

RATIONALE RÄUMLICHE ZWANGLÄUFE VIERTER ORDNUNG

von

Otto Röschel (Leoben)

In [25] hat W. WUNDERLICH in einer bemerkenswerten Arbeit alle räumlichen Zwangläufe $\Sigma|\Sigma'$ angegeben, bei denen sämtliche Punkte des Gangraumes Σ auf Kurven dritter Ordnung geführt werden. Im Anschluß daran liegt es nahe, auch alle rationalen räumlichen Zwangläufe vierter Ordnung $\Sigma|\Sigma'$ zu bestimmen; diese Zwangläufe $\Sigma|\Sigma'$ führen *allgemeine Punkte* des Gangraumes Σ auf *rationalen Bahnkurven vierter Ordnung*.¹⁾ Für diese Zwangläufe existiert bereits eine große Zahl von Beispielen: So die von J. KRAMES in [10] und [14] untersuchten BOREL-BRICARD'schen Bewegungsvorgänge, der bekannte BENNETT'sche Mechanismus ([2, S 326 f.] und [13]), ein un-

1) Diese Zwangläufe könnten auch für Approximationen von räumlichen Bewegungsvorgängen von Interesse sein.

längst von M. HUSTY [6] und ein weiterer von J. KRAMES [15] studierter Zwanglauf, einige von H. BRAUNER [3] und J. TÖLKE ([22] und [23]) angegebene Bewegungsvorgänge sowie die sogenannte MANNHEIM'sche Bewegung [2, S. 310 f.].²⁾ Von allen bekannten Beispielen ist bis auf die von J. KRAMES in [15] und die von J. TÖLKE in [22] und [23] angegebenen bekannt, daß alle Punkte einer oder mehrerer Geraden bzw. eines Drehzylinders (vgl. [19]) auf ebenen Bahnen geführt werden. Das ist der Grund dafür, daß wir in Abschnitt 2 nach der in Abschnitt 1 vorgenommenen Angabe der Bewegungsgleichungen der rationalen räumlichen Zwangläufe vierter Ordnung $\Sigma|\Sigma'$ Aussagen über die Existenz von ebenen Bahnkurven bei diesen Zwangläufen machen wollen. In Abschnitt 3 werden wir symmetrische Sonderformen dieser rationalen Zwangläufe vierter Ordnung studieren. In einem vierten Abschnitt werden wir eine besondere dieser symmetrischen Schrotungen untersuchen.

1. Bestimmung der rationalen räumlichen Zwangläufe vierter Ordnung

In einem reellen dreidimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ ³⁾ können die Punkte bekanntlich durch homogene Koordinaten $x_0:x_1:x_2:x_3 \neq 0:0:0:0$ beschrieben werden. Mit Hilfe der EULER-Parameter [2, S. 150 f.] $c_0:c_1:c_2:c_3 \neq 0:0:0:0$ wird

2) Ein weiteres Beispiel wurde vom Autor in [19] angegeben.

3) Fallweise werden wir auch die komplexe Erweiterung $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ benutzen.

dann durch

$$\begin{aligned}
 x_0' &= (c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) x_0 \\
 x_1' &= d_1(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) x_0 + (c_0^2 + c_1^2 - c_2^2 - c_3^2) x_1 + \\
 &\quad + 2(c_1c_2 - c_0c_3)x_2 + 2(c_1c_3 + c_0c_2) x_3 \quad (1.1) \\
 x_2' &= d_2(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) x_0 + 2(c_1c_2 + c_0c_3) x_1 + \\
 &\quad + (c_0^2 - c_1^2 + c_2^2 - c_3^2) x_2 + 2(c_2c_3 - c_0c_1) x_3 \\
 x_3' &= d_3(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) x_0 + 2(c_1c_3 - c_0c_2) x_1 + \\
 &\quad + 2(c_2c_3 + c_0c_1) x_2 + (c_0^2 - c_1^2 - c_2^2 + c_3^2) x_3
 \end{aligned}$$

mit $c_i = c_i(t) \in C^0(I)$, $d_j = d_j(t) \in C^0(I)$, $t \in I = (-\infty, +\infty)$ ($i = 0, 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$)

ein *stetiger räumlicher Zwanglauf* $\Sigma \parallel \Sigma'$ im Sinne eines im $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ eingebetteten euklidischen Raumes \mathbb{E}_3 erklärt, dessen Metrik sich auf den in der Fernebene ω ($x_0=0$) gelegenen absoluten Kegelschnitt m

$$x_0 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \quad (1.2)$$

als Maßgebilde stützt.

Dem Zwanglauf $\Sigma \parallel \Sigma'$ (1.1) ist mit $d_1(t) = d_2(t) = d_3(t) = 0 (\forall t \in I)$ ein *sphärischer Zwanglauf* $\Sigma^* \parallel \Sigma^*$ zugeordnet, dem nach Interpretation von $c_0 : c_1 : c_2 : c_3$ als homogene Punktkoordinaten

eines weiteren reellen dreidimensionalen Raumes $\mathbb{P}_3^*(\mathbb{R})$ durch $(c_0(t):c_1(t):c_2(t):c_3(t))$ eine kinematische Bildkurve k^* zugewiesen werden kann (vgl. [17]). Die Hintereinanderausführung von Drehungen im \mathbb{E}_3 induziert im Bildraum $\mathbb{P}_3^*(\mathbb{R})$ zwei dreiparametrische projektive Transformationsgruppen, die gemeinsam die sechsgliedrige Gruppe der projektiven Automorphismen der in $\mathbb{P}_3^*(\mathbb{R})$ gelegenen nullteiligen Quadrik M

$$c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 0 \quad (1.3)$$

erzeugen. Der Bildraum erhält so die Struktur eines elliptischen Raumes Q_3 ([17]).

Wir wollen nun (1.1) so bestimmen, daß alle allgemeinen Bahnkurven rational von vierter Ordnung sind. Dies hat zur Folge, daß der zugeordnete sphärische Zwangslauf $\Sigma^*|\Sigma^*$ ebenfalls durchwegs rationale Bahnkurven besitzt, deren Ordnung höchstens vier ist. Dies ist offensichtlich nur in folgenden drei Fällen möglich:

- (a) Die kinematische Bildkurve k^* des sphärischen Zwangslaufs $\Sigma^*|\Sigma^*$ ist ein Kegelschnitt im $\mathbb{P}_3^*(\mathbb{R})$,
- (b) k^* ist eine Gerade oder
- (c) k^* stellt einen Punkt des $\mathbb{P}_3^*(\mathbb{R})$ dar.

Der letzte Fall kann von den folgenden Betrachtungen ausgeschlossen werden, denn die möglichen Bewegungsvorgänge

(1.1) sind dann Schiebungen längs einer rationalen Raumkurve vierter Ordnung.

Im elliptischen Raum Q_3 kann dem Kegelschnitt k^* o.B.d.A. die Normalform

$$c_0 = 0, c_3^2 = ac_1c_2 - bc_2^2 \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad b \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

zugewiesen werden. (1.4) stellt für $a^2=4(1-b)$ einen Kreis des Q_3 dar und wird für $a=b=0$ zu einer Geraden, die wir für die Diskussion des Falles (b) als Normalform ansehen wollen.

