

Raumkinematik und innere Geometrie der Kugel I

Otto Röschel (TU Graz)

Herrn em.o.Univ.Prof.Dr.W.Wunderlich zum 85. Geburtstag gewidmet

Einleitung: In dieser Arbeit wird erstmals versucht, das differentialgeometrische Verhalten 1. Ordnung eines räumlichen euklidischen Zwanglaufes im Sinne der inneren Geometrie einer rastfesten Fläche Φ zu studieren. Dazu liegen bisher kaum Untersuchungen vor. Dabei geht es darum, den momentanen Geschwindigkeitsvektor eines Punktes P von Φ in eine Normal- und eine Tangentialkomponente zu zerlegen und die Gesamtheit dieser Tangentialkomponenten in ihrer Wirkung auf Φ zu untersuchen. Überraschend läßt sich zeigen, daß im Fall einer Kugel $\Phi = \kappa$ dieses momentan auf κ induzierte Tangentenfeld als Richtungsfeld einer stetigen eingliedrigen Kollineationsgruppe des projektiv abgeschlossenen euklidischen Ausgangsraumes, die κ invariant läßt, interpretiert werden kann. In einem zweiten Teil werden wir uns dem "Abdruck" spezieller räumlicher Zwangläufe auf einer rastfesten Kugel zuwenden. Weiter werden wir die im ersten Teil vorgestellten Ergebnisse mit Methoden der Liegruppen analysieren, wodurch es gelingt, diese induzierte Abbildung als eine Kollineation zwischen den reellen projektiven Räumen über den Liealgebren der Bewegungsgruppen des euklidischen Dreiraumes und des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes (vom Index 1) zu beschreiben.

Analoge Untersuchungen scheinen bislang unbekannt zu sein. Bloß für den Fall, daß Φ eine Ebene ist, läßt sich ein vom Autor in [5] bzw. [6] angegebenes Resultat auf obigen Fall anwenden. Dann gilt unter Beachtung von [5, S.12]: Das in der Ebene Φ induzierte innere Tangentenfeld ist zu jedem Zeitpunkt eines C^1 -Zwanglaufs i.a. das einer Drehung in Φ , wobei das Drehzentrum in den Nullpunkt von Φ bezüglich des Gewindes der momentanen Bahnnormalen der Zwanglaufbahnen fällt.

1. Im dreidimensionalen euklidischen Raum E_3 *) werden wir Punkte bezüglich eines kartesischen Normalkoordinatensystems $\{O, x, y, z\}$ durch Ortsvektoren $\vec{x} = (x, y, z)^t$ darstellen. Gegeben sei nun eine Kugel κ vom Radius $R \neq 0$, die in der Normalform

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \text{bzw.} \quad \vec{x} \cdot \vec{x} = R^2$$

vorliege. Betrachten wir einen räumlichen Zwanglauf der Differentiationsklasse C^1 , so wird jedem Punkt P der rastfesten Kugel κ zu einem fest gewählten Zeitpunkt t_0 vermöge der infinitesimalen Transformation

*) E_3 wird im Bedarfsfall stets projektiv abgeschlossen und komplex erweitert vorausgesetzt.

$$(2) \quad \dot{\vec{x}} \rightarrow \dot{\vec{x}} = \vec{d} + \vec{m} \times \vec{x}$$

(\vec{d} und \vec{m} sind Vektoren mit Komponenten d_1, d_2, d_3 bzw. $m_1, m_2, m_3 \in R$) der momentane Bahntangentenvektor $\dot{\vec{x}}$ zugewiesen^{**}). Wir wollen die von dieser infinitesimalen Transformation im Sinne der inneren Geometrie auf κ induzierte Transformation untersuchen.

