = \frac{1}{w \cdot H} \cdot (g^k \cdot L_{k1} - g_1 \cdot \tau) \end{cases} \quad (20.5)$$

bestimmt werden. Einsetzen in $L_{ij} \cdot v^{i'} \cdot v^{j'} = 0$ liefert die Bedingung

$$\frac{1}{w^2 \cdot H} \cdot (L_{11} \cdot L_{22} - (L_{12})^2) + \frac{\tau^2}{H} = 0, \quad (20.6)$$

aus der wir

$$\tau_{1,2} = \pm \frac{1}{w} \cdot \sqrt{(L_{12})^2 - L_{11} \cdot L_{22}} \quad (20.7)$$

erhalten. Mit (19.20) ist die Torsion τ der Schmieglinien für $H \neq 0$ daher durch

$$\tau_{1,2} = \pm \sqrt{-K} \quad (20.8)$$

gegeben. Es gilt damit als Analogon zum euklidischen Satz von A. ENNEPER (vgl. [3, S. 78]) der folgende ⁴⁰⁾

SATZ 20.1: Die Torsion der Schmieglinien eines zulässigen C^3 -Flächenstückes Φ des galileischen Raumes G_3 stimmt in einem Flächenpunkt P mit nichtverschwindender mittlerer Krümmung mit der Wurzel aus der negativen GAUSS'schen Krümmung K überein.

⁴⁰⁾ Das analoge Resultat findet sich für den Flaggenraum in [15, S. 47], für den einfach isotropen Raum in [61, S. 415] und für den quasielliptischen Raum in [54, S. 25].

§ 21 GAUSS'SCHE KRÜMMUNG VON REGELFLÄCHEN DES GALILEISCHEN
RAUMES \mathbb{G}_3

Für *Regelflächen vom Typ A* erhalten wir mit $x = v^1$, $u = v^2$
nach (15.17) sowie (15.13) unter Verwendung von (15.29)

$$\begin{cases} \varrho_{,1} = \mathcal{M}_1 + v^2 \cdot \alpha \cdot \mathcal{M}_2 - \alpha \cdot d \cdot \mathcal{M}_3 \\ \varrho_{,2} = \mathcal{M}_1 \\ \varrho_{,1,1} = \alpha \cdot \mathcal{M}_2 - \frac{d}{dv^1}(\alpha \cdot d) + \alpha \cdot \beta \cdot d \cdot \mathcal{M}_2 + v^2 \cdot \left(\frac{d}{dv^1}(\alpha \cdot \mathcal{M}_2) + \alpha \cdot \beta \cdot \mathcal{M}_3 \right) \\ \varrho_{,1,2} = \alpha \cdot \mathcal{M}_2 \quad \text{und} \\ \varrho_{,2,2} = \alpha, \end{cases} \quad (21.1)$$

woraus wir mit dem Normaleneinheitsvektor

$$\mathcal{N} = \frac{d \cdot \mathcal{M}_2 + v^2 \cdot \mathcal{M}_3}{\sqrt{d^2 + (v^2)^2}} \quad (21.2)$$

schließlich

$$\begin{cases} L_{22} = 0, \quad L_{12} = \frac{\alpha \cdot d}{\sqrt{d^2 + (v^2)^2}} \\ W^2 = \alpha^2 \cdot (d^2 + (v^2)^2) \end{cases} \quad (21.3)$$

gewinnen. Als Analogon zur Formel von LAMARLE stellt sich (vgl.
E. KRUPPA [29, S. 74]) für die GAUSS'sche Krümmung gemäß (19.20)

$$K = - \frac{d^2}{[d^2 + (v^2)^2]^2} \quad (21.4)$$

ein ; für *Regelflächen* mit $d \neq 0$ ist demnach die GAUSS'sche Krüm-
mung K stets negativ. (Ein entsprechendes Resultat hat für den
Flaggenraum H. BRAUNER [14, S. 150] erzielt.)

