

# Projektive Analoga zum Drehfluchtprinzip

Otto Röschel (TU Graz)

Dem Motto der Tagung entsprechend wird hier ein Beitrag zur Verallgemeinerung des von Th. Schmid 1890 entdeckten Drehfluchtprinzips vorgelegt. Im projektiven Sinn handelt es sich beim Drehfluchtprinzip um eine konstruktive Auswertung der infinitesimalen Transformation von Projektivzwangläufen. Eine Verallgemeinerung des Drehfluchtprinzips im Sinne der projektiven Kinematik ist mit Hilfe des Homomorphiesatzes für kollineare Abbildungen des dreidimensionalen projektiven Raumes daher rasch gefunden. Der folgende Abschnitt ist zweiparametrischen affinen Bewegungsvorgängen des affinen Dreiraumes gewidmet. Es zeigt sich, daß sich die zugehörigen infinitesimalen Transformationen lokal so verhalten wie verallgemeinerte Zweibildersysteme. Ähnliches ist für Affinzwangläufe hinsichtlich der ersten und zweiten Differentiationsordnung nachzuweisen. Im letzten Abschnitt wird eine Möglichkeit angegeben, diese Erkenntnisse auf zweiparametrische Bewegungsvorgänge des euklidischen Dreiraumes anzuwenden. Allerdings sind die zugehörigen Resultate im Gegensatz zum affinen Sachverhalt nicht wirklich neu - sie sollen als Zusatzbeitrag zum 107. Geburtstag des Drehfluchtprinzips verstanden werden.

## 1. Eingliedrige Untergruppen des projektiven Dreiraumes und das Drehfluchtprinzip.

Im reellen projektiven Dreiraum  $P_3(R)$ , den wir bei Bedarf komplex erweitert denken wollen, beschreiben wir Punkte durch homogene Koordinaten  $\vec{X} = (x_0, x_1, x_2, x_3)^t$ . Gegeben sei weiters ein projektiver Zwanglauf der Differentiationsklasse  $C^1$

$$(1.1) \quad \vec{X}(t, \vec{X}^*) := Z(t) \vec{X}^* \quad (t \in I \subset R, \text{ reguläre } 4 \times 4\text{-Matrizen } Z(t))$$

eines Gangsystems (Punkte  $\vec{X}^*$ ) gegenüber einem Rastsystem (Punkte  $\vec{X}$ ). Zu jedem Zeitpunkt  $t$  ordnet dann die infinitesimale Transformation

$$(1.2) \quad \tau_t : P_3(R) \rightarrow P_3(R) \quad \text{mit } \vec{X} \rightarrow \tau_t(\vec{X}) := \dot{Z}(t) Z^{-1}(t) \vec{X} := C \vec{X}$$

den Punkten des Rastsystems einen Punkt auf der momentanen Bahntangente dieses Punktes zu. Wenn wir mit J. Tölke [7] die Matrix  $C$  aus (1.2) durch äquivalente Matrizen

$$(1.3) \quad C^* := \alpha(C - \lambda E), \quad (\alpha, \lambda \in R, \alpha \neq 0)$$

ersetzen ( $E$  bezeichnet die Einheitsmatrix), verändern wir bloß die resultierenden Tangentenpunkte, nicht aber die Lage der momentanen Bahntangenten. O.B.d.A. dürfen wir daher die infinitesimale Transformation (2) durch die geometrisch äquivalenten

$$(1.4) \quad \varphi_\lambda: P_3(R) \rightarrow P_3(R) \quad \text{mit} \quad \bar{X} \rightarrow (C - \lambda E) \bar{X}$$

ersetzen, bei denen  $\lambda$  einer der Eigenwerte der Matrix  $C$  ist. Die zugehörigen Abbildungen  $\varphi_\lambda$  (1.4) sind dann singuläre Kollineationen im  $P_3(R)$ .