Dazu haben wir den Tangentenvektor $\dot{\vec{x}}$ für Punkte \vec{x} von κ in Normal- und Tangentialkomponente zu zerlegen:

Die Normalkomponente besitzt (der Kugelmittelpunkt M liegt in O) die Richtung \vec{x} , die Tangentialkomponente bezeichnen wir mit \vec{t} . Dann gilt

$$(3) \quad \dot{\vec{x}} = t + \lambda \vec{x},$$

wobei $\lambda = \lambda(\vec{x})$ so zu wählen ist, daß $\vec{t} \cdot \vec{x} = 0$ gilt. Wir erhalten damit für Punkte der Kugel κ

$$(4) \quad \vec{t} = \dot{\vec{x}} - \vec{x} \frac{\dot{\vec{x}} \cdot \vec{x}}{R^2}.$$

Einsetzen liefert unter Verwendung der Beziehung (3)

$$(5) \quad \vec{t} = \vec{d} - \vec{x} \frac{\vec{d} \cdot \vec{x}}{R^2} + \vec{m} \times \vec{x}.$$

Das im Sinne der inneren Geometrie auf κ von der infinitesimalen Transformation induzierte Vektorfeld hängt daher bei $\vec{d} \cdot \vec{x} \neq 0$ quadratisch vom Kugelpunkt \vec{x} ab. Überraschend läßt sich nun aber folgender Satz beweisen:

Satz 1: Das im Sinne der inneren Geometrie einer Kugel κ von der infinitesimalen Transformation eines räumlichen Zwanglaufes auf κ induzierte Tangentenfeld stimmt auf κ stets mit dem Tangentenfeld der infinitesimalen Transformation einer stetigen eingliedrigen Gruppe projektiver Kollineationen überein, die κ invariant läßt.

Bemerkungen: a) Wird κ im projektiv abgeschlossenen Anschauungsraum als Absolutquadrik einer Cayley-Kleinschen Geometrie (vgl. O. GIERING [3, S.137]) aufgefaßt, so ist obige projektive Kollineation als Bewegung im entsprechenden hyperbolischen Raum (vom Index 1) zu interpretieren.

b) Satz 1 gilt auch für die Momentanbewegungen von äquiformen Zwangläufen: Zur infinitesimalen Transformation (2) kommt ja bloß ein additiver Term "momentaner Ähnlichkeitsfaktor $\cdot \vec{x}$ ", der in Richtung des Kugelmittelpunktes zeigt und daher für die Tangentialkomponente (5) keinen Anteil liefert.

^{**}) Von einem momentanen Stillstand $m_1 = m_2 = m_3 = d_1 = d_2 = d_3 = 0$ wollen wir absehen.

Beweis des Satzes 1:

Formel (5) hat in Koordinatenschreibweise die Gestalt

$$(6) \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} - \frac{d_1 x + d_2 y + d_3 z}{R^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m_3 y + m_2 z \\ m_3 x - m_1 z \\ -m_2 x + m_1 y \end{pmatrix}.$$

Wir versuchen nun, die infinitesimale Transformation einer κ invariant lassenden C^1 -Kollineationsgruppe so zu konstruieren, daß \vec{t} (6) als Tangentenvektor der inhomogenen Darstellung der Bahnkurven der Punkte der Kugel κ auftritt. Wir verwenden dazu vorerst homogene Koordinaten $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 : x : y : z$ zur Beschreibung der Punkte. Die Bahnkurven bei der eingliedrigen stetigen Kollineationsgruppe werden dann durch

$$(7) \quad (x_0(t), x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \quad (t \in \mathbb{R})$$

beschrieben, wobei die $x_i(t)$ geeignete lineare Formen in den Koordinaten $y_0 : y_1 : y_2 : y_3$ der jeweiligen Ausgangspunkte sind. Für $t=0$ können wir o.B.d.A. $x_i(0) := y_i$ ($i = 0 \dots 3$) voraussetzen. Für die zugehörige inhomogene Darstellung der Bahnen gilt außerhalb der Fernebene des euklidischen Teiles

$$(8) \quad x(t) = \frac{x_1(t)}{x_0(t)}, \quad y(t) = \frac{x_2(t)}{x_0(t)}, \quad z(t) = \frac{x_3(t)}{x_0(t)},$$

