

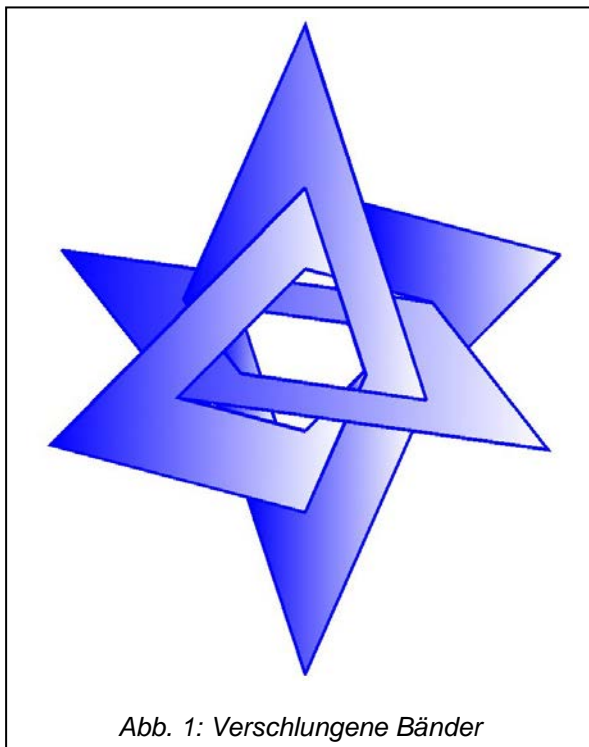
Geometrisches Modellieren von Kunstobjekten (Verschlungene Bänder)

Sybille MICK und Otto RÖSCHEL

Anschrift: Technische Universität Graz, Institut für Geometrie
Kopernikusgasse 24, 8010 Graz.
E-mail: mick@tugraz.at, roeschel@tugraz.at.

Kurzfassung

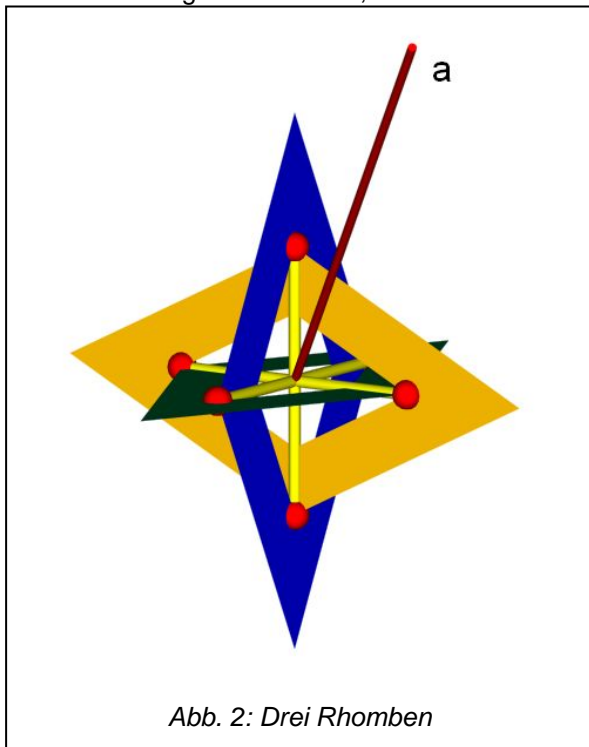
Ein ebenes, geschlossenes Band soll durch die Transformationen einer Untergruppe der Kongruenztransformationen des Raumes so positioniert werden, dass kongruente Exemplare ohne innere Schnittpunkte, aber mit gemeinsamen Randpunkten ineinander gesteckt sind (vgl. Abbildung 1). Diese Forderung wirkt auch auf die Abmessungen des Ausgangsbandes zurück - eine geometrische Analyse schafft hier Klarheit. Die dann erzeugten Objekte sind Beispielen aus der Kunst (vgl. [1], [4]) nachempfunden und werden hier „verschlungene Bänder“ genannt. Sie können als Vorlagen für Projekte im Rahmen des DG-Unterrichts dienen. Zu einem solchen Projekt gehört nach einer theoretischen Einführung die Erzeugung der Objekte mit den im Unterricht zur Verfügung stehenden CAD-Paketen. Zu den Beispielen werden wir sowohl Angaben als auch gerenderte Ergebnisse präsentieren.