Fall a: k^* (1.4) besitzt die Parameterdarstellung

$$(0:1+bt^2:at^2:at) \quad (t \in I).$$

Der Zwangslauf (1.1) führt mit $c_0:c_1:c_2:c_3 = 0:1+bt^2:at^2:at$ offensichtlich nur dann alle allgemeinen Punkte des Gangraumes Σ auf rationalen Kurven vierter Ordnung, wenn die $d_i(t)$ ($i = 1,2,3$) eine Darstellung der Form

$$d_i(t) \cdot \mathcal{D} = \sum_{j=0}^4 a_{ij} t^j = a_{ij} t^j \quad (i = 1,2,3) \quad (1.5)$$

$$(\mathcal{D} = 1 + (a^2+2b)t^2 + (a^2+b^2)t^4)$$

mit reellen Konstanten a_{ij} besitzen. Die rationalen räumlichen Zwangsläufe vierter Ordnung besitzen somit im Fall a die Normalform

$$x_0' = Dx_0$$

$$x_1' = a_{1j} t^j x_0 + [1 - (a^2 - 2b)t^2 - (a^2 - b^2)t^4] x_1 + 2at^2(1 + bt^2)x_2 + 2at(1 + bt^2)x_3$$

$$x_2' = a_{2j} t^j x_0 + 2at^2(1 + bt^2)x_1 + [-1 - (a^2 + 2b)t^2 + (a^2 - b^2)t^4] x_2 + 2a^2 t^3 x_3$$

$$x_3' = a_{3j} t^j x_0 + 2at(1 + bt^2)x_1 + 2a^2 t^3 x_2 + [-1 + (a^2 - 2b)t^2 - (a^2 + b^2)t^4] x_3$$

(1.6)

mit $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, a_{ij} , $b \in \mathbb{R}$, $t \in I$.

Die zugeordnete **rationale** sphärische Bewegung vierter Ordnung wurde bereits vielfach untersucht (vgl. [2, S.332 f.]): Es handelt sich um einen *symmetrischen sphärischen Zwanglauf* $\Sigma^* \mid \Sigma^*$ (vgl. [21]), bei dem die Achsenkegel Π^* und Π^* kongruente quadratische Kegel sind. O. BOTTEMA und B. ROTH zeigen in [2, S. 332], daß die Bahnkurven dieses sphärischen Zwanglaufs im allgemeinen *rationale Raumkurven vierter Ordnung zweiter Art* sind; genau die Punkte zweier reeller Geraden beschreiben Kreise als Bahnen; diese Geraden sind die *sphärischen Brennlinien* des Gangachsenkegels Π^* und fallen für $a^2 = 4(1-b)$ mit der Drehachse von Π^* zusammen (Π^* ist für $a^2 = 4(1-b)$ ein Drehkegel). Für $a^2 \neq 4(1-b)$ existieren noch vier weitere - paarweise **konjugiert komplexe** - sphärische Brennlinien von Π^* , deren Punkte (komplexe) Kreise als Bahnen besitzen. $\Sigma^* \mid \Sigma^*$ ist somit als Gegenstück zu den *Zwillingskurbelgetrieben* der ebenen euklidischen Kinematik

anzusehen (vgl. [24, S. 89f.]), weshalb wir diesen Bewegungsvorgang auch als *sphärisches Zwillingskurbelgetriebe* ansprechen wollen (vgl. [23]).

Bei $\Sigma^*|\Sigma^*$ ist der Punkt $(1:0:0:0)$ Fixpunkt; bei (1.6) besitzt er die Bahnkurve $(\mathcal{D} : a_{1j}t^j : a_{2j}t^j : a_{3j}t^j)$, die im allgemeinen ebenfalls rational von vierter Ordnung ist; ein Zerfall ist - abgesehen vom Fall des sphärischen Zwillingskurbelgetriebes - nur in Kegelschnitte und Geraden möglich. Wir haben damit den

Satz 1: Die rationalen räumlichen Zwangsläufe vierter Ordnung $\Sigma|\Sigma'$ lassen sich im Fall a durch Überlagerung einer sphärischen Zwillingskurbelbewegung mit einer Schiebung längs einer rationalen Kurve s vierter Ordnung erzeugen; s kann auch in Kegelschnitte bzw. Geraden zerfallen.

Bekanntes: Beispiele für solche Bewegungsvorgänge sind der BENNETT'sche Mechanismus (vgl. [2, S.326 f] und [13]), sowie die BOREL-BRICARD-Bewegung (vgl. [10] und [14]).

Fall b: $k^* - (1.4)$ mit $a=b=0$ - besitzt die Parameterdarstellung $(0:1:t:0)$. Der Zwangslauf (1.1) führt mit $c_0:c_1:c_2:c_3 = 0:1:t:0$ offensichtlich nur dann alle allgemeinen Punkte des Gangraumes Σ auf rationalen Kurven

vierter Ordnung, wenn

$$d_i(t) \cdot (1+t^2) = \sum_{j=0}^4 a_{ij} t^j \frac{1}{1+\alpha t+\beta t^2} = \frac{a_{ij} t^j}{1+\alpha t+\beta t^2} \quad (1.7)$$

mit $\alpha, \beta, a_{ij} \in \mathbb{R}; i = 1, 2, 3$ gilt. Die *rationalen räumlichen Zwangsläufe vierter Ordnung* besitzen im Fall *b* somit die Normalform

$$\begin{aligned} x_0' &= (1+t^2)(1+\alpha t+\beta t^2)x_0 \\ x_1' &= a_{1j} t^j x_0 + (1+\alpha t+\beta t^2) [(1-t^2)x_1 + 2tx_2] \\ x_2' &= a_{2j} t^j x_0 + (1+\alpha t+\beta t^2) [2tx_1 - (1-t^2)x_2] \\ x_3' &= a_{3j} t^j x_0 - (1+\alpha t+\beta t^2)(1+t^2)x_3. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Der *sphärische Anteil* dieser Bewegungsvorgänge ist eine *Drehung* um eine in Σ^* feste Achse. Die Zwangsläufe (1.8) sind damit *Zylinderschrotungen* (vgl. A. SCHÖNFLIES [20]); sie besitzen neben Z_u (0:0:0:1) auch noch die beiden konjugiert komplexen Punkte I, \bar{I} (0:1: $\pm i$:0) als Fixpunkte. Die Achsenflächen Π und Π' sind hier *Zylinder* mit der Spitze Z_u . Die Bahnkurve des Punktes (1:0:0:0) besitzt die Darstellung $((1+t^2)(1+\alpha t+\beta t^2): a_{1j} t^j : a_{2j} t^j : a_{3j} t^j)$; es handelt sich demnach im allgemeinen um eine *rationale Kurve vierter Ordnung*, die auch zerfallen kann: Liegt eine *Kurve dritter Ordnung* vor ($\beta = a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$),

so entstehen die von W. WUNDERLICH in [25] untersuchten kubischen Zwangläufe. Für Kegelschnitte bzw. Geraden als Bahnkurven von (1:0:0:0) wird sich im allgemeinen ein rationaler Zwanglauf vierter Ordnung einstellen. Wir notieren den

Satz 2: Die rationalen räumlichen Zwangläufe vierter Ordnung können im Fall b durch Überlagerung einer stetigen Drehung mit einer Schiebung längs einer rationalen Raumkurve vierter Ordnung erzeugt werden, die im allgemeinen auch längs Kegelschnitten oder Geraden vorgenommen werden kann.⁴⁾

Bekanntes: Beispiele für diese Zwangläufe sind die BOREL-BRICARD-Bewegungen mit einem geraden Kugelkonoid als Grundfläche (vgl. J. KRAMES [10] und [14]) und die MANNHEIM'schen Bewegungen [2, S. 310 f.].