woraus wir für den (euklidischen) Bahntangentenvektor dieser Bahnkurven an der Stelle $t=0$

$$(9) \quad \begin{aligned} \dot{x}(0) &= \frac{\dot{x}_1(0)y_0 - \dot{x}_0(0)y_1}{y_0^2}, & \dot{y}(0) &= \frac{\dot{x}_2(0)y_0 - \dot{x}_0(0)y_2}{y_0^2}, \\ \dot{z}(0) &= \frac{\dot{x}_3(0)y_0 - \dot{x}_0(0)y_3}{y_0^2} \end{aligned}$$

gewinnen. Dabei sind die Terme $\dot{x}_i(0)$ ($i = 0 \dots 3$) linearen Formen in den Ausgangskordinaten $y_0 : y_1 : y_2 : y_3$. Vergleichen wir die homogene Version des Tangentenvektors (6) mit (9), so zeigt sich für alle Punkte der Kugel κ Übereinstimmung, wenn wir etwa

$$(10) \quad \begin{aligned} \dot{x}_0(0) &= \frac{1}{R^2}(d_1 y_1 + d_2 y_2 + d_3 y_3), \\ \dot{x}_1(0) &= d_1 y_0 - m_3 y_2 + m_2 y_3, \\ \dot{x}_2(0) &= d_2 y_0 + m_3 y_1 - m_1 y_3, \\ \dot{x}_3(0) &= d_3 y_0 - m_2 y_1 + m_1 y_2 \end{aligned}$$

setzen. (10) stellt die Abbildungsgleichungen der infinitesimalen Transformation einer stetigen eingliedrigen Kollineationsgruppe des projektiv abgeschlossenen Raumes E_3 dar; bei inhomogener Beschreibung der Bahnkurven stimmen für Punkte der Kugel κ der zugehörige Tangentenvektor und der auf κ vom euklidischen Zwanglauf induzierte innere Tangentenvektor (5) überein! Die durch (10) bestimmte eingliedrige stetige

Kollineationsgruppe läßt κ invariant, da mit (10)
 $R^2 x_0(0)\dot{x}_0(0) - x_1(0)\dot{x}_1(0) - x_2(0)\dot{x}_2(0) - x_3(0)\dot{x}_3(0) = 0$ gilt. Dies beendet den Beweis des Satzes 1.

2. Eine gute Möglichkeit, sich einen Überblick über die Geometrie der induzierten Kollineationsgruppen zu verschaffen, liefert folgender Sachverhalt: Betrachten wir die Wirkung einer reellen projektiven Autokollineation von κ auf die Punkte von κ : Sie erscheint bei stereographischer Projektion aus einem Punkt Z von κ in eine zu $[MZ]$ orthogonale (Z nicht enthaltende) Ebene π als MÖBIUS-Transformation in π (vgl. O. GIERING [3, S.372 f.]). Nun besitzt so eine reelle projektive Autokollineation von κ auf κ entweder genau 1 reellen Fixpunkt (es liegt momentan eine *Grenzdrehung* vor) oder 4 Fixpunkte, von denen zwei reell sind. Die beiden anderen sind konjugiert komplex und gehören der reziproken Polaren der Verbindung der ersten bezüglich der Kugel κ an. Legen wir unser Projektionszentrum Z in einen dieser stets existierenden reellen Fixpunkte, so entsteht im Bild π sogar eine euklidische Ähnlichkeit. Umgekehrt induziert jede Ähnlichkeit in π nach "inverser stereographischer Projektion" auf κ eine projektive Autokollineation, die sich zu einer projektiven Kollineation des Gesamtraumes fortsetzen läßt.