1. Einleitung

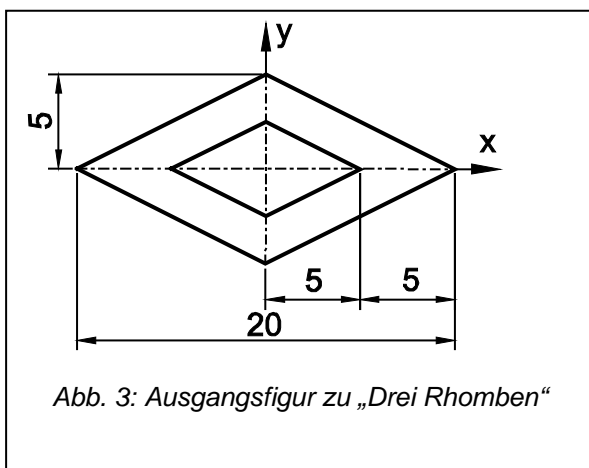
Die wunderbaren ebenen Ornamente, die von Künstlern in vielen Kulturen geschaffen wurden, faszinieren durch ihre hohe Symmetrie (vgl. ?? Buch über Alhambra). T. FARKAS ??? Moderne Bauwerke folgen organischen Formen.... In den Jahren ... wurden von den Künstlern ODOM und ROBINSON (vgl. ...) Skulpturen geschaffen, deren Ästhetik sich allen erschließt. Ihre räumliche Struktur, die auf den bekannten Drehungsgruppen beruht, macht sie zusätzlich geometrisch interessant. Die hier gezeigten Beispiele sind aus der Beschäftigung mit den auf der Webseite [4] dargestellten Kunstobjekten entstanden (vgl. Abbildung 1). Die Skulpturen bestehen aus Dreiecken oder Vierecken, die drehsymmetrisch zu einer Achse a angeordnet sind. Das Prinzip der Gestaltung ist so gewählt, dass die einzelnen Bestandteile der Skulptur (Dreiecke oder Vierecke) ohne

Durchdringung ineinander hängen und sich gegenseitig stützen. Die einzelnen Bestandteile können als Bänder ausgeführt werden, sodass das Gesamtobjekt aus verschlungenen Bändern besteht.



2. Geometrische Analyse und Erzeugungsprinzip

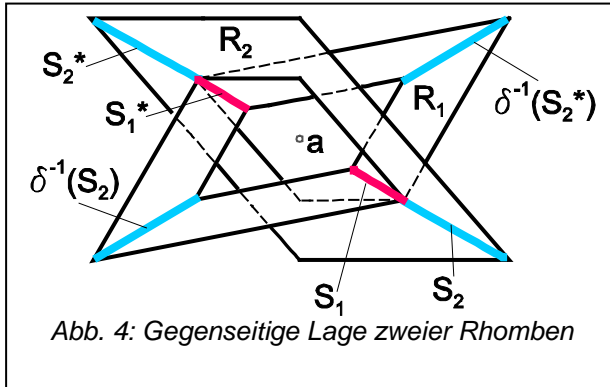
Beispiel 1 („Drei Rhomben“): Wir wollen das Objekt aus Abbildung 2 erzeugen und dabei das Erzeugungsprinzip dieser verschlungenen Bänder erklären. Das Objekt besteht aus 3 Rhomben, die dreh-symmetrisch um eine Gerade a angeordnet sind. Dabei haben der äußere und der innere Rand jedes Rhombenpaares genau zwei Punkte gemeinsam - die Rhomben „stecken“ ineinander. In Abbildung 2 wurden diese gemeinsamen Randpunkte durch Kugeln und ihre Verbindungen durch Drehzylinderstücke visualisiert – diese Drehzylinderstücke bilden die Raumdiagonalen eines regelmäßigen Oktaeders. Zweckmäßig werden wir die Koordinatenachsen eines kartesischen Normalkoordinatensystems in diese Raumdiagonalen legen.



In Abbildung 3 ist die Ausgangsfigur bemaßt. Die Rhomben liegen hier in den drei Koordinatenebenen und gehen durch 120° -Drehung um die Raumgerade $a = [(0,0,0),(10,10,10)]$ ineinander über.

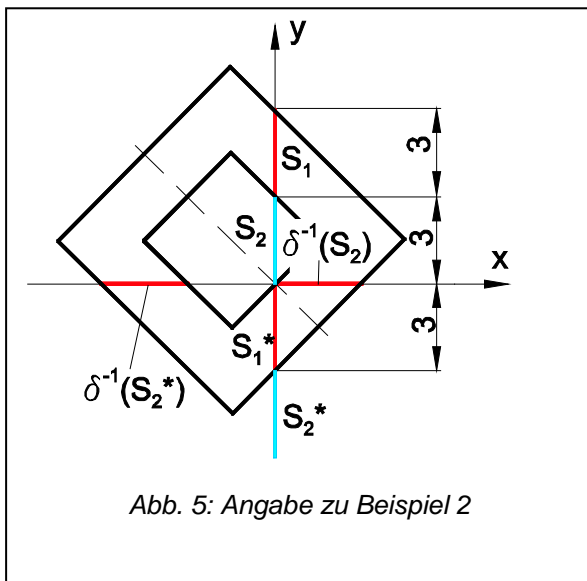
Schon dieses spezielle Beispiel lässt das Prinzip der Erzeugung solcher Bänder erkennen – vgl. Abbildung 4. Der Rhombus R_1 (rot) liegt in der xy -Ebene. Die 120° -Drehung δ um a bringt R_1 in die neue Lage R_2 (blau) in der yz -Ebene. Ein Schnitt der beiden Bänder R_1 und R_2 kann nur auf der

Schnittgeraden der Trägerebenen, das ist hier die y -Achse, auftreten. R_1 und R_2 schneiden die y -Achse nach je zwei Strecken $\{S_1, S_1^*\}$ (rot) und $\{S_2, S_2^*\}$ (blau). Sie müssen disjunkt sein, wenn Verschneidungen vermieden werden sollen. S_2 und S_2^* besitzen Originale $\delta^{-1}(S_2)$ und $\delta^{-1}(S_2^*)$ auf der x -Achse, die auf R_1 liegen (blau). Haben diese Strecken einen Randpunkt gemeinsam, so besitzen R_1 und R_2 keine Verschneidung, aber gemeinsame Randpunkte - die Rhomben „passen genau ineinander“. Dies bleibt auch richtig, wenn das Ausgangsobjekt nicht bezüglich des Schnittpunktes mit der Drehachse (hier O) symmetrisch liegt (siehe nächstes Beispiel).