In Gesprächen mit H. Vogler hat sich in den letzten Monaten *folgende projektive Interpretation des Drehfluchtprinzips* herauskristallisiert: Das Drehfluchtprinzip vermittelt eine konstruktive Behandlung eben dieser infinitesimalen Transformationen. Als konstruktives Hilfsmittel stehen im  $P_3(R)$  neben der aus dem Drehfluchtprinzip der euklidischen Schraubung bekannten Projektion in eine Hilfsebene statt der Vierteldrehung Kollineationen zur Verfügung. Zu diesen gelangen wir unschwer unter Verwendung des Homomorphiesatzes für kollineare Abbildungen:

Bezeichnen wir mit  $U$  den (sicher nichtleeren) Kern der Abbildung  $\varphi_\lambda$  (1.4), mit  $V$  einen dazu komplementären Unterraum mit  $U \oplus V = P_3(R)$ . Weiters sei  $\pi$  jene Projektion im  $P_3(R)$ , die  $U$  als Kern und  $V$  als Bildraum besitzt. Dann haben wir nach dem Homomorphiesatz  $\varphi_\lambda = \varphi_\lambda|_V \circ \pi$ , wobei  $\varphi_\lambda|_V$  eine Kollineation von  $V = \text{Im } \pi \rightarrow \text{Im } \varphi_\lambda$  ist.

Zusammenfassend haben wir damit den folgenden

**Satz 1:** *Zu jedem Eigenwert der Matrix der infinitesimalen Transformation kann dieses Prinzip als projektives Analogon zum Drehfluchtprinzip zur konstruktiven Auswertung verwendet werden (reell natürlich nur für die Fälle mit reellen Eigenwerten).*

**Bemerkungen:** 1) Obige Überlegungen zeigen, daß auch für die infinitesimalen Transformationen mit Fixpunktgeraden (Analoge zu den euklidischen Drehungen) solche "Drehfluchtprinzipien" möglich sind. Als Hilfsbildräume  $V$  sind dann wieder Geraden heranzuziehen.

2) Falls Kern und Bildraum von  $\varphi_\lambda$  leeren Durchschnitt besitzen, können wir den Bildraum von  $\varphi_\lambda$  gleich als Hilfsbildraum  $V$  verwenden. Die oben beschriebene Kollineation ist dann Autokollineation in  $V$ .

3) Für die euklidische Schraubung liegt der Kernraum von  $\varphi_{-1}$  ( $\lambda = -1$  ist ja doppelter Eigenwert der zugehörigen Transformationsmatrizen) im Bildraum  $\text{Im } \varphi_{-1}$  (= Fernebene dieses dann projektiv abgeschlossenen euklidischen Raumes). In diesem Fall kann daher der zum Kern  $\text{Ker } \varphi_{-1} = \text{Fernpunkt der Schraubachse}$  komplementäre Hilfsbildraum  $V$  (nun eine Ebene) nicht mit  $\text{Im } \varphi_{-1}$  identifiziert werden. Um trotzdem eine konstruktive Behandlung mittels einer Autokollineation von  $V$  durchführen zu können, werden die Bildelemente aus

Im  $\varphi_{-1}$  beim Drehfluchtprinzip aus einem "Nebenaug" in den Hilfsbildraum  $V$  projiziert. Werden  $V$  und das Nebenaug geeignet gewählt, wird die dann auftretende Autokollineation in  $V$  eine euklidisch ausgezeichnete Bewegung (90-Grad-Schwenk).

4) Die Überlegungen sind auch für  $n$ -dimensionale projektive Räume und deren projektive Zwangsläufe analog durchzuführen.