Durch eine Drehung des Rastsystems bringen wir einen dieser stets reell existierenden Fixpunkte F_1 in den Punkt $(0,0,R)$. Beim euklidischen Ausgangszwanglauf ist er dann entweder ebenfalls Fixpunkt (es liegt eine *Momentandrehung* bzw. *Momentanschiebung* vor), oder seine Bahntangente weist zum Kugelmittelpunkt. Die infinitesimalen Transformationen

(2), die $F_1(\vec{f}_1)$ einen Tangentenvektor der Richtung $\overrightarrow{OF_1}$ zuweisen, sind durch

$$(11) \quad d_1 = -Rm_2, d_2 = Rm_1$$

gekennzeichnet.

Nun projizieren wir die Punkte \vec{x} aus dem Punkt $F_1 = Z$ stereographisch in die Ebene $\pi \dots z = 0$. Der Bildpunkt besitzt den Ortsvektor

$$(12) \quad \vec{x}^{st} = \begin{pmatrix} \frac{Rx}{R-z} \\ \frac{Ry}{R-z} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In π werden wir x und y -Koordinaten als Bildkoordinaten (ξ, η) verwenden. Dann gilt für den Bildpunkt

$$(13) \quad \xi(\vec{x}) = \frac{Rx}{R-z}, \quad \eta(\vec{x}) = \frac{Ry}{R-z}.$$

Da es etwas aufwendiger ist, den "Ableitungspunkt" $\vec{x} + \vec{t}$ oder den Fernpunkt der "inneren Tangente" abzubilden, bestimmen wir den Verschwindungspunkt der "inneren Tangente": Es handelt sich um den Schnittpunkt mit der Tangentialebene $z = R$ der Kugel in $Z = F_1$: Sein Ortsvektor berechnet sich zu

$$(14) \quad \vec{v} = \vec{x} + \frac{R-z}{t_3} \vec{t}.$$

Abkürzend setzen wir nun in (6) $\vec{t} := (t_1, t_2, t_3)^t$. Bei unserer stereographischen Projektion aus $F_1 = Z$ wird dieser Punkt auf einen Fernpunkt von π der Richtung

$$(15) \quad \xi_t^*(\vec{x}) = t_3 x + t_1(R-z), \eta_t^*(\vec{x}) = t_3 y + t_2(R-z)$$

abgebildet. Einsetzen aus (6) liefert

$$(16) \quad \begin{aligned} \xi_t^*(\vec{x}) &= \left(1 - \frac{z}{R}\right) [d_3 x - Rm_3 y - Rm_2(R-z)] \\ \eta_t^*(\vec{x}) &= \left(1 - \frac{z}{R}\right) [Rm_3 x + d_3 y + Rm_1(R-z)], \end{aligned}$$

woraus wir als Tangentenrichtung in π

$$(17) \quad \begin{aligned} \xi_t(\vec{x}) &= R[d_3 x - Rm_3 y - Rm_2(R-z)] : (R-z) \\ \eta_t(\vec{x}) &= R[Rm_3 x + d_3 y + Rm_1(R-z)] : (R-z) \end{aligned}$$

und unter Verwendung der Formel (13) schließlich

$$(18) \quad \begin{aligned} \xi_t &= -R^2 m_2 + d_3 \xi - Rm_3 \eta \\ \eta_t &= R^2 m_1 + Rm_3 \xi + d_3 \eta, \end{aligned}$$

gewinnen. Dies ist in Übereinstimmung mit Satz 1 die infinitesimale Transformation $(\xi, \eta) \rightarrow (\xi_t, \eta_t)$ einer stetigen eingliedrigen Ähnlichkeitsgruppe in π . Es handelt sich dabei i.a. um eine eingliedrige Spiraltungsgruppe in π , deren Pol Q^{st} in den Punkt mit den Koordinaten

$$(19) \quad \xi_{Fix} = \frac{R^2(m_2 d_3 - Rm_1 m_3)}{R^2 m_3^2 + d_3^2}, \quad \eta_{Fix} = \frac{-R^2(m_1 d_3 + Rm_2 m_3)}{R^2 m_3^2 + d_3^2}$$

fällt. Q^{st} ist stereographisches Bild jenes Punktes $Q=F_2$ der Kugel κ , der als zweiter reeller Kugelpunkt mit Bahntangente durch die Kugelmittle aufzufassen ist. Für $R^2 m_3^2 + d_3^2 = 0$ liegt dieser zweite Fixpunkt (19) in einem Fernpunkt von π . Die infinitesimale Transformation (18) definiert eine eingliedrige Schiebungsgruppe.