3. Weitere Beispiele mit dreizähliger Drehsymmetrie

Beispiel 2 („Drei Quadrate“): Erstellen Sie gemäß der Angabe (siehe Abb. 5) analog zum obigen Beispiel drei ineinander gesteckte Quadrate. Die Raumgerade $a = [(0,0,0), (10,10,10)]$ ist wieder dreizählige Drehachse. In Abbildung 6 sind wieder die gemeinsamen Randpunkte der Bänder durch Kugeln visualisiert.



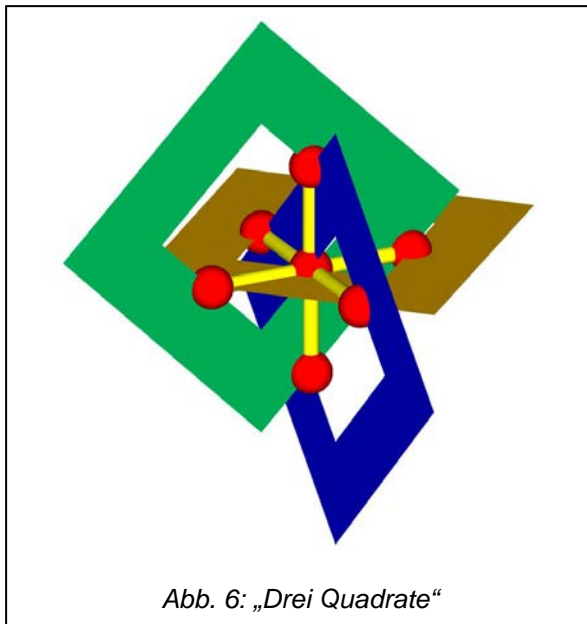


Abb. 6: „Drei Quadrate“

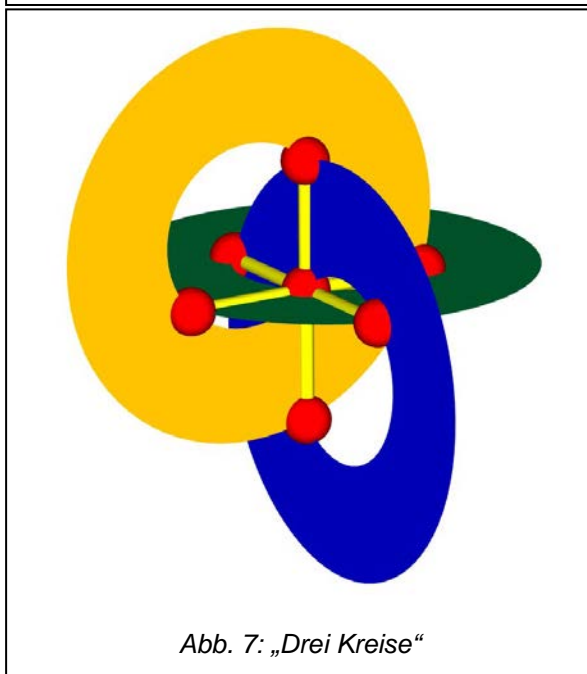
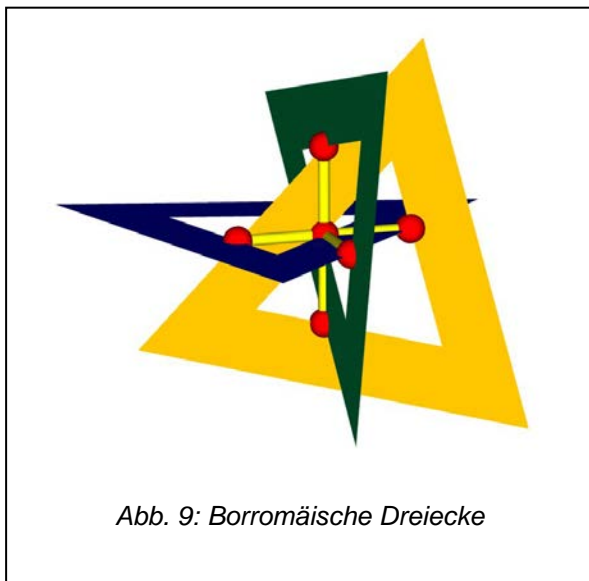
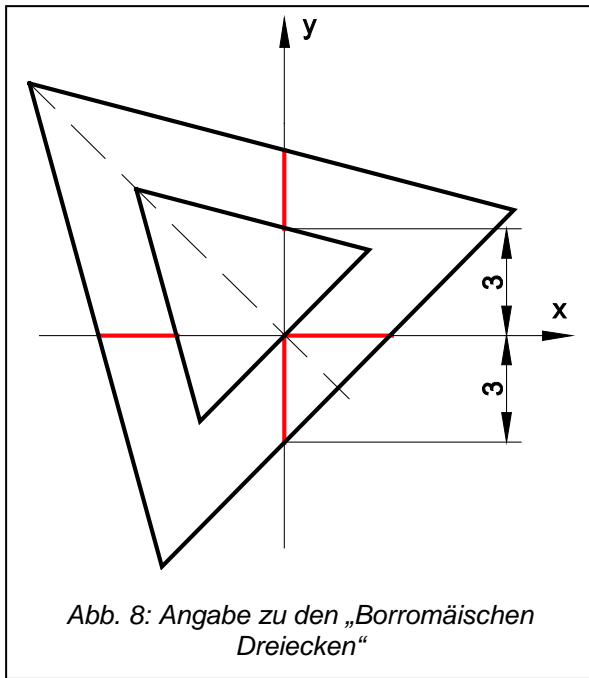