2. Ebene Bahnkurven bei rationalen räumlichen Zwangläufen vierter Ordnung

Definieren wir $\eta(t) = (x_0', x_1', x_2', x_3')^t$, so lassen sich die durch (1.6) und (1.8) erfaßten rationalen Zwangläufe vierter Ordnung in der Gestalt

$$\eta(t) = \eta(0) + t \cdot \dot{\eta}(0) + \frac{t^2}{2} \ddot{\eta}(0) + \frac{t^3}{6} \ddot{\eta}(0) + \frac{t^4}{24} \ddot{\eta}(0) \quad (2.1)$$

4) Hier ist das Zeitgesetz der Schiebung wesentlich; so kann bei einer Geraden oder einem Kegelschnitt als Schiebekurve bei geeigneter Wahl des Zeitgesetzes eine DARBOUX-BEWEGUNG entstehen - diese Bewegungsvorgänge führen alle allgemeinen Punkte von Σ auf Kegelschnitten.

darstellen.⁵⁾ Alle Punkte des Gangraumes Σ , die zum Zeitpunkt $t = 0$ Wendepunkte ihrer Bahnen durchlaufen, erfüllen im allgemeinen einen kubischen Kreis $w(o)$ (vgl. [2, S.165]), der für Zylinderschrotungen (Fall b) in die beiden Minimalgeraden $[I Z_u]$ und $[\bar{I} Z_u]$ sowie eine reelle Z_u enthaltende Gerade zerfällt. Genau dann, wenn der Zwanglauf $\Sigma|\Sigma'$ zum Zeitpunkt $t = 0$ von einer ebenen Bewegung oskuliert wird, erfüllen diese Punkte im allgemeinen einen Drehzylinder mit Z_u als Spitze (vgl. [18]). Daß dies für den ganzen Zwanglauf $\Sigma|\Sigma'$ der Fall ist, wollen wir vorerst ausschließen; $w(o)$ kann daher oBdA als (zerfallende) Kurve dritter Ordnung angesehen werden.

Ein nicht auf $w(o)$ gelegener Punkt $P(x_0:x_1:x_2:x_3)$ des Gangraumes Σ beschreibt genau dann eine ebene Bahnkurve, wenn

$$\det(\eta(o), \dot{\eta}(o), \ddot{\eta}(o), \eta(t)) = 0 \quad \forall t \in I \quad (2.2)$$

erfüllt ist. (2.2) läßt sich mit (2.1) auf die beiden Bedingungen

$$\begin{cases} \det(\eta(o), \dot{\eta}(o), \ddot{\eta}(o), \dot{\ddot{\eta}}(o)) = 0 \text{ und} \\ \det(\eta(o), \dot{\eta}(o), \ddot{\eta}(o), \ddot{\ddot{\eta}}(o)) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

reduzieren. Die erste dieser Gleichungen stellt mit [2, S.172 f.]

5) Ableitungen nach t werden wir künftig durch Punkte kennzeichnen.

bzw. [18] genau die Henkelpunktsfläche $X(o)$ von $\Sigma|\Sigma'$ zum Zeitpunkt $t = 0$ dar; $X(o)$ trägt jene Punkte des Gangraumes Σ , die zum Zeitpunkt $t = 0$ stationäre Bahnschmiegebenen besitzen.

Fall a: Der Zwangslauf $\Sigma|\Sigma'$ (1.6) ist keine Zylinderschrotung; $X(o)$ besteht dann im allgemeinen aus der sich in (2.3) stets abspaltenden Fernebene $\omega(x_o = 0)$ und einer algebraischen Fläche dritter Ordnung. Auch die zweite Gleichung (2.3) stellt im allgemeinen die Fernebene ω und eine algebraische Fläche dritter Ordnung $Y(o) \in \Sigma$ dar.

Der Schnitt von $X(o)$ und $Y(o)$ zerfällt in die Wendekubik $w(o)$ sowie einen eigentlichen Restschnitt 6. Ordnung k ; k trägt alle jene Punkte von Σ , die bei (1.6) ebene Bahnen beschreiben. Die Fernpunkte von k sind genau die Fernpunkte der im allgemeinen existierenden sechs Brennstrahlen des Gangkegels Π^* des zugehörigen sphärischen Bewegungsvorganges $\Sigma^*|\Sigma'^*$. Diese Brennstrahlen sind die gangfesten BURMESTER-Geraden [2, S 216] von $\Sigma^*|\Sigma'^*$; sie fallen genau für $a^2 = 4(1-b)$ in die Drehachse des Gangdrehkegels Π^* .

Wir beweisen den folgenden

Satz 3: Bei den rationalen räumlichen Zwangsläufen vierter Ordnung $\Sigma|\Sigma'$ existiert im Fall a stets genau eine eigentliche (unter Umständen zerfallende) Raumkurve 6. Ordnung k , deren Punkte bei $\Sigma|\Sigma'$ auf ebenen Bahnen geführt werden.⁶⁾

6) Für einen Teil dieser Zwangsläufe wurde dieses Ergebnis bereits von G. DARBOUX [4, S. 375] angegeben.

Beweis: (1) Es ist nicht möglich, daß $X(o) = Y(o)$ gilt, denn $\Sigma \mid \Sigma'$ hätte dann eine zweiparametrische Schar ebener Bahnkurven, und solche Zwangläufe sind nach [18] Zylinderschrotungen, was hier nicht in Betracht kommt.

(2) Von k kann sich kein in der Fernebene ω gelegener Teil k_u abspalten: k_u wäre sonst mit [18] ein Teil der Fernkurve von $X(o)$ und somit ein Teil der Fernkurve der Henkelpunktsfläche $X^*(o)$ des zugeordneten sphärischen Bewegungsvorgangs $\Sigma^* \mid \Sigma^*$. Dieser Bewegungsvorgang kann dann nach [18] nur eine Drehung um eine in Σ^* feste Achse sein, was $\Sigma \mid \Sigma'$ als Zylinderschrotung kennzeichnet.