Bemerkungen: 1) Die beiden anderen auf der Kugel κ auftretenden Fixpunkte liegen nach unseren Überlegungen dann im Schnitt der reziproken Polaren zu $[F_1, F_2]$ bezüglich der Kugel κ mit κ .

2) In Abschnitt 3 wird eine einfache konstruktive Bestimmung dieser reellen Fixpunkte für den allgemeinen Fall vorgeführt.

Nun untersuchen wir die Auswirkung verschiedener euklidischer Momentanbewegungen auf der Kugel:

1) Momentandrehungen und Momentanschiebungen

A) In (19) kann der Nenner $R^2 m_3^2 + d_3^2 = 0$ sein. Das ist bei $R \neq 0$ genau für $d_3 = m_3 = 0$ der Fall. Die räumliche infinitesimale Transformation (2) erzeugt dann i.a. eine eingliedrige stetige Drehungsgruppe, deren Drehachse a die Kugel κ in $Z = F_1$ berührt (gilt zusätzlich $m_1 = m_2 = 0$, so liegt im Raum sogar eine eingliedrige Schiebungsgruppe vor - siehe Sonderfall C). Das induzierte innere Tangentenfeld auf κ erzeugt nach unserer stereographischen Projektion (wie oben bereits erwähnt) eine Schiebungsgruppe in Richtung $(-m_2, m_1)^t$. Auf κ gehört das innere Tangentenfeld bei $m_1^2 + m_2^2 \neq 0$ zu einer *hyperbolischen Grenzdrehung um die Achse a* . Abbildung 1 zeigt diesen Fall mit einigen Integralkurven des auf κ induzierten Tangentenfeldes. Dabei wurden $R = 10$, $(m_1, m_2, m_3) = (1, 0, 0)$ sowie $(d_1, d_2, d_3) = (0, 10, 0)$ gewählt.

Abbildung 1

B) Gilt $d_3 = 0$, $m_3 \neq 0$, so stellt (18) in π die infinitesimale Transformation einer stetigen eingliedrigen Drehungsgruppe mit Drehzentrum $Q^{st} \dots \left(-\frac{Rm_1}{m_3}, -\frac{Rm_2}{m_3}\right)$ dar. Die räumliche infinitesimale Transformation (2) ist dann die einer stetigen Drehungsgruppe um die Achse $a = [Z = F_1, Q^{st}]$. Das auf κ induzierte innere Tangentenfeld gehört zu einer stetigen eingliedrigen Drehungsgruppe um die Achse a des hyperbolischen Raumes mit Absolutquadrik κ .

Insgesamt induzieren daher Drehungsgruppen des Ausgangsraumes auf κ wieder Drehungsgruppen (allerdings im Sinne der auf κ gegründeten Cayley-Kleinschen Geometrie).

Abbildung 2 zeigt diesen Fall mit einigen Integralkurven auf κ . Dabei wurden $R = 10$, $(m_1, m_2, m_3) = (-1, 0, 0)$, $(d_1, d_2, d_3) = (0, 10, 0)$ gewählt.

Abbildung 2

C) Falls im E_3 eine eingliedrige Schiebungsgruppe vorliegt, gilt $m_1 = m_2 = m_3 = 0$. Aus (18) lesen wir ab, daß dann in π i.a. eine eingliedrige stetige Gruppe zentrischer Ähnlichkeiten mit dem Pol Q^{st} induziert wird. Auf der Kugel κ liegt dann eine Drehungsgruppe um die zu $[F_1, F_2]$ bezüglich κ reziproke Polare als Drehachse vor.