Abb. 7: „Drei Kreise“

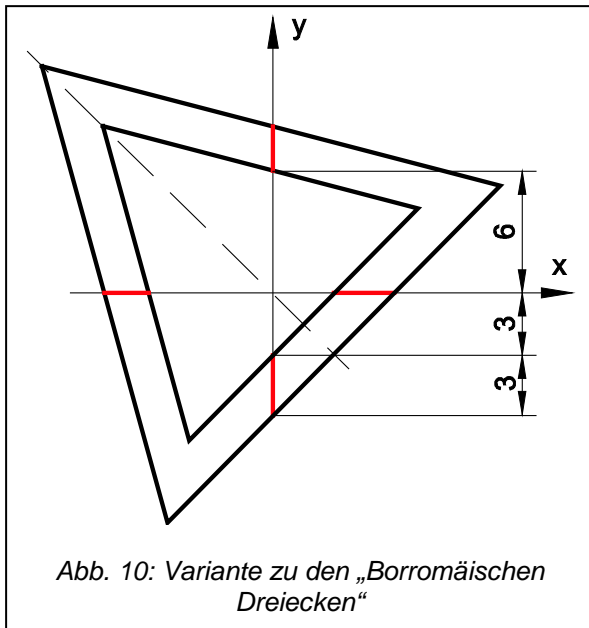
Beispiel 2a („Drei Kreise“): Versuchen Sie, das in Abbildung 7 dargestellte Objekt zu erzeugen, indem Sie das Quadrat aus Beispiel 2 durch einen geeigneten Kreis ersetzen.

Beispiel 3 („Drei Dreiecke - Borromäische Dreiecke“¹): Erstellen Sie gemäß der Angabe (Abbildung 8) drei ineinander hängende gleichseitige Dreiecke, die durch 120°-Drehungen um die Achse $a = [(0,0,0), (10,10,10)]$ ineinander übergehen. Abbildung 9 zeigt das Ergebnis, wobei die gemeinsamen Randpunkte durch Kugeln und ihre Verbindungen durch Drehzylinderstücke visualisiert sind.

¹ Borromeo, Carlo (hl.): 1538 – 1584, Kardinal von Mailand – unter ihm fand das Konzil von Trient statt.

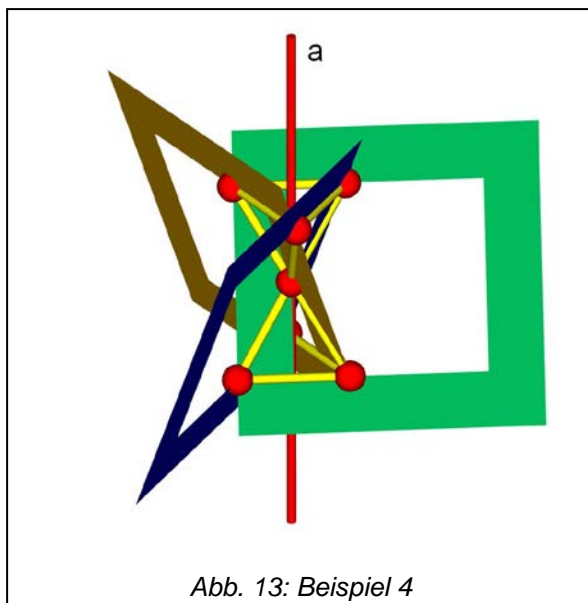
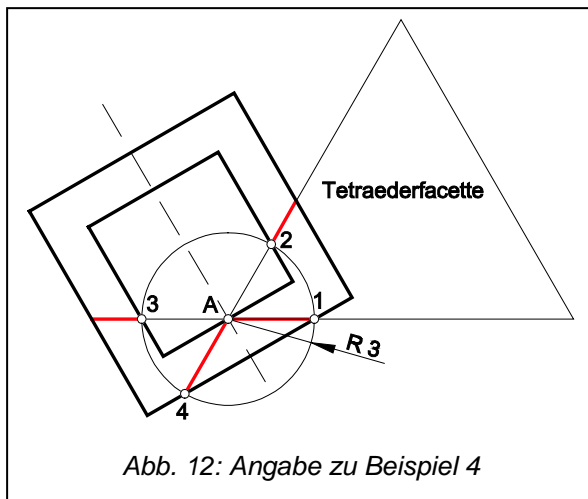


Beispiel 3a (Variante zu den „Borromäischen Dreiecken“): Die Lage des Dreiecks wird so verändert, dass die dreizählige Drehachse $a = [(0,0,0), (10,10,10)]$ nicht mehr getroffen wird (vgl. Abbildungen 10 und 11).