(3) Die Punkte der Wendekubik $w(o)$ können ebenfalls keine ebenen Bahnkurven besitzen: Da $t = o$ kein ausgezeichneter Zeitpunkt war, müßte nämlich $w(o) \subset (X(t) \cap Y(t))$ ($\forall t \in I$) gelten, was aus Stetigkeitsgründen nur möglich ist, wenn alle Punkte von $w(o)$ Bahngeraden beschreiben, was aber bekanntlich nur für besondere Zylinderschrotungen der Fall sein kann. Damit existieren im Fall a keine Ausnahmen von der Aussage des Satzes 3. \square

Fall b: $\Sigma \mid \Sigma'$ ist eine der durch (1.8) gegebenen Zylinderschrotungen. Nach [2, S. 315] stellt die erste der Gleichungen (2.3) im allgemeinen einen Drehzylinder $X(o)$

mit der Spitze Z_u und die doppelt zu zählende Fernebene ω dar.⁷⁾ Die zweite Gleichung (2.3) besitzt die Gestalt

$$\det \begin{bmatrix} x_0 & \alpha x_0 & (1+\beta)x_0 & \beta x_0 \\ x_1 & a_{11}x_0 + \alpha x_1 + 2x_2 & a_{12}x_0 + (\beta-1)x_1 + 2\alpha x_2 & a_{14}x_0 - \beta x_1 \\ -x_2 & a_{21}x_0 + 2x_1 - \alpha x_2 & a_{22}x_0 + \alpha x_1 - (\beta-1)x_2 & a_{24}x_0 + \beta x_2 \\ -x_3 & a_{31}x_0 - \alpha x_3 & a_{32}x_0 - (\beta+1)x_3 & a_{34}x_0 - \beta x_3 \end{bmatrix} = 0, \quad (2.4)$$

wobei wir $a_{10} = a_{20} = a_{30} = 0$ als Anfangsbedingungen gesetzt haben. Nach einigen Umformungen erhalten wir aus (2.4)

$$x_0^2 \cdot \det \begin{bmatrix} a_{11}x_0 + 2x_2 & a_{12}x_0 - 2x_1 + 2\alpha x_2 & a_{14}x_0 - 2\beta x_1 \\ a_{21}x_0 + 2x_1 & a_{22}x_0 + 2\alpha x_1 + 2x_2 & a_{24}x_0 + 2\beta x_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{bmatrix} = 0; \quad (2.5)$$

$\mathcal{V}(o)$ stellt damit ebenfalls die doppelt zu zählende Fernebene ω und einen unter Umständen zerfallenden Drehzylinder

7) Der Zerfall dieses Zylinders wurde in [18] ausführlich diskutiert. $X(o)$ erfüllt genau dann den gesamten Gangraum Σ , wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ eine oskulierende DARBOUX-Bewegung ($\alpha = \beta = a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = a_{33} = a_{34} = 0$ in (1.8)) oder eine ebene Bewegung ($a_{3j}t^j = \text{konst.}$) vorliegt. Dies wollen wir obdA zum Zeitpunkt $t = 0$ ausschließen.

mit Z_u als Spitze dar. $X(o)$ und $Y(o)$ besitzen daher im endlichen höchstens zwei gemeinsame Erzeugende k und w von denen eine die Wendegerade $w(o) = w$ ist.

Fallen $X(o)$ und $Y(o)$ zusammen, so besitzt $\Sigma|\Sigma'$ eine zweiparametrische Schar ebener Bahnkurven, und es liegt einer der in [18] studierten Zwangläufe vor. Da in [18] gezeigt wurde, daß solche Zwangläufe aus DARBOUX-Bewegungen durch Überlagerung mit einer stetigen Schiebung längs einer rastfesten Geraden g' erzeugt werden können, sind sie in (1.8) durch $\alpha = \beta = 0$ und $(a_{13} + a_{14}t) : (a_{23} + a_{24}t) : (a_{33} + a_{34}t) = \text{konst.}$ ($\forall t \in I$) gekennzeichnet.

Hier kann es vorkommen, daß $X(o)$ und $Y(o)$ zerfallen und keine eigentlichen Schnittgeraden besitzen; dann existiert keine einzige ebene Bahnkurve.⁸⁾

Hier könnte es vorkommen, daß die Wendegerade $w(t)$ bei $\Sigma|\Sigma'$ stationär ist; ihre Punkte beschreiben dann Bahngeraden.

Diesen Fall wollen wir nun genau untersuchen: Wenn wir auf die Anfangsbedingungen $a_{10} = a_{20} = a_{30} = 0$ verzichten,

können wir oBdA diese gangfeste Wendegerade $w(t) = w$ in die x_3 -Achse legen. Die Bahnkurve $((1+t^2)(1+\alpha t + \beta t^2) :$

$a_{1j}t^j : a_{2j}t^j : a_{3j}t^j)$ des Punktes $U(1:0:0:0)$ muß dann eine

Gerade sein; $\Sigma|\Sigma'$ kann daher durch Überlagerung einer Drehbewegung $\Sigma^*|\Sigma^*$ um eine feste Achse und einer Schiebung

8) Der von J. KRAMES in [15] untersuchte Zwanglauf bietet dafür ein besonderes Beispiel: $X(o)$ besteht aus der vierfach zählenden Fernebene ω ; dies folgt nach kurzer Rechnung aus Formel (12) in [15]; es existieren somit bei diesem Zwanglauf keine ebenen Bahnkurven.

längs einer rastfesten Geraden erzeugt werden. Die Bewegung $\Sigma|\Sigma'$ führt dann entweder alle Punkte von Σ auf ebenen Bahnen (die Schiebung erfolgt orthogonal zur x_3' -Achse oder ergibt mit $\Sigma^*|\Sigma^*$ eine DARBOUX-Bewegung), oder es existiert mit [18] ein in Σ stationärer Drehzylinder mit der Spitze Z_u , dessen Punkte auf ebenen Bahnen geführt werden (dieser Drehzylinder kann auch zerfallen (vgl. [18])). Wir haben damit erkannt, daß es nicht möglich ist, genau die Punkte zweier gangfester Geraden bei solch einem Zwanglauf auf ebenen Bahnen zu führen. Es gilt somit der

Satz 4: Bei den rationalen Zwangläufen vierter Ordnung $\Sigma|\Sigma'$ werden im Fall b entweder alle Punkte des Gangraumes Σ , alle Punkte eines Drehzylinders (der auch zerfallen kann), oder alle Punkte einer Geraden von Σ auf ebenen Bahnen geführt oder es existiert kein einziger eigentlicher Punkt von Σ mit einer ebenen Bahnkurve. $\Sigma|\Sigma'$ ist im ersten Fall ein ebener rationaler Zwanglauf vierter Ordnung, im zweiten Fall eine der in [18] untersuchten Zylinderschrotungen.

3. Rationale symmetrische Schrotungen vierter Ordnung

Wird das Rastsystem Σ' an einer - durch die Plückerkoordinaten $(p_1:p_2:p_3:p_4:p_5:p_6)$ ($p_i=p_i(t) \in C^0(I)$, $i=1\dots 6$) beschriebenen - stetigen Schar von Erzeugenden $e(t)$ einer Grundregelfläche Γ gespiegelt, so lassen sich die entstehenden Spiegelbilder $e(t)$ auch durch eine 180° -Drehung von Σ' um $e(t)$ gewinnen; $\Sigma(t)$ bestimmen daher einen eindeutigen Zwangslauf $\Sigma \parallel \Sigma'$, den J. KRAMES in [9] *symmetrische Schrotung* nennt. In mehreren beachtenswerten Arbeiten ([9] - [15]) wurden von J. KRAMES die wesentlichsten Eigenschaften dieser Zwangsläufe aufgedeckt. O. BOTTEMA und B. ROTH geben in [2, S. 319] an, daß diese Zwangsläufe die Darstellung

$$\begin{aligned}x_0' &= (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) x_0 \\x_1' &= 2(p_3 p_5 - p_2 p_6) x_0 + (p_1^2 - p_2^2 - p_3^2) x_1 + 2p_1 p_2 x_2 + 2p_1 p_3 x_3 \\x_2' &= 2(p_1 p_6 - p_3 p_4) x_0 + 2p_1 p_2 x_1 + (-p_1^2 + p_2^2 - p_3^2) x_2 + 2p_2 p_3 x_3 \\x_3' &= 2(p_2 p_4 - p_1 p_5) x_0 + 2p_1 p_3 x_1 + 2p_1 p_3 x_2 + (-p_1^2 - p_2^2 + p_3^2) x_3\end{aligned} \quad (3.1)$$

besitzen. Diese Zwangsläufe sind in (1.1) durch $c_0 = 0$, $c_1 = p_1$, $c_2 = p_2$, $c_3 = p_3$ und $d_1 c_1 + d_2 c_2 + d_3 c_3 = 0$ gekennzeichnet. Ein Vergleich mit Abschnitt 1 zeigt, daß die Grundregelflächen Γ für rationale symmetrische Schrotungen vierter Ordnung stets entweder einen *irreduziblen Richtkegel* zweiter Ordnung (Fall a) oder eine *Richtebene* besitzen (Fall b).