2. Momentanschraubungen:

Liegt im Ausgangsraum eine *Schraubung* vor, so gilt für die infinitesimale Transformation (2) mit (11): $d_3 m_3 \neq 0$. Die dadurch auf κ induzierte Transformationsgruppe ist dann im Sinne der auf κ gegründeten Cayley-Kleinschen Geometrie als Schraubung anzusprechen. Die

dabei auftretenden W-Kurven hat U. PINKALL in den beiden Arbeiten [4] untersucht. Die Typenvielfalt ist etwas geringer als jene des elliptischen Raumes, in dem Untersuchungen von K. STRUBECKER [7] vorliegen.

Wenn wir die Bewegungsgruppe B_6 des hyperbolischen Raumes mit κ als Absolutquadrik einsetzen, können wir die beiden Fixpunkte F_1 und F_2 in die Punkte $(0,0,R)$ bzw. $(0,0,-R)$ transformieren. Für Normalformen im Sinne der hyperbolischen Geometrie dürfen wir daher in (11) mit (19) auch noch $m_2 d_3 = R m_1 m_3$ und $m_1 d_3 + R m_2 m_3 = 0$ setzen. Da $m_3 d_3 R \neq 0$ ist, gilt dann $m_1 = m_2 = 0$. Für unsere "hyperbolische Normalform" dürfen wir daher annehmen, daß die infinitesimale Transformation (2) des Ausgangsraumes eine eingliedrige stetige Schraubungsgruppe um die z-Achse als Achse erzeugt. Dann können wir noch $m_3 = 1$ normieren und $d_3 = p \in R \setminus \{0\}$ setzen. Abbildung 3 zeigt einige der Integralkurven des auf κ induzierten Tangentenfeldes für $R=10$, $(m_1, m_2, m_3) = (0, 0, 1)$, $(d_1, d_2, d_3) = (0, 0, 5)$.

Abbildung 3

Abbildung 4 zeigt schließlich diesen Fall in allgemeiner Lage: $R=10$, $(m_1, m_2, m_3) = (-1, 0, 1)$ und $(d_1, d_2, d_3) = (0, -10, 5)$. (Mit Hilfe einer hyperbolischen Bewegung ließe sich eine Situation erreichen, die mit Abbildung 3 vergleichbar ist.) Ein ähnliches Bild findet sich bei U. PINKALL [4], der W-Kurven der ebenen Lie-Geometrien studiert.

Abbildung 4

3. Abschließend sei noch ein konstruktiver Weg zur Ermittlung der auf der Kugel κ befindlichen Fixpunkte F_1, F_2, F_3, F_4 angegeben: Wenn der Mittelpunkt von κ auf der Momentanschraubachse a liegt oder eine Momentandrehung bzw. Momentanschiebung vorliegt, ist keine besondere Konstruktion erforderlich. Sehen wir von diesen trivialen Fällen ab, können wir durch einen Koordinatenwechsel im Rastraum erreichen, daß die Momentanschraubachse a in die z-Achse fällt, und der Mittelpunkt unserer Kugel die Koordinaten $(m, 0, 0)$ ($m \neq 0$) erhält. Die infinitesimale Transformation (2) schreibt sich dann in der Form

$$(20) \quad \vec{x} = (x, y, z)^t \longrightarrow \dot{\vec{x}} = (-y, x, p) \quad (p \neq 0),$$

wobei p den Schraubparameter bezeichnet. Die Kugel κ besitzt die Gleichung

$$(21) \quad (x - m)^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Das Lot aus M auf die Schraubachse bezeichnen wir mit n (hier = x-Achse). Punkte des E_3 mit momentanen Bahntangenten durch M (nur sie kommen ja als Fixpunkte der Kollineationsgruppe auf der Kugel in Frage) werden durch Parallelität der beiden Vektoren

$$(22) \quad \dot{\vec{x}} = (-y, x, p)^t \quad \text{und} \quad (x - m, y, z)^t$$

gekennzeichnet. Die entsprechenden Punkte liegen daher im von a verschiedenen Schnitt des Drehzylinders

$$(23) \quad \Delta \dots x(x-m) + y^2 = 0$$

und des hyperbolischen Paraboloides

$$(24) \quad \Phi \dots py = xz.$$

Dieser Restschnitt ist i.a. ein aufrechter kubischer Kreis c mit a als Asymptotenrichtung. Die von den absoluten Punkten der M enthaltenden Normalebene zur Achse a verschiedenen Schnittpunkte von c mit κ sind die gesuchten Punkte F_1, F_2, F_3, F_4 .