## 2. Zweiparametrische affine Bewegungsvorgänge.

Wir studieren nun zweiparametrische Bewegungsvorgänge im  $P_3(R)$ , die eine reelle Ebene  $\omega$  festlassen. Wir befinden uns damit im affinen Fall und werden wie üblich  $\omega$  durch  $x_0 = 0$  beschreiben. Die zu einem Moment  $(u_0, v_0)$  eines zweiparametrischen affinen Bewegungsvorgangs  $B_2(u, v)$  der Klasse  $C^1$  gehörenden infinitesimalen Transformationen werden dann durch

$$(2.1) \quad \varphi: P_3(R) \rightarrow P_3(R) \text{ mit } \vec{X} \rightarrow \varphi(\vec{X}) = \dot{\vec{X}} = (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) \vec{X} \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in R)$$

erfaßt. Sie ordnen dem Punkt  $\vec{X}$  Tangentenpunkte zu. Mit der Definition der kollinearen Abbildungen

$$(2.2) \quad \varphi_i: \vec{X} \rightarrow A_i \vec{X} \quad (i=1,2)$$

stellt  $\varphi$  (2.1) ein Büschel kollinearere Abbildungen dar. Für unseren affinen Fall haben die

Matrizen  $A_i$  die Form  $A_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \quad (i=1,2)$ . Die erzeugenden kollinearen

Abbildungen  $\varphi_i$  sind somit singular - es gilt ja stets  $\text{Im } \varphi_i \subset \omega$ . Im allgemeinen sind die erzeugenden Punktabbildungen verschieden:  $\varphi_1 \neq \varphi_2$ . Für variables  $\lambda_1: \lambda_2$  stellen sich bei den infinitesimalen Transformationen (2.1) Tangentenpunkte einer Geraden in  $\omega$  ein, die von den Punkten  $\varphi_i(\vec{X})$  aufgespannt wird. Abbildung 1 zeigt diese Situation.

Wir bezeichnen diese Gerade mit

$$(2.3) \quad \tau_u(\vec{X}) := [\varphi_1(\vec{X}), \varphi_2(\vec{X})].$$

Es ist dies in affiner Diktion die Ferngerade der momentanen Bahnflächentangentialebene des Punktes  $\vec{X}$  zum Zeitpunkt  $(u_0, v_0)$ .