Für *Regelflächen vom Typ B* erhalten wir analog

$$\begin{cases} \varrho_{,1} = \mathcal{M}_3 + v^2 \cdot \alpha \cdot \mathcal{M}_2, & \varrho_{,2} = \mathcal{M}_1, & \varrho_{,1,2} = \alpha \cdot \mathcal{M}_2, \\ \varrho_{,1,1} = -\beta \cdot \mathcal{M}_2 + v^2 \cdot (\mathcal{M}_2 + \beta \cdot \mathcal{M}_3) \cdot \frac{d\alpha}{dv^1} & \text{und} & \varrho_{,2,2} = \alpha, \end{cases} \quad (21.5)$$

woraus wir mit dem Normaleneinheitsvektor

$$n = \frac{M_2 - v^2 \cdot \alpha \cdot M_3}{\sqrt{1 + (v^2)^2 \cdot \alpha^2}} \quad (21.6)$$

die Bedingungen

$$L_{22} = 0, \quad L_{12} = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + (v^2)^2 \cdot \alpha^2}}, \quad w^2 = 1 + (v^2)^2 \cdot \alpha^2 \quad (21.7)$$

gewinnen. Daraus folgt die Beziehung

$$K = - \frac{d^2}{[d^2 + (v^2)^2]^2}, \quad (21.8)$$

die als Analogon zur Formel von LAMARLE für Regelflächen vom Typ B anzusprechen ist ; es existieren mithin sowohl bei Typ A als auch bei Typ B keine Regelflächen mit nichtverschwindender konstanter GAUSS'scher Krümmung K.

Für Regelflächen vom Typ C erhalten wir

$$\begin{cases} \ell_{,1} = M_1 + \frac{1}{\delta} \cdot M_3, \\ \ell_{,2} = M_2, \\ \ell_{,1,2} = \frac{1}{\delta} \cdot M_3 \quad \text{und} \\ \ell_{,2,2} = \sigma, \end{cases} \quad (21.9)$$

woraus mit $n = M_3$

$$L_{12} = \frac{1}{\delta} \quad \text{und} \quad w = 1$$

folgt. Wir erhalten damit als Analogon zur Formel von LAMARLE für Regelflächen vom Typ C

$$K = - \frac{1}{\delta^2} \quad (21.10)$$

(in Analogie zu H. BRAUNER [14, S. 152]). Genau die konstant gedrehten Regelflächen des Typs C besitzen demnach konstante

GAUSS'sche Krümmung. ⁴¹⁾ Wir haben somit den

SATZ 21.1: Die konstant gedrehten Regelflächen vom Typ C sind im galileischen Raum G_3 die einzigen windschiefen Flächen mit konstanter nichtverschwindender GAUSS'scher Krümmung.

⁴¹⁾ Es handelt sich dabei um Minimalflächen ($H = 0$); eine Parameterdarstellung ist in Formel (14.76) angegeben.

LITERATUR

- [1] BECK, H.: Der Fundamentalsatz der Lieschen Kugelgeometrie im Euklidischen Raum. Math. Z. 15, 159 - 167 (1922).
- [2] BECK, H.: Dreidimensionale Geometrien mit einer unendlich fernen Ebene. Sitzungsber. Berl. Math. Gesell. 35, 3 - 16 (1936).
- [3] BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie I. Springer, Berlin 1921.
- [4] BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie II. Springer, Berlin 1923.
- [5] BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie III. Springer, Berlin 1929.
- [6] BLASCHKE, W.: Nicht - Euklidische Geometrie und Mechanik I, II, III. Hamburger Math. Einzelschr. 34 (1942).
- [7] BLASCHKE, W. und LEICHTWEISS, K.: Elementare Differential - geometrie. Springer, Berlin 1973.
- [8] BLASCHKE, W. und REICHARDT, H.: Einführung in die Differentialgeometrie. Springer, Berlin 1960.
- [9] BOL, G.: Projektive Differentialgeometrie I. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1950.
- [10] BOL, G.: Projektive Differentialgeometrie II. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1954.
- [11] BOL, G.: Projektive Differentialgeometrie III. Vandenhoeck & Ruprecht. Göttingen 1967.
- [12] BRAUNER, H.: Eine einheitliche Erzeugung konstant gedrahter Strahlflächen. Monatsh. Math. 65, 301 - 314 (1961).

