DER SATZ VON HOLDITCH IN DER ISOTROPEN EBENE

von

Otto Röschel

Leoben

Abstract. In this paper we show, that the classical theorem of HOLDITCH also holds in the isotropic plane. Than we give an interpretation for the only invariant M, which determines the area of the point - paths of a periodic motion in the isotropic plane.

Der klassische Satz von HOLDITCH aus dem Jahr 1858 (vergleiche [9]) war in letzter Zeit mehrfach Gegenstand bemerkenswerter Untersuchungen und Verallgemeinerungen (vergleiche [1], [6], [8] und [13]). Gleichzeitig wurde versucht, diesen Satz für Regelflächen auszusprechen (vergleiche [6], [7] und [10]) oder ihn in nichteuklidische Ebenen zu übertragen (vergleiche [7] und [12], wo ein sphärisches Analogon bewiesen wird). Da nun auch die Kinematik der isotropen Ebene eingehend studiert wurde (vergleiche [14], [15], [20], [21] und [22]), soll hier versucht werden, eine Verallgemeinerung des Satzes von HOLDITCH für die isotrope Ebene zu beweisen.

1. GRUNDLAGEN

In der affinen Ebene $A_2(\mathbb{R})$ wird durch

$$\begin{cases} x(t) = a(t) + x_0 \\ y(t) = b(t) + x_0 . c(t) + y_0 \end{cases} \tag{1}$$

($a(t)$, $b(t)$, $c(t) \in C^1$, $t \in (-\infty,+\infty)$) ein *Zwanglauf* Σ / Σ_0 *im Sinne der ebenen isotropen Bewegungsgruppe* $\mathbb{B}_3$ *bestimmt* (vergleiche [14], [16] und [18]).

Werden nun dem kalssischen Satz von HOLDITCH folgend die Endpunkte einer Strecke konstanter isotroper Länge ($\neq 0$) von einem isotropen Zwanglauf (1) auf einer Eilinie geführt, so muß es bei diesem Zwanglauf Augenblicke t_i ($i = 0,1,\dots n \in \mathbb{N}$) geben, in denen

$$a'(t_i) = 0 \quad {}^{1)} \qquad (0 \leq i \leq n) \tag{2}$$

gilt. Zum Zeitpunkt t_i liegt dann momentan eine *isotrope Scherung* oder ein *Stillstand* von Σ in Σ_o vor. Da in den bisherigen Betrachtungen isotroper Zwangläufe solche Momente stets ausgeschlossen waren (vergleiche [14]), wollen wir uns kurz eine etwas bessere Kenntnis darüber verschaffen.

2. ISOTROPE ZWANGLÄUFE MIT MOMENTANER ISOTROPER SCHERUNG

In (1) liege für $t = t_o$ die Situation von (2) vor. Die Punkte (x_o, y_o) von Σ besitzen dann Bahntangenten in Σ_o, deren Richtungsvektoren durch

$$\mathfrak{t}(x_o) = \begin{pmatrix} 0 \\ b'(t_o) + x_o . c'(t_o) \end{pmatrix} \tag{3}$$

beschrieben werden. Die Punkte von Σ durchlaufen *singuläre Punkte ihrer Bahnkurven*, wenn

$$b'(t_o) + x_o . c'(t_o) = 0 \tag{4}$$

erfüllt ist[2]. Dies tritt genau dann für alle Punkte der Gangebnen Σ ein, wenn ein augenblicklicher *Stillstand*

$$a'(t_o) = b'(t_o) = c'(t_o) = 0 \tag{5}$$

des isotropen Bewegungsvorganges vorliegt. Für $c'(t_o) \neq 0$ existiert in Σ eine isotrope Gerade

---

1) Ableitungen nach t werden wir durch Striche kennzeichnen.

2) Es handelt sich bei diesen Singularitäten im allgemeinen um Spitzen der Bahnkurven.

$$x_0 = - \frac{b'(t_0)}{c'(t_0)} , \tag{6}$$

deren Punkte der augenblicklichen *isotropen Scherungsachse* an - gehören, also für $t = t_0$ *Fixpunkte des Zwanglaufs* sind. Alle anderen Punkte von Σ besitzen nach (3) zum Zeitpunkt t_0 isotrope Bahntangenten.