Die Bahn eines eigentlichen Punktes $P' \in \Sigma$ bei (3.1) kann nach J. KRAMES [9] durch zentrische Streckung der Fußpunktkurve f_p , von P' bezüglich Γ mit Zentrum P' und Streckfaktor 2 gewonnen werden. Dies ermöglicht es, aus der Bahn des Punktes $(1:0:0:0)$ bei (1.6) bzw. (1.8) eine einfache Parameterdarstellung von Γ zu gewinnen:

Fall a: (1.6) ist wegen $c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3 = 0$ genau dann symmetrisch, wenn neben den Anfangsbedingungen $a_{10} = a_{20} = a_{30} = 0$ die Bedingungen

$$\begin{aligned} a_{1j} t^j &= -at^2 [a_{31} + (a_{21} + a_{32})t + (a_{22} + a_{33} - ba_{31})t^2] \\ a_{2j} t^j &= t [a_{21} + a_{22}t + (ba_{21} + ba_{32} - a_{34})t^2 + b(a_{22} + a_{33} - ba_{31})t^3] \\ a_{3j} t^j &= a_{3j} t^j \end{aligned} \quad (3.2)$$

erfüllt sind. Als Parameterdarstellung von Γ gewinnen wir damit

$$\varphi'(t, u) = \begin{bmatrix} 2D \\ -at^2 [a_{31} + (a_{21} + a_{32})t + (a_{22} + a_{33} - ba_{31})t^2] \\ t [a_{21} + a_{22}t + (ba_{21} + ba_{32} - a_{34})t^2 + b(a_{22} + a_{33} - ba_{31})t^3] \\ a_{3j} t^j \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + bt^2 \\ at^2 \\ at \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Daraus oder aus einem direkten Vergleich von (1.6) und (3.1)

können wir die Plückerkoordinaten der Grundfläche Γ zu

$$\begin{aligned}
 (p_{01}:p_{02}:p_{03}:p_{23}:p_{31}:p_{12}) &= (2D(1+bt^2) : 2Dat^2 : 2Dat : \\
 &: at^2[a_{21}+a_{22}t+(ba_{21}+ba_{32}-a_{34})t^2 + b(a_{22}+a_{33}-ba_{31})t^3] - aa_{3j}t^{j+2} : \\
 &: (1+bt^2)a_{3j}t^j + a^2t^3[a_{31}+(a_{21}+a_{32})t+(a_{22}+a_{33}-ba_{31})t^2] : \\
 &: -a^2t^4[a_{31}+(a_{21}+a_{32})t+(a_{22}+a_{33}-ba_{31})t^2] - \\
 &\quad -(1+bt^2)t[a_{21}+a_{22}t+(ba_{21}+ba_{32}-a_{34})t^2+b(a_{22}+a_{33}-ba_{31})t^3])
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

berechnen. Γ stellt damit im allgemeinen eine rationale Regelfläche 6. Ordnung mit einem irreduziblen Richtkegel 2. Ordnung dar ($a \neq 0$).

Als bekannte Sonderfälle sind hier enthalten:

(1) Γ ist von vierter Ordnung mit einem Drehkegel als Richtkegel ($a^2=4(1-b)$ und weitere Bedingungen). Die auf Γ

gegründete symmetrische Schrotung ist die von J.

KRAMER in [10] und [14] ausführlich untersuchte BÖREL-BRICARD-Bewegung (vgl. auch [2, S. 324 f.]).

(2) Γ ist ein Hyperboloid: Die auf Γ gegründete symmetrische Schrotung ist genau die Bewegung des BENNETT'schen Mechanismus und würde in diesem Zusammenhang von

J. KRAMES [13] untersucht.

Fall b: (1.8) ist mit $c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3 = 0$ genau dann symmetrisch, wenn

$$a_{1j} t^j = -t \cdot a_{2j} t^j \quad (3.5)$$

gilt, also zusätzlich $a_{24} = 0$ erfüllt ist. Als Parameterdarstellung der Grundfläche Γ erhalten wir so

$$\varphi'(t, u) = \begin{pmatrix} (1+t^2)(1+\alpha t + \beta t^2) \\ -\frac{t}{2} a_{2j} t^j \\ \frac{1}{2} a_{2j} t^j \\ \frac{1}{2} a_{3j} t^j \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (u \in I, a_{24}=0) \quad (3.6)$$

Die Plückerkoordinaten der Grundfläche Γ lauten

$$\begin{aligned} (2(1+\alpha t + \beta t^2)(1+t^2) : 2t(1+\alpha t + \beta t^2)(1+t^2) : 0 : a_{3j} t^{j+1} : \\ :-a_{3j} t^j : -(1+t^2)[a_{21} t + a_{22} t^2 + a_{23} t^3]); \end{aligned} \quad (3.7)$$

Γ ist demnach eine konoidale rationale Regelfläche von höchstens fünfter Ordnung. Auch hier sind einige Beispiele bekannt:

- (1) $\alpha = 0, \beta = 1, a_{22} = 0, a_{21} = a_{23}$: Γ besitzt die beiden Minimalgeraden $[I Z_u]$ und $[\bar{I} Z_u]$ als *Torsallinien* mit ω als *Torsalebene*. Diese Fläche wurde samt der darauf gegründeten symmetrischen Schrotung von J. KRAMES in [15] untersucht.
- (2) Ist Γ ein *Kugelkonoid* (Γ ist dann von viertem Grad), so stellt $\Sigma|\Sigma'$ eine *Sonderform der BÖREL-BRICARD-Bewegungen* dar (vgl. J. KRAMES [10]; alle allgemeinen Bahnkurven sind *sphärisch*).
- (3) Eine ebenfalls *konoidale Grundfläche vierten Grades* untersucht W. WUNDERLICH [25]; er erhält jedoch eine *symmetrische Schrotung mit durchwegs kubischen Bahnkurven* ($\beta = 0, a_{14} = -a_{23} = a_{34} = 0$).
- (4) M. HUSTY studiert in [6] die auf eine *CAYLEY'sche Fläche* Γ gegründete symmetrische Schrotung, wobei die Fernebene ω als *Torsalebene* angenommen wird.
- (5) Γ ist ein *PLÜCKER'sches Konoid*: In [11] zeigt J. KRAMES, daß $\Sigma|\Sigma'$ dann alle allgemeinen Punkte des Gangraumes Σ auf *Ellipsen* führt - es entsteht der *vollkommen steile DARBOUX'sche Umschwung* .
- (6) Γ ist ein *hyperbolisches Paraboloid*: Auch hier sind die Bahnkurven so wie in (3) nicht mehr von 4. Ordnung. W. WUNDERLICH [25] und J. KRAMES [12] zeigen, daß die Bahnkurven im allgemeinen *kubisch* sind.