- [13] BRAUNER, H.: Geometrie des zweifach isotropen Raumes I.
J. Reine Angew. Math. 224, 118 - 146 (1966).
- [14] BRAUNER, H.: Geometrie des zweifach isotropen Raumes II.
J. Reine Angew. Math. 226, 132 - 158 (1967).
- [15] BRAUNER, H.: Geometrie des zweifach isotropen Raumes III.
J. Reine Angew. Math. 228, 38 - 70 (1967).
- [16] BRAUNER, H.: Geometrie projektiver Räume I. Bibliogr. Inst.
Mannheim 1976.
- [17] BRAUNER, H.: Geometrie projektiver Räume II. Bibliogr.
Inst. Mannheim 1976.
- [18] ЗУХАРАЕВ, Р.Г.: О поверхностях евклидова пространства с
вырождающимся абсолютом. Уч. зап. Казанского гос. ун - та.
114, кн. 2, 39 - 52 (1954).
- [19] BUSEMANN, H. und KELLY, P.J.: Projective Geometry and Pro-
jective Metrics. Academic Press, New York 1953.
- [20] CESARO, E.: Vorlesungen über natürliche Geometrie. Teubner,
Leipzig 1901.
- [21] CRUCEANU, V.: Asupra Teoriei Curbelor in Spatiul Afin - axial
parabolic. Analele Stiintifice ale Universitatii "Al.I.Cuca"
Sect. I (N.S.) 6, 627 - 641 (1960).
- [22] GIERING, O.: Vorlesungen über höhere Geometrie. Vieweg,
Wiesbaden 1982.
- [23] HOSCHEK, J.: Liniengeometrie. Bibliogr. Inst., Zürich 1971.
- [24] HOSCHEK, J.: Globale Invarianten von Raumkurven, Regelflächen
und Geradenkongruenzen im einfach isotropen Raum. J. Reine
Angew. Math. 286/287, 205 - 212 (1976).
- [25] KLEIN, F.: Vorlesungen über nicht - euklidische Geometrie.
(Nachdruck) Springer, Berlin 1968 .

- [26] KLEIN, F.: Vorlesungen über höhere Geometrie. (Nachdruck) Springer, Berlin 1968.
- [27] KLOTZEK, B.: Einführung in die Differentialgeometrie I. Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin 1981.
- [28] KRUPPA, E.: Zur Differentialgeometrie der Strahlflächen und Raumkurven. Sitzungsber., Abt. II, österr. Akad. Wiss., Math. - Naturwiss. Kl. 157, 143 - 176 (1949).
- [29] KRUPPA, E.: Analytische und konstruktive Differentialgeometrie. Springer, Wien 1957.
- [30] LANG, J.: Zu den linearen Sphärenmannigfaltigkeiten im einfach isotropen Raum. Ber. Math. - Stat. Sect. Forschungszentr. Graz (im Druck).
- [31] MÜLLER, E.: Relative Minimalflächen. Monatsh. Math. Phys. 31, 1 - 19 (1921).
- [32] MÜLLER, E.: Punktmittelflächen und eine Art relativer Flächentheorie. Sitzungsber., Abt. II, österr. Akad. Wiss., Math. - Naturwiss. Kl. 134, 255 - 280 (1925).
- [33] MÜLLER, E. und KRAMES, J.: Vorlesung über Darstellende Geometrie III. Konstruktive Behandlung der Regelflächen. Leipzig - Wien 1931.
- [34] MÜLLER, H.R.: Sphärische Kinematik. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1962.
- [35] PALMAN, D.: Über die Kugelschnitte der Torusfläche des isotropen Raumes I_3 . Sitzungsber., Abt. II, österr. Akad. Wiss., Math. - Naturwiss. Kl. 187, 51 - 68 (1979).
- [36] PALMAN, D.: Sphärische Quartiken auf dem Torus im einfach isotropen Raum. Glasnik Mat. 14 (34), 345 - 357 (1979).
- [37] PALMAN, D.: Drehzykliden 4. Ordnung (Typus I) des einfach isotropen Raumes. Glasnik Mat. 15 (35), 133 - 148 (1980).