Satz 1 : *Liegt zum Zeitpunkt t_0 eines ebenen isotropen Zwang - laufs Σ / Σ_0 eine isotrope Scherung vor, so durchlaufen alle für t_0 in Σ_0 festen Punkte von Σ augenblicklich Spitzen ihrer Bahnkurven; alle anderen Punkte von Σ besitzen für t_0 isotrope Bahntangenten.*

3. GESCHLOSSENE ISOTROPE BEWEGUNGSVORGÄNGE

Der isotrope Zwanglauf (1) heißt *geschlossen* (vergleiche [3, S. 260] bzw. [11, S. 206]), wenn es ein $T \in \mathbb{R}^+$ gibt, sodaß für alle $t \in (-\infty,+\infty)$

$$a(t+T) = a(t), \ b(t+T) = b(t) \text{ und } c(t+T) = c(t) \tag{7}$$

gilt. Dabei sei noch vorausgesetzt, daß T die kleinste derar - tige Zahl ist. Alle Bahnkurven eines solchen geschlossenen iso - tropen Bewegungsvorganges sind geschlossene Kurven.
Wir definieren

$$F(k) := \frac{1}{2}\cdot\int_k x.dy - y.dx \tag{8}$$

als *Flächenmaß einer geschlossenen C^1 - Kurve k der isotropen Ebene* und beweisen den folgenden

Satz 2 : *Das Flächenmaß einer geschlossenen C^1 - Kurve k der isotropen Ebene ist eine Invariante der ebenen isotropen Be - wegungsgruppe $\mathbb{B}_3$.*

Beweis : Sei k eine geschlossene C^1 - Kurve $(x(t),y(t))$ der isotropen Ebene mit der Periode $T \in \mathbb{R}^+$ $(t \in (-\infty,+\infty))$ und $\bar{k}$

$$\begin{cases} \bar{x}(t) = x(t) + a \\ \bar{y}(t) = y(t) + b + c.x(t) \end{cases} \tag{9}$$

die durch eine ebene isotrope Bewegung(a,b,c konstant $\in \mathbb{R}$) aus k hervorgehende Kurve, so finden wir

$$2.F(\bar{k}) = \int_{\bar{k}} \bar{x}d\bar{y} - \bar{y}d\bar{x} = (a.y(t) + x(t).(a.c - b))\Big|_0^T + \\ + 2.F(k) = 2.F(k).\square \tag{10}$$

Für die *Bahnkurven* $p_o(x_o,y_o)$ der Punkte (x_o,y_o) der Gangeben Σ bei einem geschlossenen isotropen Bewegungsvorgang Σ / Σ_o mit der Periode T erhalten wir das Flächenmaß

$$2.F(p_o(x_o,y_o)) = \int_0^T (a(t).b'(t) - a'(t).b(t))dt + \\ + x_o.\int_0^T (a(t).c'(t) - a'(t).c(t))dt, \tag{11}$$

woraus mit

$$M := \frac{1}{2}.\int_0^T (a(t).c'(t) - a'(t).c(t))dt \tag{12}$$

für die Flächenmasse $F(p_o(x_o,y_o))$ und $F(p_o(x_1,y_1))$ der Bahnkurven zweier nichtparalleler Punkte (x_o,y_o) und (x_1,y_1) von Σ

$$F(p_o(x_o,y_o)) - F(p_o(x_1,y_1)) = M.(x_o - x_1) \tag{13}$$

folgt. Damit gilt das folgende *isotrope Analogon zum Satz von Holditch* :

Satz 3 : *Die Differenz der Flächenmasse der geschlossenen Bahnkurven je zweier Punkte (x_o,y_o) und (x_1,y_1) der Gangebene Σ ist für einen geschlossenen ebenen isotropen Bewegungsvorgang Σ / Σ_o nur von der Zwanglaufkonstanten M und dem isotropen Ab - stand der Punkte (x_o,y_o) und (x_1,y_1) abhängig.*

Damit ist auch ein Analogon zu den STEINER'schen Sätzen für geschlossene ebene euklidische Zwangläufe gefunden (vergleiche [17, S. 99 ff.]): Punkte von Σ, die bei einem geschlossenen ebenen isotropen Zwanglauf Bahnkurven mit demselben Flächenmaß besitzen, liegen nach (13) für $M \neq 0$ auf einer *isotropen Geraden*. Für $M = 0$ stimmen die Flächenmasse aller Bahnkurven überein. Dies ist genau für

$$a(t) = K.c(t) \quad (K = \text{konst.} \in \mathbb{R}) \ \forall\, t \in (-\infty,+\infty) \qquad (14)$$

der Fall.