Wir stellen fest (vgl. Abbildung 5):

- a) Die Bahntangenten der Punkte von n erfüllen genau das hyperbolische Paraboloid (24).
- b) Wenn ein Punkt $F_1 \in \kappa \cap c$ mit Bahnschraubtangente durch M gefunden ist, besitzt wegen der Symmetrie der Verteilung der Bahnschraubtangenten auch der aus F_1 durch Spiegelung an n hervorgehende Punkt diese Eigenschaft - F_2 wäre gefunden. Analog läßt sich aus F_3 der Punkt F_4 gewinnen. Die Fußpunkte der beiden Spiegelungsgeraden $v := [F_1, F_2]$ und $w := [F_3, F_4]$ auf n bezeichnen wir mit V und W . v und w sind nach a) Bahntangenten der Punkte V und W bei der Momentanschraubung.
- c) Aus Abschnitt 2 entnehmen wir, daß die beiden Geraden v und w reziproke Polaren bezüglich der Kugel κ sind und daher zueinander normal stehen. Das Problem der Bestimmung der Fixpunkte F_1, F_2, F_3, F_4 läuft daher auf die Ermittlung jener Punkte V und W auf dem Lot n hinaus, die einerseits konjugiert bezüglich der Kugel κ sind, und andererseits zueinander normale Bahntangenten besitzen.
- d) Bezüglich κ konjugierte Punkte von n entsprechen sich in einer (hyperbolischen) Involution mit Fixpunkten in $n \cap \kappa$. Punkte von n mit zueinander normalen Bahntangenten entsprechen sich nach (20) ebenfalls in einer - diesmal elliptischen - Involution: Ein LAGUERRE-Vertreter ihrer Fixpunkte ist etwa der auf der Schraubachse a gelegene Punkt $L(p, 0, 0)$, der vom Lotfußpunkt $n \cap a$ den Abstand p besitzt.
- e) V und W sind damit ganz einfach als gemeinsame Punkte der oben genannten Involutionen zu konstruieren.

Abbildung 5 zeigt die elementare Bestimmung von V und W . Die gesuchten Fixpunkte befinden sich im Schnitt der Kugel mit den Bahntangenten v und w dieser Punkte- bloß zwei davon können allerdings reell ausfallen.

Abbildung 5

Literatur:

- [1] BENZ, W.: Vorlesungen über Geometrie der Algebren.
Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1973.
- [2] BOTTEMA, O. und ROTH B.: Theoretical Kinematics.
North Holland, Amsterdam 1979.
- [3] GIERING O.: Vorlesungen über höhere Geometrie.
Vieweg, Braunschweig-Wiesbaden 1982.
- [4] PINKALL, U.: W-Kurven in der ebenen Lie- Geometrie I, II. Elem. Math. 39,
28 - 33 und 67 - 78 (1984).
- [5] RÖSCHEL O.: Ebene Schattengrenzen auf euklidischen Dreh- und Schraubflächen.
RAD JAZU 408, 7 - 15 (1984).
- [6] RÖSCHEL O.: Ebene Schattengrenzen auf Flächen mit besonderer projektiv-
kinematischer Erzeugung.
Sber. Österr. Akad. Wiss., math.-nat. Kl. 192, 423-432 (1983).
- [7] STRUBECKER, K.: Über nichteuklidische Schraubungen.
Monatsh. Math. u. Phys. 38, 63 - 84 (1931).