Bemerkung: Die obigen Überlegungen bleiben auch richtig, wenn die Trägerebenen der Bänder nicht paarweise orthogonal zueinander liegen. Dann sind statt der Schnitte der Bänder mit den Koordinatenachsen jene mit den Schnittgeraden aufeinander folgender Trägerebenen zu verwenden.

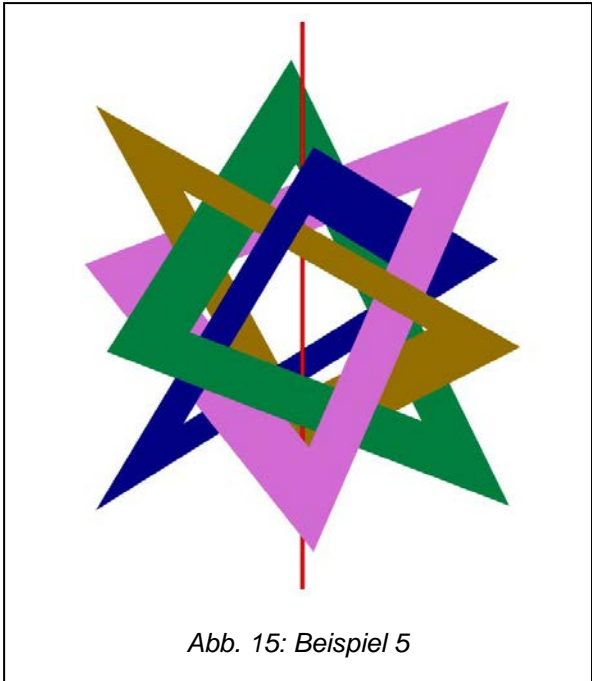
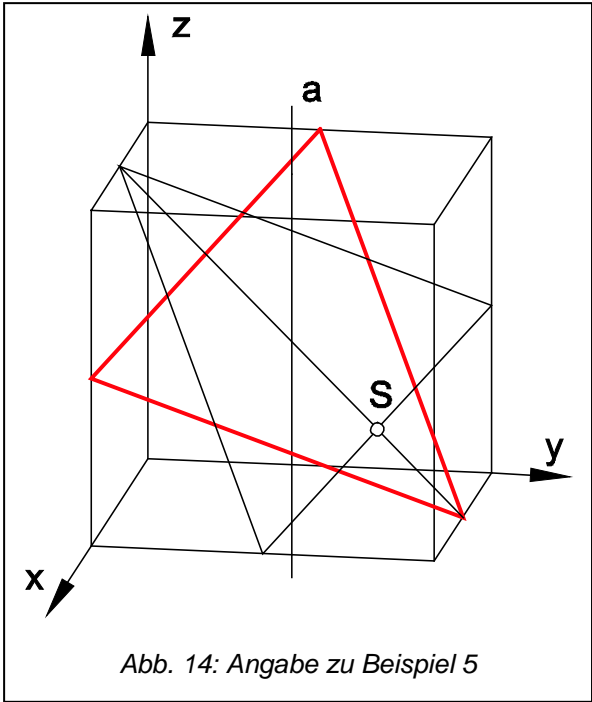
Beispiel 4 („Drei Quadrate“ in drei der Seitenflächen eines Tetraeders): Erstellen Sie die folgende Figur, die aus drei sich umfassenden Quadraten in drei Seitenflächen eines Tetraeders besteht (vgl. Abbildungen 12 und 13). Die zugehörige dreizählige Drehachse ist die Tetraederhöhe durch den gemeinsamen Punkt A. Die Konstruktion erfolgt analog zu Beispiel 2. Die in der Angabe eingezeichneten Punkte 1, 2, 3 und 4 sind gemeinsame Randpunkte der Quadrate. A12 und A34 sind Seitendreiecke zweier regelmäßiger Tetraeder mit der Drehachse a (vgl. Abbildung 13).