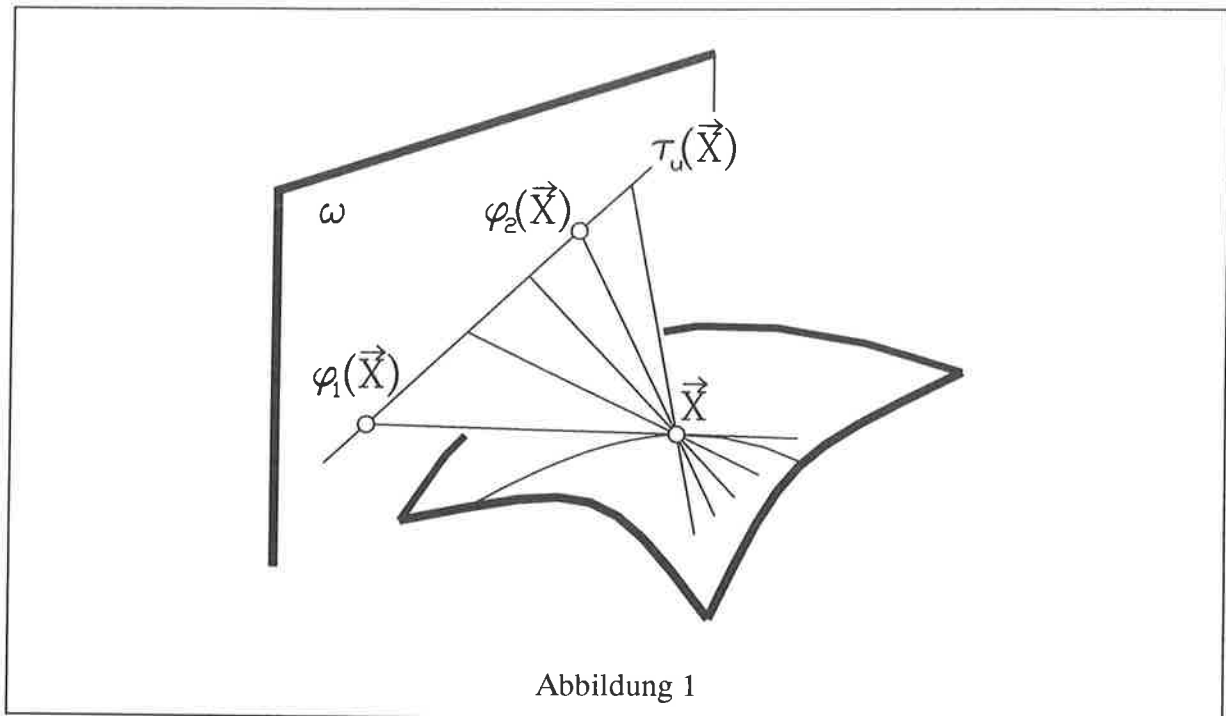


Abbildung 1

Aus der Theorie der zweiparametrischen Bewegungsvorgänge ist der Begriff der **momentan kurvenläufigen Punkte** bekannt: Es sind dies jene Punkte  $\vec{X}$ , für die die Bildgerade (2.3) nicht definiert ist, also  $\varphi_1(\vec{X}) = \varphi_2(\vec{X})$  gilt. Bekanntlich gehören diese Punkte i.a. einer Raumkubik  $\vec{K}$  an (ihre Bestimmung verläuft analog der für die Ebene - vgl. J. Tölke [7]).

In der Sichtweise der infinitesimalen Transformation (2.1) als Bündel kollinear Abbildungen mit den erzeugenden Abbildungen  $\varphi_1, \varphi_2$  definieren  $\varphi_1, \varphi_2$  ein allgemeines Zweibildersystem (vgl. E. Müller – E. Kruppa [6]). Dann umfaßt  $\vec{K}$  genau die Koinzidenzpunkte dieses Zweibildersystems. Somit sind alle Sonderfälle des Ortes momentan kurvenläufiger Punkte aus der Theorie der allgemeinen Zweibildersysteme zu übertragen.

Auswertung von weiteren Ergebnissen über allgemeine Zweibildersysteme liefern sofort weitere Eigenschaften dieser infinitesimalen Transformationen (2.1) - vorausgesetzt sei der allgemeine Fall, in dem eine Koinzidenzpunktskubik vorliegt:

1) Genau die Punkte  $\vec{X}$  der Sehnen der Kubik  $\vec{K}$  besitzen gemeinsame Bildgeraden (2.3). Abbildung 3 zeigt die Situation für die Sehne [1,2] der Kubik  $\vec{K}$ ;  $1, 2 \in \vec{K}$ . Für jeden weiteren Punkt  $\vec{P} \notin \vec{K}$  gilt dann

$$(2.4) \quad \tau_u(\vec{P}) = [\varphi_1(\vec{P}), \varphi_2(\vec{P})] = [\varphi_1(1), \varphi_1(2)] = [\varphi_2(1), \varphi_2(2)].$$

Die Abbildung der Sehnen dieser Kubik  $\vec{K}$  auf die entsprechenden Bildgeraden in  $\omega$  ist somit als Geradenabbildung **linear**. Sie wird sowohl von  $\varphi_1$  als auch von  $\varphi_2$  erzeugt.

2) Genauso können wir für zweimal stetig differenzierbare affine Zwangläufe mit Fernfixebene  $\omega$  schließen: Für sie gilt lokal

$$(2.5) \quad \vec{X}, \quad \dot{\vec{X}} = \varphi_1(\vec{X}), \quad \ddot{\vec{X}} = \varphi_2(\vec{X})$$

mit gewissen singulären kollinearen Abbildungen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ . Die momentanen Bahnschmiegeebenen verhalten sich bei einem zweiparametrischen affinen Zwanglauf daher genauso wie die Bahnflächentangentialebenen eines geeignet gewählten zweiparametrischen affinen Bewegungsvorganges! Besonders interessant ist wohl der Sonderfall  $\varphi_2 = \varphi_1 \circ \varphi_1$ , in dem sich der Zwanglauf lokal bis zur zweiten Ordnung wie eine eingliedrige Untergruppe verhält.