Betrachten wir nun das isotrope Analogon zum *klassischen Satz von HOLDITCH genauer* (Abbildung 1) :

Abbildung 1

Die nichtparallelen Punkte A und B werden auf einer Eilinie k geführt, überstreichen aber nicht ganz k. Der zugehörige isotrope Zwanglauf Σ / Σ_o ist geschlossen; die von den Bahnkurven von A und B (Teile von k) umschlossenen Gebiete besitzen verschwindendes Flächenmaß. Es gilt also $M = 0$; damit verschwindet das Flächenmaß aller Punktbahnen dieses isotropen Zwanglaufs. In der Abbildung 1 ist das für die Punktbahn $p_o(C)$ so zu verstehen, daß die verschieden schraffierten Gebiete in entgegengesetzter Richtung umlaufen werden. Da sie gleichen Flächeninhalt besitzen, gilt $F(p_o(C)) = 0$.[3)]

4. DEUTUNG VON M IM KINEMATISCHEN BILD DES ISOTROPEN ZWANGLAUFS

Wir betrachten die *kinematische Abbildung*

---

3) In Abbildung 1 liegt A auf der momentanen isotropen Scherungsachse und durchläuft daher augenblicklich eine Spitze seiner Bahnkurve.

$$K : \quad \mathbb{B}_3 \longrightarrow \mathbb{P}_3$$
$$(a(t),b(t),c(t)) \longrightarrow \left(1:a(t):\frac{c(t)}{2}:b(t)-\frac{a(t)c(t)}{2}\right)^t \qquad (15)$$

der ebenen isotropen Bewegung (1) (vergleiche [19, S. 205 f.]). Dem geschlossenen isotropen Bewegungsvorgang (1) mit (7) ent - spricht dabei eine *geschlossene Bildkurve* k^*. Die Zusammensetzung der ebenen isotropen Bewegungen induziert im dreidimensionalen projektiven Bildraum $\mathbb{P}_3$ eine fünfparametrige Gruppe G_5 projekti - ver Kollineationen (vergleiche [19, S. 205 f.]), die in die sechs-gliedrigen Gruppen $\mathcal{B}_6^{(1)}$ der *allgemeinen isotropen Bewegungen des einfach isotropen Raumes* $I_3^{(1)}$ und $\mathcal{B}_6^{(2)}$ der *isotropen Be - wegungen des zweifach isotropen Raumes* $I_3^{(2)}$ eingebettet ist. Wird k^* aus dem *absoluten Punkt* $F\ (0:0:0:1)^t$ dieser Räume in die nichtisotrope Ebene $x_3 = 0$ projiziert, so besitzt die ent - stehende ebene Bildkurve $k^{*\prime}$ unter Verwendung der üblichen af - finen Koordinaten

$$1:x:y:z = x_0:x_1:x_2:x_3 \qquad (x_0 \neq 0) \qquad (16)$$

das *Flächenmaß* 4)

$$F(k^*) := F(k^{*\prime}) = \frac{1}{2}\cdot\int_{k^{*\prime}} x\,dy - y\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\int_0^T (a(t).c'(t) - a'(t).c(t))dt = \frac{M}{2}. \qquad (17)$$

Damit gilt der

Satz 4 : *Die Zwanglaufkonstante M eines geschlossenen ebenen isotropen Zwanglaufs* Σ / Σ_0 *läßt sich als doppeltes Flächen - maß der dem Zwanglauf in der isotropen kinematischen Abbildung zugeordenten Bildkurve* k^* *deuten.*

---

4) Durch Rechnung bestätigt man unschwer, daß dieses Flächen - maß einer geschlossenen C^1- Raumkurve des $I_3^{(1)}$ oder des $I_3^{(2)}$ sowohl eine $\mathcal{B}_6^{(1)}$- als auch eine $\mathcal{B}_6^{(2)}$- *Invariante* ist.

LITERATUR

[1] BENDER, W.: The Holditch Curve Tracer. Math. Mag. 54, 3, 128 - 129 (1981).

[2] BLASCHKE, W. und MÜLLER, H.R.: Ebene Kinematik. Oldenbourg 1956.

[3] BOTTEMA, O. und ROTH, B.: Theoretical kinematics. North - Holland, Amsterdam 1979.

[4] BROMAN, A.: Holditch's theorem is somewhat deeper than Holditch thought in 1858. Normat. 89 - 100 (1979).

[5] BROMAN, A.: Holditch's Theorem. Math. Mag. 54, 3, 99 - 108 (1981).