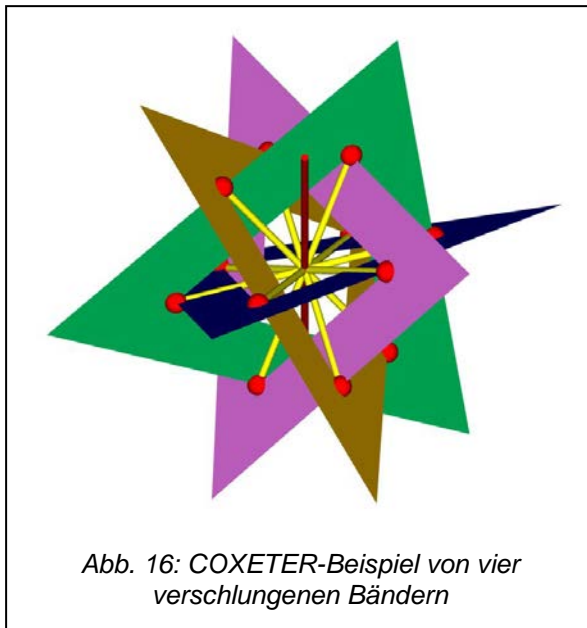


4. Beispiele mit vierzähliger Drehsymmetrie

Wenn statt der dreizähligen Drehsymmetrie eine vier- oder höherzählige vorliegt, sind zusätzlich zu vorhin nun auch die Verhältnisse auf den weiteren Schnittgeraden der Trägerebene des Ausgangsbandes mit den Drehlagen zu berücksichtigen. Dies kann zu komplizierten Figuren führen. Als Vorstufe konstruieren wir ein Beispiel, bei dem die Bänder ohne gemeinsame Randpunkte ineinander verschlungen sind.

Beispiel 5a: Vier gleichseitige Dreiecke sind ineinander verschlungen (siehe Abbildungen 14 und 15). Wir verwenden zur Konstruktion ein gleichseitiges Dreieck, das seine Ecken in geeigneten Kantenmitten eines Würfels besitzt. Dieses Dreieck wird um eine der vierzähligen Würfelachsen angeordnet. Für das Beispiel wählen wir einen Würfel mit Kantenlänge 10cm und materialisieren das in der Figur dargestellte Dreieck durch Versetzen um 1.5 cm nach innen. Anwenden der 4-zähligen Drehsymmetrie um die Achse $a = [(5,5,0), (5,5,10)]$ liefert vier ineinander verschlungene Dreiecke.





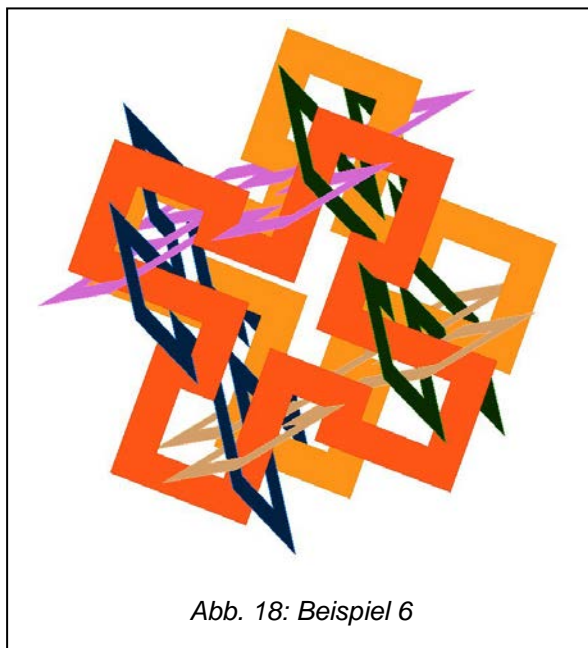
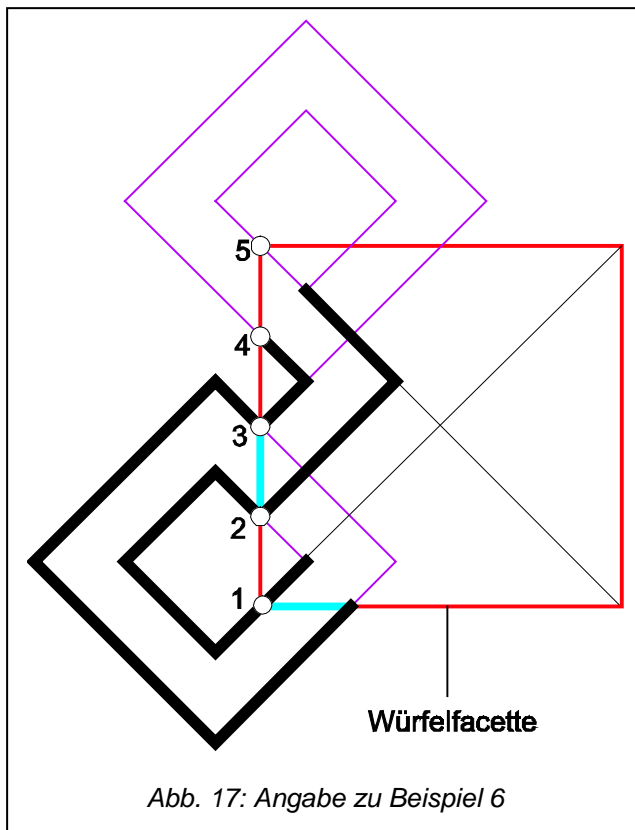
Um gemeinsame Randpunkte der verschlungenen Bänder zu erzeugen, ändern wir die Angabe wie folgt:

Beispiel 5b (COXETER-Beispiel von vier verschlungenen Bändern): Wir versetzen das Dreieck aus der Angabe von Beispiel 5a durch den in der Abbildung 14 eingetragenen Punkt S und erhalten gemeinsame Randpunkte auf Nachbarbändern. Abbildung 16 zeigt dieses Objekt mit den visualisierten Randpunkten und einigen ihrer Verbindungen.