(7) Γ besteht aus den Tangenten eines Kegelschnittes l : Der Zwanglauf $\Sigma|\Sigma'$ ist ein ebenes Zwillingskurbelgetriebe bzw. eine symmetrische Parabelrollung und führt allgemeine Punkte von Σ auf ebenen rationalen Kurven 4. Ordnung bzw. 3. Ordnung, wenn l eine Parabel ist (vgl. W. WUNDERLICH [24]).

Da die Bahnkurven unserer symmetrischen Schrotungen im allgemeinen rational von vierter Ordnung sind und durch zentrische Ähnlichkeiten in Fußpunktkurven der Grundflächen übergehen, haben wir mit (3.3) und (3.6) bzw. (3.4) und (3.7) bis auf euklidische Bewegungen alle Regelflächen Γ bestimmt, deren sämtliche allgemeinen Fußpunktkurven rationale Kurven vierter Ordnung sind.

Wir fassen zusammen in

Satz 5: Die rationalen symmetrischen Schrotungen vierter Ordnung besitzen die Grundflächen (3.4) bzw. (3.7). Im Fall a sind diese Regelflächen Γ rational von höchstens 6. Grad und besitzen einen irreduziblen Kegel zweiter Ordnung als Richtkegel. In Fall b sind die Regelflächen Γ konoidal und gleichzeitig rational von höchstens fünftem Grad. Die in (3.4) bzw. (3.7) erfaßten sind die einzigen Regelflächen, deren sämtliche Fußpunktkurven im allgemeinen rationale Kurven vierter Ordnung sind.

4. Eine besondere symmetrische rationale Schrotung vierter Ordnung vom Typ b.

Wählen wir in (3.6) $\alpha = 0, \beta = 1, a_{2j}t^j = 2t \cdot (t^2-3)$ und $a_{3j}t^j = 2t(1+t^2)$, so erhalten wir als Grundfläche Γ die Regelfläche dritten Grades

$$\varphi'(t, u) = \begin{pmatrix} (1+t^2)^2 \\ -t^2(t^2-3) + u \\ t(t^2-3) + ut \\ t(1+t^2) \end{pmatrix} \quad t, u \in (-\infty, +\infty) \quad (4.1)$$

mit den Plückerkoordinaten

$$(1+t^2 : t(1+t^2) : t^2 : -t : -t(t^2-3)) \quad (4.2)$$

und der algebraischen Gleichung

$$2x_0^2(x_0+x_1)(x_2+2x_3) = x_3[(x_2+2x_3)^2 + (x_0+x_1)^2]. \quad (4.3)$$

Γ schneidet die Fernebene ω ($x_0 = 0$) nach der Leitgeraden $x_0 = x_3 = 0$ und den beiden konjugiert komplexen Geraden $x_0 = 0, (x_2+2x_3)^2 + (x_0+x_1)^2 = 0$. Γ besitzt die Doppelgerade

$$d \dots \quad x_0+x_1 = 0, \quad x_2+2x_3 = 0 \quad (4.4)$$

sowie die beiden Torsallinien t_1 und t_2

$$x_3 = \pm x_0, \quad x_0 = x_1 \pm x_2. \quad (4.5)$$

Γ läßt sich daher durch die Affinität

$$(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \rightarrow (x_0' = x_0 : x_1' = x_0 + x_1 : x_2' = x_2 + 2x_3 : x_3' = x_3) \quad (4.6)$$

in ein PLÜCKER'sches Konoid mit der Gleichung

$$2x_0'^2 x_1' x_2' = x_3' (x_1'^2 + x_2'^2) \quad (4.7)$$

überführen.⁹⁾

Für die Striktionslinie s von Γ findet man nach kurzer Rechnung die Parameterdarstellung

$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} (1+t^2)^2 \\ 3-6t^2-t^4 \\ -8t^3 \\ t(1+t^2) \end{pmatrix} ; \quad (4.8)$$

Der Grundriß s' in der Ebene $x_3 = 0$ hat mit $t = -\tan \frac{\nu}{2}$ die Darstellung

$$(1 : 2\cos\nu + \cos 2\nu : 2\sin\nu - \sin 2\nu : 0) \quad (4.9)$$

und ist somit eine STEINER'sche Hypozykloide (vgl. [5, S.249]).

⁹⁾ Dieses PLÜCKER'sche Konoid wurde bereits vielfach studiert (vgl. z.B. J. KRAMES [114]). S.

Die auf Γ gegründete symmetrische Schrotung $\Sigma|\Sigma'$ besitzt die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}x_0' &= (1+t^2)^2 x_{00} \\x_1' &= -2t^2(t^2-3)x_0 + (1+t^2) [(1-t^2)x_1 + 2tx_2] \\x_2' &= 2t(t^2-3)x_0 + (1+t^2)[2tx_1 - (1-t^2)x_2] \\x_3' &= 2t(t^2-3)x_0 - (1+t^2)^2 x_3.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Diesem Zwanglauf ist mit $x_3' = 0$ ein ebener symmetrischer Bewegungsvorgang $E|E'$ zugeordnet, den wir als dem Zwanglauf $\Sigma|\Sigma'$ zugeordneten *Grundrißzwanglauf* ansprechen werden. $E|E'$ ist ein ebener symmetrischer Bewegungsvorgang mit dem Striktionsliniengrundriß s' (4.9) als *Rastpolkurve*; $E|E'$ kann daher durch *Abrollen zweier symmetrischer STEINER'scher Hypozykloiden* erzeugt werden. Diese Zwangläufe wurden bereits von W. WUNDERLICH in [24, S. 167 f.] untersucht; es handelt sich um einen als besonderes *Planetengetriebe 3. Stufe* aufzufassenden Bewegungsvorgang, der allgemeine Punkte von E auf *monozirkularen rationalen Kurven 4. Ordnung mit einem Dreifachpunkt* führt; die Bahnkurven berühren die Ferngerade in den absoluten Kreispunkten.

Da die Bahnkurvengrundrisse von $\Sigma|\Sigma'$ daher einen Dreifachpunkt besitzen, haben die Bahnkurven selbst eine *Trisekante* und sind von zweiter Art.

Abbildung 1

Abbildung 1 zeigt die Grundfläche Γ in Grund- und Aufriß mit der Striktionslinie s

(mit den üblichen affinen Koordinaten $1:x:y:z = x_0:x_1:x_2:x_3$ für $x_0 \neq 0$).

Abbildung 2

In Abbildung 2 ist die auf Γ gegründete symmetrische Schrotung mit den Punktbahnen der Punkte A. und B sowie den Achsenzylindern π und π' dargestellt. Bei diesem Zwanglauf $\Sigma|\Sigma'$ besitzen die in Abschnitt 2 angegebenen Flächen $X(o)$ und $Y(o)$ die Darstellung

$$\begin{aligned} X(o) \dots x_0^3(3x_0 - x_1) &= 0 \text{ und} \\ Y(o) \dots x_0^3 x_2 &= 0; \end{aligned} \tag{4.11}$$

Ihr Schnitt besteht außerhalb der Fernebene ω nur aus der zum Zeitpunkt $t = 0$ vorliegenden Wendegeraden $w(o) \dots x_2 = 0, x_1 = 3x_0$; es gibt daher keine nicht in ω gelegenen Punkte des Gangraumes Σ , die ebene Bahnen besitzen. Wir haben den

Satz 6: Die auf eine affin Verwandte Γ des PLÜCKER'schen Konoids gegründete symmetrische Schrotung $\Sigma|\Sigma'$ ist rational von vierter Ordnung. $\Sigma|\Sigma'$ ist eine Zylinderschrotung mit

Achsenzylindern vierter Ordnung, deren Normalschnitte kongruente STEINER'sche Hypozykloiden sind. Alle eigentlichen Punkte des Gangraumes Σ werden auf rationalen Raumkurven vierter Ordnung zweiter Art geführt; keine dieser Bahnkurven ist eben.