[6] HENTSCHKE, S.: Erweiterungen des Satzes von Holditch. Sber. Österr. Akad. Wiss. Wien, Kl. II, 184, 451 - 458 (1975).

[7] HERING, L.: Holditch - Sätze für Regelflächen bzw. sphä - rische Kurven. Journal of Geom. 20, 86 - 94 (1983).

[8] HERING, L.: Sätze vom Holditch - Typ für ebene Kurven. Elem. Math. 38, 39 - 49 (1983).

[9] HOLDITCH, H.: Lady's and gentleman's diary for the year 1858.

[10] HOSCHEK, J.: Eine Verallgemeinerung des Satzes von Hol - ditch. Monatsh. Math. 80, 93 - 99 (1975).

[11] MÜLLER, H.R.: Über geschlossene Bewegungsvorgänge. Monatsh. Math. 55, 206 - 214 (1951).

[12] MÜLLER, H.R.: Sphärische Kinematik. Berlin 1962.

[13] MÜLLER, H.R.: Zum Satz von Holditch. Aus : TÖLKE - WILLS: Contribution to Geometry. Basel 1979.

[14] RÖSCHEL, O.: Zur Kinematik der isotropen Ebene. Journal of Geom. (im Druck).

[15] RÖSCHEL, O.: Zur Kinematik der isotropen Ebene II. (In Vorbereitung).

[16] SACHS, H.: Lehrbuch der isotropen Geometrie. Vieweg, Wiesbaden 1984.

[17] STEINER, J.: Gesammelte Werke, Bd II. Berlin 1882/83.

[18] STRUBECKER, K.: Geometrie in einer isotropen Ebene. Math. Nat. Unterr. 15, 297 - 306, 343 - 351, 385 - 394 (1962/63).

[19] STRUBECKER, K.: Geometrie und Kinematik des elliptischen, quasielliptischen und isotropen Raumes. Wege der Forschung Bd. 177. Wissenschaftl. Buchges., Darmstadt 1972.

[20] TÖLKE, J.: Eine kennzeichnende Eigenschaft der isotropen Bewegungen. Anz. Österr. Akad. Wiss. 7, 165 - 168 (1978).

[21] TÖLKE, J.: Isotrope Kegelschnittsbewegungen. Journal of Geom. 13, 31 - 48 (1979).

[22] TÖLKE, J.: Zu den affinen Zwangläufen, bei denen sich die Punkte eines Kegelschnitts auf Geraden bewegen. Studia Sci. Math. Hung. 15, 151 - 156 (1980).

Anschrift des Verfassers :

Otto Röschel

Institut für Mathematik und Angewandte Geometrie

MU - Leoben, Franz - Josef - Straße 18, A - 8700 Leoben

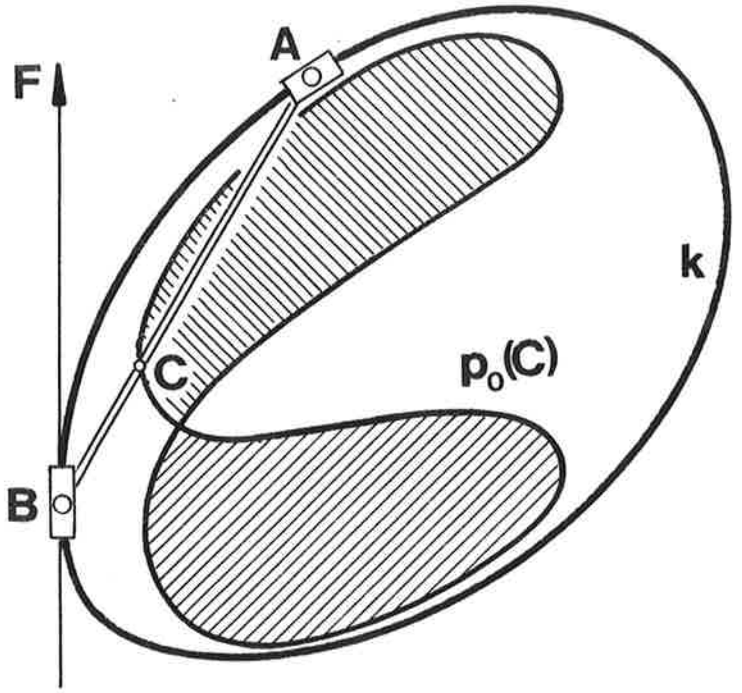

Abbildung 1