Die folgende Tabelle soll die Entsprechungen und Interpretationen dieser Sachverhalte mit Hilfe der einzelnen Konzepte zusammenfassen:

<u>Allgemeines Zweibilderverfahren</u>	<u>Zweiparametrische affine Bewegungsvorgänge</u>	<u>Affine Zwangläufe</u>
Definierende Abbildungen $\varphi_1$ und $\varphi_2$ .	infinitesimale Transformationen $\varphi_1$ und $\varphi_2$ .	$\dot{\vec{X}} = \varphi_1(\vec{X}),$ $\ddot{\vec{X}} = \varphi_2(\vec{X})$
Koinzidenzpunktsgebilde	momentan kurvenläufige Punkte	momentane Wendepunkte
Koinzidenzpunktskubik	Kubik der momentan kurvenläufigen Punkte	Wendekubik
Punkte auf Sehnen der Koinzidenzpunktskubik	Punkte mit momentan parallelen Bahnflächentangentialebenen	Punkte mit momentan parallelen Bahnschmiegeebenen

Die Analogien lassen sich beinahe beliebig fortsetzen. Insgesamt notieren wir den

**Satz 2:** *Das lokale Verhalten der zweiparametrischen affinen Bewegungsvorgänge hinsichtlich der ersten Differentiationsordnung, das von einparametrischen affinen Bewegungsvorgängen hinsichtlich der zweiten Differentiationsordnung und von verallgemeinerten Zweibildersystemen ist identisch. Entsprechende kinematische Aufgabenstellungen lassen sich somit stets als Aufgaben des Zweibildersystems formulieren, wenn nur die erzeugenden linearen Abbildungen geeignet gewählt werden.*

### 3. Flächenläufige euklidische Bewegungsvorgänge.

Mit [1, S. 360] haben wir bei Verwendung eines geeigneten kartesischen Normalkoordinatensystems für zweiparametrische euklidische Bewegungsvorgänge mit den Invarianten  $k_1, k_2 \in \mathfrak{R}$  für die infinitesimalen Transformationen

$$(3.1) \quad \dot{\vec{X}} = \left[ \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \vec{X} := (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) \vec{X} .$$

Das Koinzidenzpunktsgebilde des mit (2.1) auf (3.1) gegründeten allgemeinen Zweibilderverfahrens zerfällt hier in eine reelle Ferngerade (Ferngerade der  $xy$ -Ebene) und zwei i.a. verschiedenen Geraden  $a_1$  und  $a_2$ . Ihre Gleichungen lauten

$$(3.2) \quad a_{1,2} \dots x_1 = \mp x_2 \sqrt{\frac{-k_2}{k_1}}, \quad x_3 = \pm x_0 \sqrt{-k_1 k_2} .$$

Sie fallen für  $k_1 k_2 < 0$  reell aus (vgl. [1, S. 359]). Momentan parallele Bahnflächentangentialebenen besitzen (vgl. die in [1] zitierten Resultate von Schönemann (1855) und Mannheim (1875)) genau die Punkte auf einer gemeinsamen Netzgeraden jenes Geradennetzes  $N$ , das  $a_1$  und  $a_2$  als Brenngeraden besitzt. Die für uns relevante Sehnenkongruenz der Raumkubik aus Abschnitt 2 wird hier zum Geradennetz  $N$ . Hier gilt sogar, daß bei momentaner Identifikation von Gang- und Rastsystem die momentane Bahnflächentangentialebene auf den zugehörigen Netzstrahl normal steht. Die Ferngeraden  $\tau_u(\vec{X})$  der Bahnflächentangentialebenen sind daher zum Fernpunkt des  $\vec{X}$  enthaltenden Netzstrahles polar bezüglich des absoluten Kegelschnittes

$$(3.3) \quad i_u \dots x_0 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

des komplex erweiterten und projektiv abgeschlossenen euklidischen Dreiraumes.