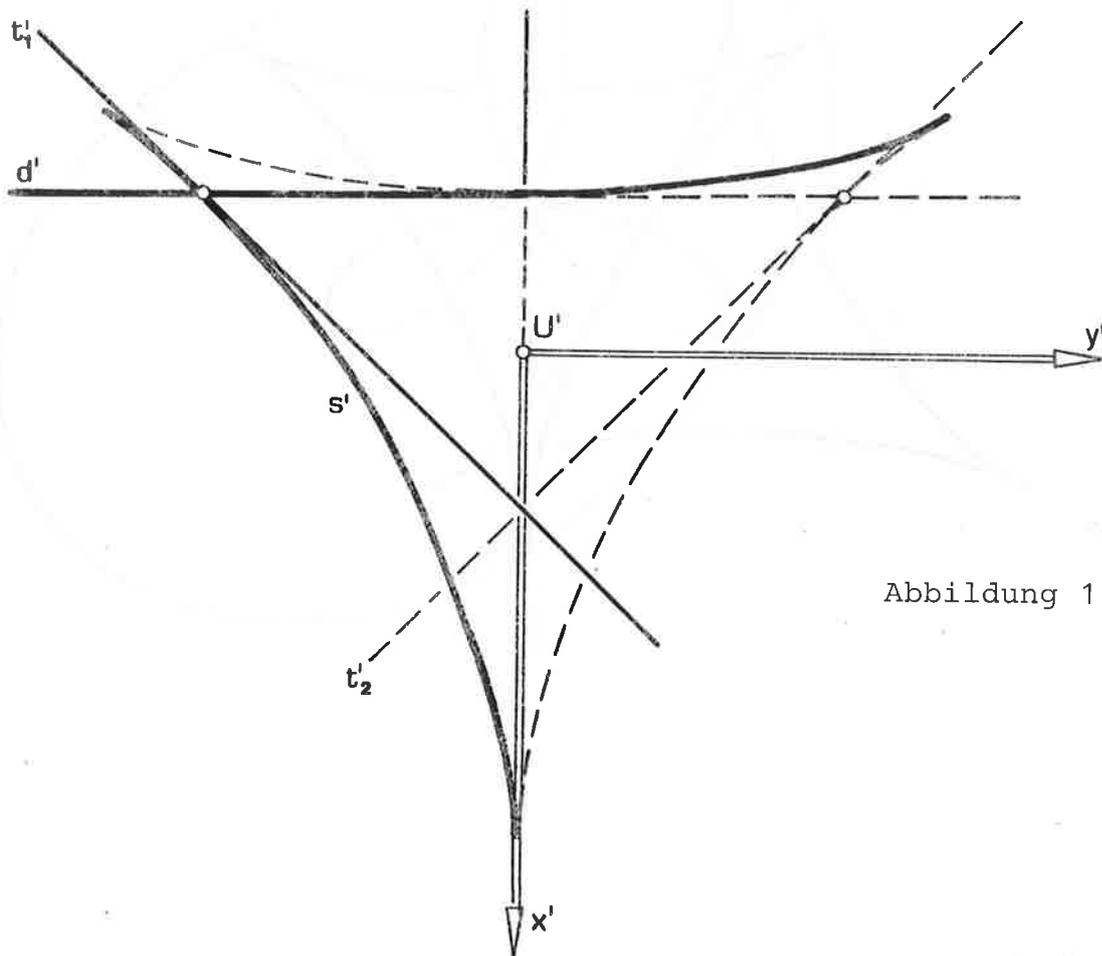
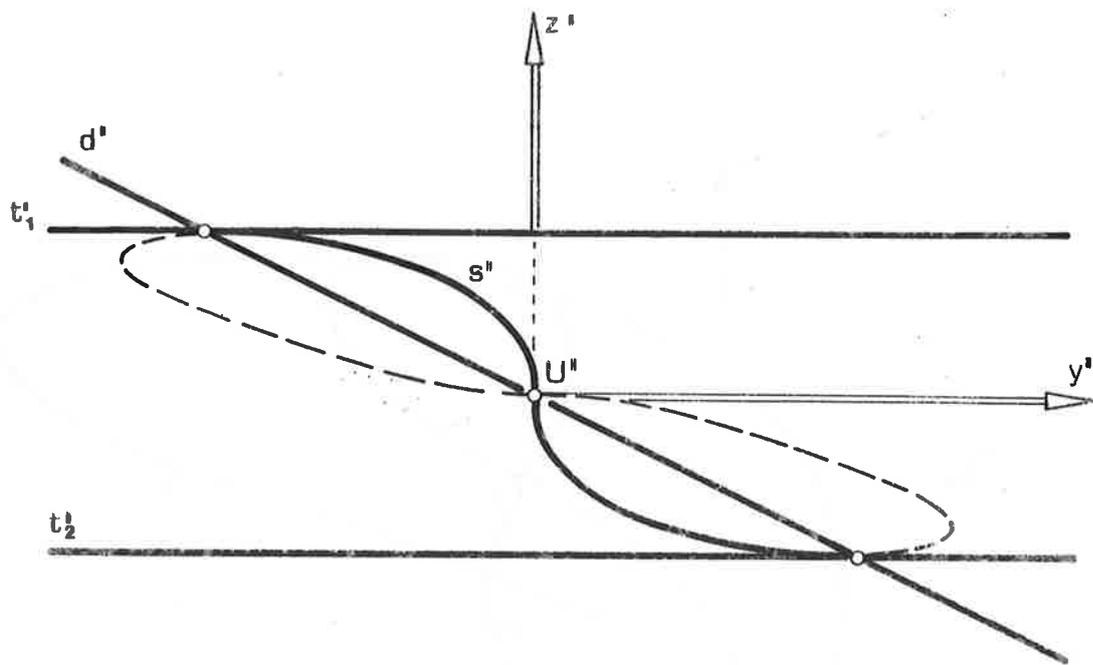