5. Bänder in den Facettenebenen regulärer Polyeder

Für die folgenden Beispiele gehen wir von einem regulären Polyeder aus. Das Ausgangsband liegt einer Polyederfacette und besitze deren Drehsymmetrie.

Beispiel 6 (Bänder in den Seitenebenen eines Würfels): Nach der Angabe von Abbildung 17 wird in einer Seitenebene eines Würfels ein Ausgangsband mit vierzähliger Drehsymmetrie erzeugt. Die Punkte 2,3 und 4 teilen dabei die Würfelkante in Viertel. Dabei wurden die Abmessungen so gewählt, dass das in Abbildung 18 dargestellte Objekt aus 6 kongruenten ebenen verschlungenen Bändern besteht, die keine inneren Punkte, wohl aber Randpunkte gemeinsam haben. Dabei umschließt jedes Band alle direkten Nachbarn.



Beispiel 7 (Bänder in den Seitenebenen eines Tetraeders): Das in Abbildung 20 dargestellte Objekt besteht aus 4 kongruenten ebenen Bändern (mit dreizähliger Symmetrie), die auf den Seitenebenen eines regulären Tetraeders liegen. In Abbildung 19 ist das ebene Ausgangsband gezeigt – auch hier wird die Tetraederkante von den Schnittpunkten des Randes geviertelt.

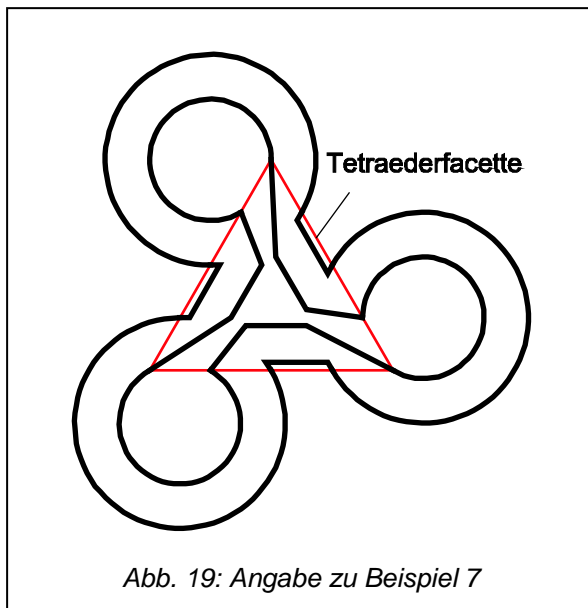


Abb. 19: Angabe zu Beispiel 7

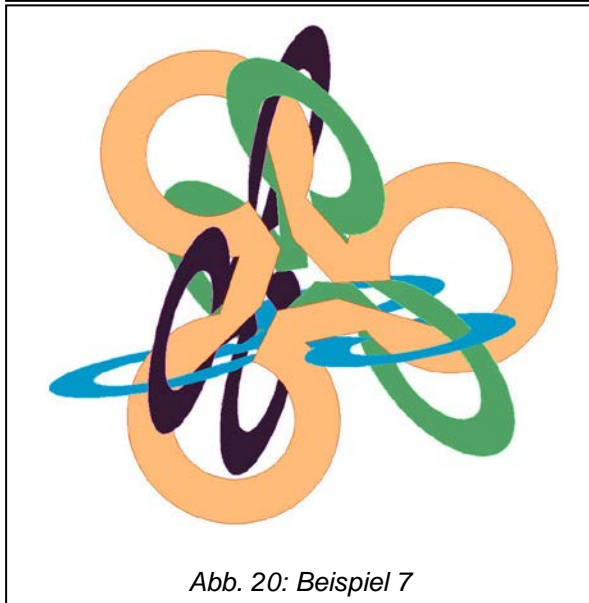
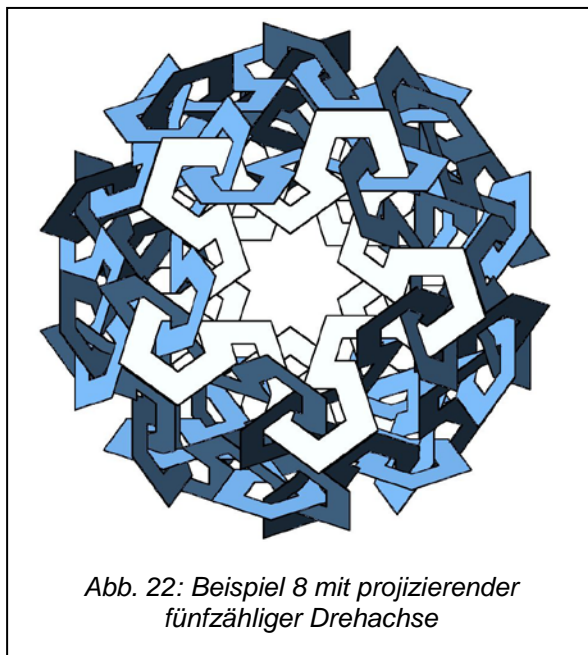
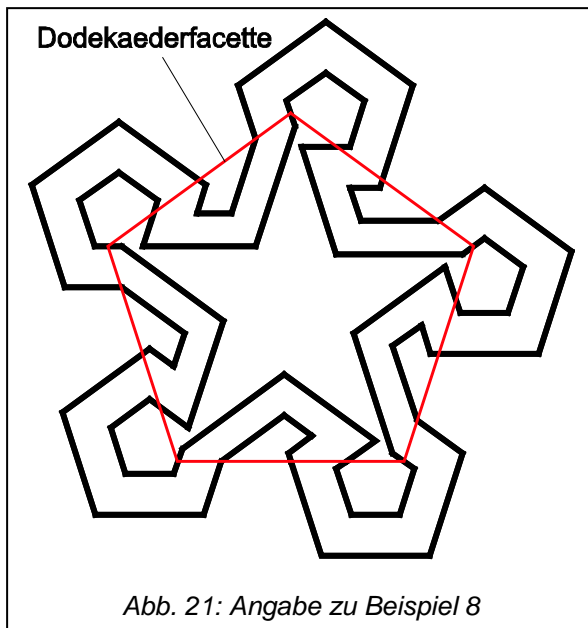