- [38] PALMAN, D.: Plücker'sches Konoid und Steinersche Fläche als Flächen des einfach isotropen Raumes. Rad Jug. Akad. 386, 73 - 85 (1980).
- [39] PALMAN, D.: Dupinsche Zykliden des einfach isotropen Raumes. Sitzungsber., Abt. II, österr. Akad. Wiss., Math. - Naturwiss. Kl. 190, 427 - 443 (1981).
- [40] РОЗЕНФЕЛЬД, Е.А.: Неевклидовы пространства. Москва 1969.
- [41] SACHS, H.: Ein isotropes Analogon zu einem Satz von Abrahamsescu und einige Grenzwertformeln. Archiv Math. 23, 661 - 668 (1972).
- [42] SACHS, H.: Zur Liniengeometrie isotroper Räume. Habilitationsschrift a. d. Universität Stuttgart, Privatdruck 1972.
- [43] SACHS, H.: Projektiv - metrische Kennzeichnungen konstant gedrahter Regelflächen. Sitzungsber., Abt. II, österr. Akad. Wiss., Math. - Naturwiss. Kl. 182, 155 - 175 (1974).
- [44] SACHS, H.: Edlinger Flächen in isotropen Räumen. Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss. München, Mathem. - Naturwiss. Kl. 5, 59 - 86 (1975).
- [45] SACHS, H.: Kreisflächen im zweifach isotropen Raum. Journ. Geom. 8, 33 - 47 (1976).
- [46] SACHS, H.: Zur Geometrie der Sphären im einfach isotropen Raum. Sitzungsber., Abt. II, österr. Akad. Wiss., Math.-Naturwiss. Kl. 186, 241 - 261 (1977).
- [47] SACHS, H.: Zur Geometrie der Hypersphären im n-dimensionalen einfach isotropen Raum. J. Reine Angew. Math. 298, 199 - 217 (1978).
- [48] SACHS, H.: Geodätische und Pseudogeodätische auf Regelflächen im Flaggenraum. Archiv Math. 33, 478 - 484 (1979).

- [49] SACHS, H.: Zur Theorie der Pseudogeodätischen auf Regelflächen des einfach isotropen Raumes. Sitzungsber., Abt. II, österr. Akad. Wiss., Math. - Naturwiss. Kl. 189, 67 - 82 (1980).
- [50] SACHS, H.: Existenzsätze für Regelflächen im Flaggenraum $J_3^{(2)}$. Archiv Math. 38, 36 - 42 (1982).
- [51] SACHS, H.: On the geometry of ruled surfaces in flag space. Colloquia mathematica societatis János Bolyai, 31. Differential geometry, Budapest 1979; North - Holland Publishing Company, Sammelband (1982).
- [52] SACHS, H.: Lehrbuch der isotropen Geometrie. Vieweg, Wiesbaden 1985.
- [53] СИРОТА, А.И.: Геометрия трехмерного пространства с вырожденной евклидовой метрикой. Уч. зап. Моск. Гос. пед. Инст. им. Ленина, 268 - 314 (1963).
- [54] STACHEL, H.: Zur quasielliptischen Differentialgeometrie. Ber. Math. - Stat. Sekt. Forschungszent. Graz 80, 1 - 38 (1977).
- [55] STACHEL, H.: Strahlflächen im quasielliptischen Raum. Ber. Math. - Stat. Sekt. Forschungszent. Graz 120, 1 - 40 (1979).
- [56] STACHEL, H.: Fundamentalsätze der quasielliptischen Differentialgeometrie. J. Geom. 13, 144 - 153 (1979).
- [57] STRUBECKER, K.: Beiträge zur Geometrie des isotropen Raumes. J. Reine Angew. Math. 178, 135 - 173 (1938).
- [58] STRUBECKER, K.: Geometrie des isotropen Raumes und einige ihrer Anwendungen. Jahresber. DMV 48, 236 - 257 (1938).
- [59] STRUBECKER, K.: Differentialgeometrie des isotropen Raumes I: Theorie der Raumkurven. Sitzungsber., Abt. II, österr. Akad. Wiss., Math. - Naturwiss. Kl. 150, 1 - 53 (1941).