Abbildung 1

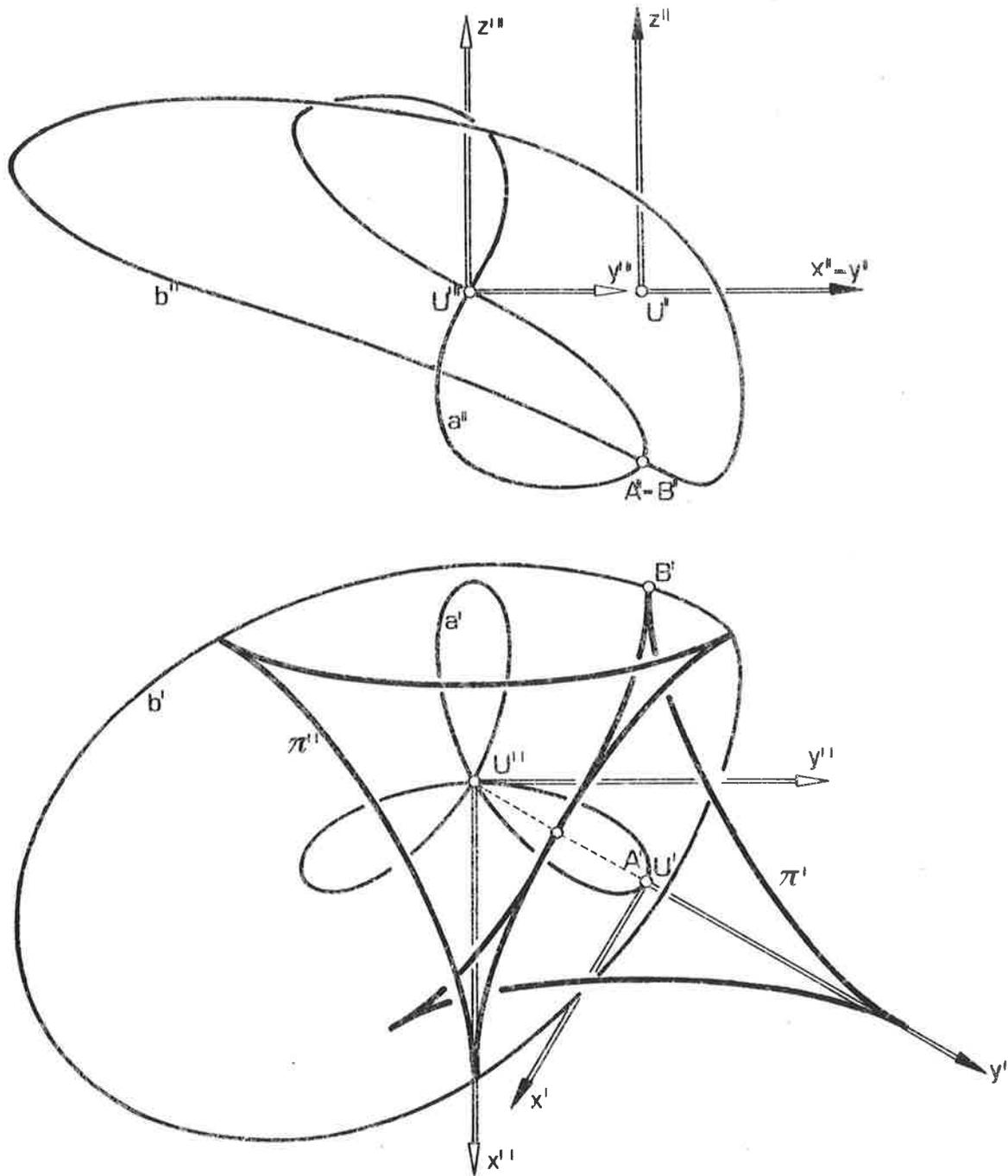


Abbildung 2

LITERATUR:

- [1] BEREIS, R.: Über die symmetrische Rollung. Österr. Ing.-Archiv 7, 243 - 246 (1953).
- [2] BOTTEMA, O. und ROTH B.: Theoretical kinematics. North-Holland Series Amsterdam 1979
- [3] BRAUNER, H.: Erzeugung eines gleichseitigen hypobolischen Paraboloides durch Bewegung einer gleichseitigen Hyperbel. Arch. Math. 6, 330-334 (1955).
- [4] DARBOUX, G.: Note III in G. KOENIGS, Lecons de Cinematique. Paris 1897.
- [5] FLADT, K.: Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven. Akad. Verlagsges., Frankfurt/Main (1962).
- [6] HUSTY, M.: Über eine symmetrische Schrotung mit einer CAYLEY - Fläche als Grundfläche. (In Vorbereitung)
- [7] KAUTNY, W.: Zur Geometrie des harmonischen Umschwungs. Monatsh. Math. 60, 66-82 (1956).
- [8] KERAVAL, E.: Surfaces partiellement cylindroides. Nouv. ann. de mathematiques (4) 10, 49-83 und 529-568 (1910).
- [9] KRAMES, J.: Über Fußpunktkurven von Regelflächen und eine besondere Klasse von Raumbewegungen (Über symmetrische Schrotungen I). Monatsh. Math. 45, 394-406 (1937).
- [10] KRAMES, J.: Zur Bricard'schen Bewegung, deren sämtliche Bahnkurven auf Kugeln liegen. (Über symmetrische Schrotungen II). Monatsh. Math. 45, 407-417 (1937).
- [11] KRAMES, J.: Zur aufrechten Ellipsenbewegung des Raumes (Über symmetrische Schrotungen III). Monatsh. Math. 46, 48-50 (1937).
- [12] KRAMES, J.: Zur kubischen Kreisbewegung des Raumes (Über symmetrische Schrotungen IV). Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss. 146, 145-158 (1937).
- [13] KRAMES, J.: Zur Geometrie des Bennett'schen Mechanismus (Über symmetrische Schrotungen V). Sitzungsber. Österr. Akad. Wissen. 146, 159-173 (1937).
- [14] KRAMES, J.: Die Borel-Bricard-Bewegung mit punktweise gekoppelten orthogonalen Hyperboloiden (Über symmetrische Schrotungen VI). Monatsh. Math. 146, 172-195 (1937).

- [15] KRAMES, J.: Über eine konoidale Regelfläche fünften Grades und die darauf gegründete symmetrische Schrotung. Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss. 190, 221-230 (1981).
- [16] MÜLLER, E. und KRAMES, J.: Konstruktive Behandlung der Regelflächen (Vorlesungen über Darstellende Geometrie III). Leipzig/Wien 1931.
- [17] MÜLLER, H.R.: Sphärische Kinematik. Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin 1962.
- [18] RÖSCHEL, O.: Räumliche Zwangsläufe mit einer zweiparametrischen Schar ebener Bahnkurven I. Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss. (im Druck).
- [19] RÖSCHEL, O.: Räumliche Zwangsläufe mit einer zweiparametrischen Schar ebener Bahnkurven II, Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss. (im Druck).
- [20] SCHÖNFLIES, A.: Über Bewegungen starrer Systeme im Fall cylindrischer Axenflächen. Math. Ann. 40, 317-331 (1892).
- [21] TÖLKE, J.: Ebene euklidische und sphärische symmetrische Rollungen. Mech. Mach. Theory 13, 187-198 (1978).
- [22] TÖLKE, J.: Eine kinematische Kennzeichnung der gleichseitigen Paraboloiden. Monatsh. Math. 87, 69-80 (1979).
- [23] TÖLKE, J.: Zu den Erzeugungsweisen der Paraboloiden durch Kegelschnitte. Arch. Math. 38, 65-74 (1982).
- [24] WUNDERLICH, W.: Ebene Kinematik. Bibliographisches Institut, Mannheim 1970.
- [25] WUNDERLICH, W.: Kubische Zwangsläufe. Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss. (im Druck).

Anschrift des Autors: Otto Röschel, Institut für Mathematik und Angewandte Geometrie, MU Leoben, Franz Josef-Straße 18, A-8700 Leoben.