Abb. 20: Beispiel 7

Beispiel 8 (Bänder in den Seitenebenen eines Pentagondodekaeders): In Abbildung 21 ist das ebene Ausgangsband gezeigt – auch hier wird die Dodekaederkante von den Schnittpunkten des Randes geviertelt. Wird dieses Band geeigneten Transformationen der Ikosaedergruppe unterworfen, so entsteht das in Abbildung 22 abgebildete Objekt. Es besteht aus 12 kongruenten ebenen Bändern (mit fünfzähliger Symmetrie), die auf den Seitenebenen des Dodekaeders liegen. Dabei umschlingt jedes Band alle fünf direkten Nachbarn.



Auf die Angabe konkreter Beispiele für analog erzeugte Bänder in den Seitenebenen des regulären Oktaeders und des regulären Icosaeders sei hier verzichtet. Da dabei in jeder Oktaederecke vier ineinander verschlungene Bänder auftreten (beim Icosaeder sogar je fünf), entstehen hochkomplexe Objekte, für die in Abbildung 23 ein Beispiel dargestellt ist.

Abb. 23: Hochkomplexes Objekt



6. Literatur und Links:

- [1] H.S.M. Coxeter: Symmetrical combinations of three or four hollow triangles. *Mathematical Intelligencer*, 16/3, 25-30 (1994).
- [2] G. Gläser: *Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik*. Spektrum Verlag/Elsevier, Heidelberg, 2005.
- [3] D. Schattschneider, M. Emmer (Hsg.): *M.C.Escher's Legacy. A Centennial Celebration*. Springer Verlag, Heidelberg 2003.
- [4] Webseite: D. Nagy: Robinson, Coxeter and the Beauty of Mathematics. <http://members.tripod.com/vismath/exrob/rob2.htm>

Hinweise und Vorschläge zur Erstellung der Beispiele in ACAD:

3 Rhomben:

Der Ausgangsrhombus wird nach innen „durch Punkt“ **versetzt** (siehe Abb. – auch Skalieren mit der Option Bezug wäre möglich), und die **Region** durch Bilden der **Differenz** zweier Regionen erzeugt. Regionen sind in ACAD einseitig gefärbt. Sie werden mit Rückseite nur dargestellt, wenn unter **Extras – Optionen – System – Eigenschaften des aktuellen 3D-Grafikbildschirms** unter „Geometrie“ die Option „Rückseiten ignorieren“ nicht aktiviert ist.



Zeichnen Sie die Drehachse a als **3D-Polylinie** ein, und erzeugen Sie durch **Polare Anordnung (3D-Operationen – 3D-Reihe)** das Gesamtobjekt.

Hinweise und Vorschläge zur Erstellung der Beispiele in MicroStation:

3 Rhomben:

Der Ausgangsrhombus wird nach innen **versetzt** (siehe Abb.): Nach dem Befehlsaufruf wird der Rhombus angegeben, danach der Punkt (4.5,0,0) exakt eingegeben. Auch Skalieren mit der Option Bezug wäre möglich. Daraus wird ein **Bereich erstellt** (Inseln berücksichtigen!). Da eine Drehung um die Raumgerade a nicht direkt aufzurufen ist, sind Ersatzlösungen nötig:

Wir richten die z -Achse eines **ACS** auf die Drehachse a aus: Zuerst wird die x -Achse auf die Raumgerade ausgerichtet, danach das ACS um die y -Achse um 90° gedreht. Danach wird mit dem Befehl **Matrix erstellen** mit polarer Anordnung das Gesamtobjekt erzeugt (Achtung auf das AccuDraw-Koordinatensystem!).

Alternativ lässt sich hier die Raumdrehung um a auch durch Zusammensetzung zweier 90° -Drehungen um die z - und danach um die y -Achse (AccuDraw auf „top“ bzw. „front“) erzeugen. Iteration liefert das Gesamtobjekt.