- [60] STRUBECKER, K.: Differentialgeometrie des isotropen Raumes II: Die Flächen konstanter Relativkrümmung $K = rt - s^2$. Math. Z. 47, 743 - 777 (1942).
- [61] STRUBECKER, K.: Differentialgeometrie des isotropen Raumes III: Flächentheorie. Math. Z. 48, 369 - 427 (1942).
- [62] STRUBECKER, K.: Differentialgeometrie des isotropen Raumes IV: Theorie der flächentreuen Abbildungen der Ebene. Math. Z. 50, 1 - 92 (1944).
- [63] STRUBECKER, K.: Über die parataktischen Abbildungen der Flächenelemente des isotropen Raumes auf Punktepaare der Ebene. J. Reine Angew. Math. 186, 1 - 36 (1945).
- [64] STRUBECKER, K.: Differentialgeometrie des isotropen Raumes V: Zur Theorie der Eiliniien. Math. Z. 52, 525 - 573 (1949).
- [65] STRUBECKER, K.: Minimalflächen des isotropen Raumes. Proc. Int. Math. Congress Amsterdam 1954 II, 258 - 260.
- [66] STRUBECKER, K.: Geometrie in einer isotropen Ebene. Math. Nat. Unterr. 15, 297 - 306, 343 - 351, 385 - 394 (1963).
- [67] VRANCEANU G.: Vorlesungen über Differentialgeometrie I. Akademie, Berlin 1961.
- [68] WEISS, G.: Zur euklidischen Liniengeometrie I. Sitzungsber., Abt. II, österr. Akad. Wiss., Math. - Naturwiss. Kl. 187, 417 - 436 (1978).
- [69] WEISS, G.: Zur euklidischen Liniengeometrie II. Sitzungsber., Abt. II, österr. Akad. Wiss., Math. - Naturwiss. Kl. 188, 343 - 359 (1979).
- [70] WEISS, G.: Zur euklidischen Liniengeometrie III. Sitzungsber., Abt. II, österr. Akad. Wiss., Math. - Naturwiss. Kl. 189, 19 - 39 (1980).

- [71] WEISS, G.: Zur euklidischen Liniengeometrie IV. Sitzungsber., Abt. II, österr. Akad. Wiss., Math. - Naturwiss. Kl. 191, 331 - 368 (1982).
- [72] WUNDERLICH, W.: Über die Böschungslinien auf Flächen zweiter Ordnung. Sitzungsber., Abt. II, österr. Akad. Wiss., Math. - Naturwiss. Kl. 155, 309 - 331 (1947).
- [73] WÜNSCH, H.: Die kugeltreuen Transformationen des isotropen Raumes. Diss. TH Karlsruhe, 1 - 216 (1963).
- [74] ХАТИПОВ, А.Е.-А.: Теория поверхностей в пространстве с распадающимся абсолютом. Труд. Сем. Вект. Тен., 10, 285 - 308 (1956).
- [75] YAGLOM, I.M., ROZENFEL'D B.A. and YASINISKAYA E.U.: Projective Metrics. Math. Surveys 19/5, 47 - 107 (1964).
- [76] YAGLOM, I.M.: A Simple Non - Euclidean Geometry and its Physical Basis. New York - Heidelberg - Berlin 1979.
- [77] ЯГЛОМ, И.М.: Принцип Относительности Галилея и Неевклидова Геометрия. Москва (1969).

DIE GEOMETRIE DES
GALILEISCHEN RAUMES

Otto Röschel, MU Leoben

Bericht Nr. 256