Nun ist hier die Tatsache "107 Jahre Drehfluchtprinzip" zu würdigen. Daher soll trotz dieser bereits wohlbekannten geometrischen Fakten auch hier eine geeignete Analogie zum euklidischen Drehfluchtprinzip (= geeignete Projektion der Punkte und Fernpunkte der Bahntangenten sowie anschließende Drehung) gesucht werden. Wir ermitteln dazu den Netzriß  $\vec{X}^n$  eines Raumpunktes  $\vec{X}$  in die Basisebene ( $x_3 = 0$ ) unserer Aufstellung: Der Netzstrahl des Raumpunktes  $\vec{X}$  besitzt die Parameterdarstellung

$$(3.4) \quad \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_3 - k_1 x_0 x_2 \\ x_2 x_3 + k_2 x_0 x_1 \\ k_1 k_2 x_0^2 + x_2^2 \end{pmatrix} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Damit gewinnen wir für den Netzriß

$$(3.5) \quad \vec{X}^n = (k_1 k_2 x_0^2 + x_2^2, k_2 (k_1 x_0 x_1 + x_2 x_3), k_1 (k_2 x_0 x_2 - x_1 x_3))^t$$

(vgl. [1, S. 360]).

Nun ermitteln wir die Fluchtspur  $\tau_u^c$  der Bahnflächentangentialebene  $\tau$  für die Projektion aus dem „Nebenaugen“  $\vec{C} = (1, 0, 0, 1)^t$  in die Bildebene  $\pi_1 (x_3 = 0)$ . Die Gleichung dieser Geraden lautet

$$(3.6) \quad \tau_u^c \dots (k_1 k_2 x_0^2 + x_2^2) y_0 + (k_2 x_0 x_2 - x_1 x_3) y_1 - (k_1 x_0 x_1 + x_2 x_3) y_2 = 0.$$

Diese Gerade entsteht aus dem Netzriß  $\vec{X}^n$  (3.5) durch Polarisieren am Kegelschnitt

$$(3.7) \quad l \dots y_0^2 + \frac{y_1^2}{k_1} + \frac{y_2^2}{k_2} = 0 \quad \text{und} \quad y_3 = 0$$

gefolgt von einer Drehung um  $-90^\circ$  um den Punkt  $\vec{O}_0 = (1, 0, 0, 0)^t$  (vgl. Abbildung 2).

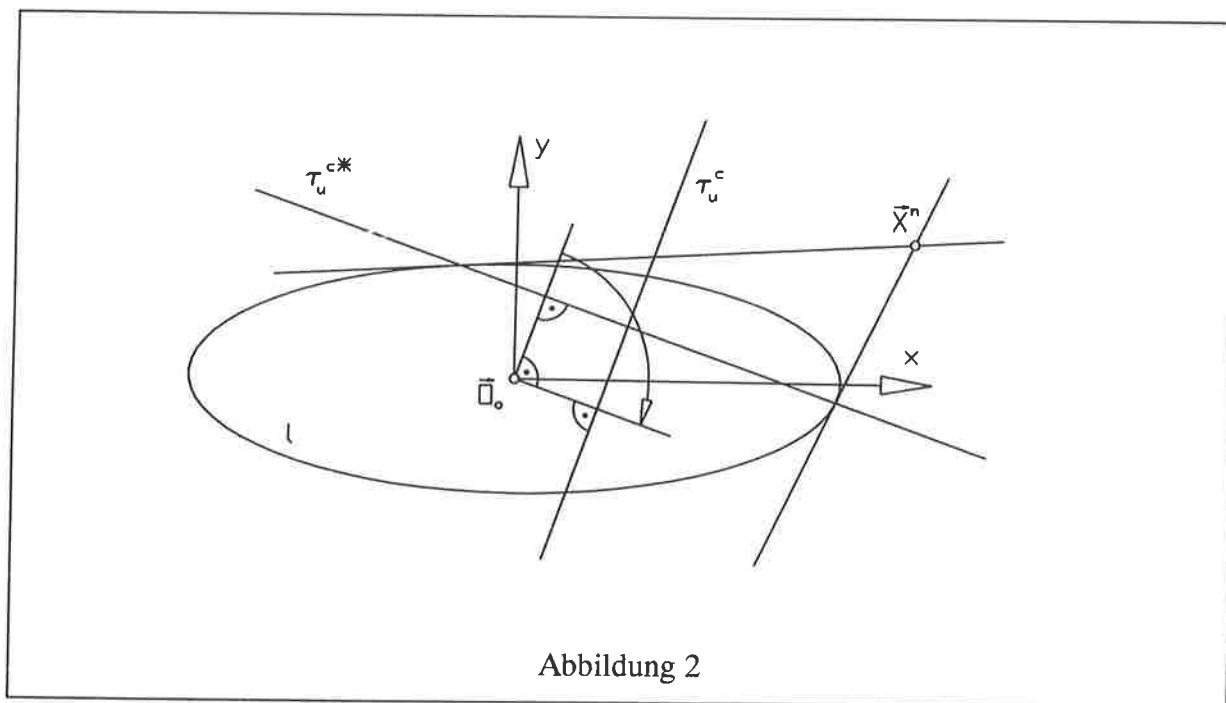


Abbildung 2

Zusammenfassend haben wir daher den

**Satz 3:** *Zu jedem zweiparametrischen euklidischen Bewegungsvorgang kann momentan das Verhalten der Bahnflächentangentialebenen mit Hilfe einer Verallgemeinerung des Drehfluchtprinzips studiert werden: Die fraglichen Punkte des Gangraumes sind einer geeigneten Netzprojektion zu unterwerfen; die Polare dieses Netzrisses bezüglich eines gewissen Kegelschnittes ( $l$  in (3.7)) gibt bis auf eine Vierteldrehung um den Kegelschnittsmittelpunkt die Fluchtspur der zugehörigen Bahnflächentangentialebene für Zentralprojektion aus einem Nebenaugenauge  $\bar{C}$  an.*

## Literaturverzeichnis

- [1] Bottema, O. - Roth, B.: Theoretical Kinematics. North Holland Series, Amsterdam 1979.
- [2] Brauner, H.: Konstruktive Durchführung der durch die Sehnen einer Raumkurve 3. Ordnung vermittelten Abbildung des Raumes auf eine Ebene. Monatsh. Math. **60**, 231 - 248 (1956).
- [3] Eckhart, L.: Über die Abbildungsmethoden der Darstellenden Geometrie. Sitzber. Österr. Akad. Wiss. math.nat.kl. II, **132**, 177 - 192 (1932).
- [4] Hartl, J.: Bündel linearer Abbildungen. Journal of Geom. **31**, 89 - 95 (1988).
- [5] Kunnert, C. - Weiß, G.: Herstellung linearer Risse nach Hohenberg. Journal of Geom. **47**, 186 - 198 (1993).
- [6] Müller, E. - Kruppa, E.: Die linearen Abbildungen (Vorlesungen über Darstellende Geometrie I), Deuticke, Leipzig-Wien 1923.
- [7] Tölke, J.: Projektive kinematische Geometrie. Ber. d. Math.-Stat. Sektion im Rechenzentr. Graz, **39**, 1 - 51 (1975).

### Anschrift des Autors:

Otto Röschel, Institut für Geometrie, TU Graz  
Kopernikusgasse 24, A-8010 Graz.  
e-mail: roeschel@geometrie.tu-graz.ac.at