Anschrift des Autors:

O. RÖSCHEL,
Technische Universität Graz,
Institut für Geometrie,
Kopernikusgasse 24
A-8010 Graz

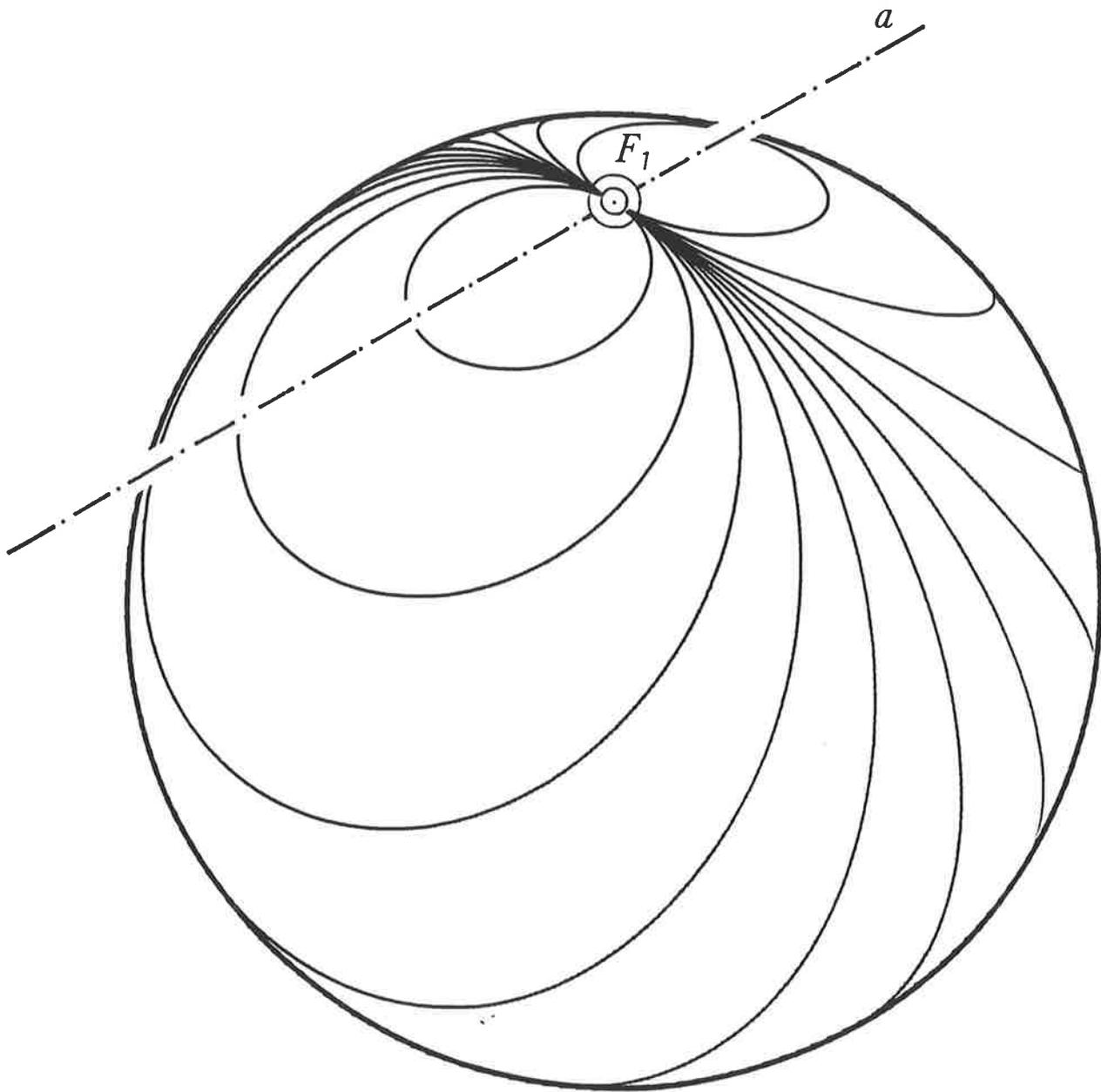


Abbildung 1

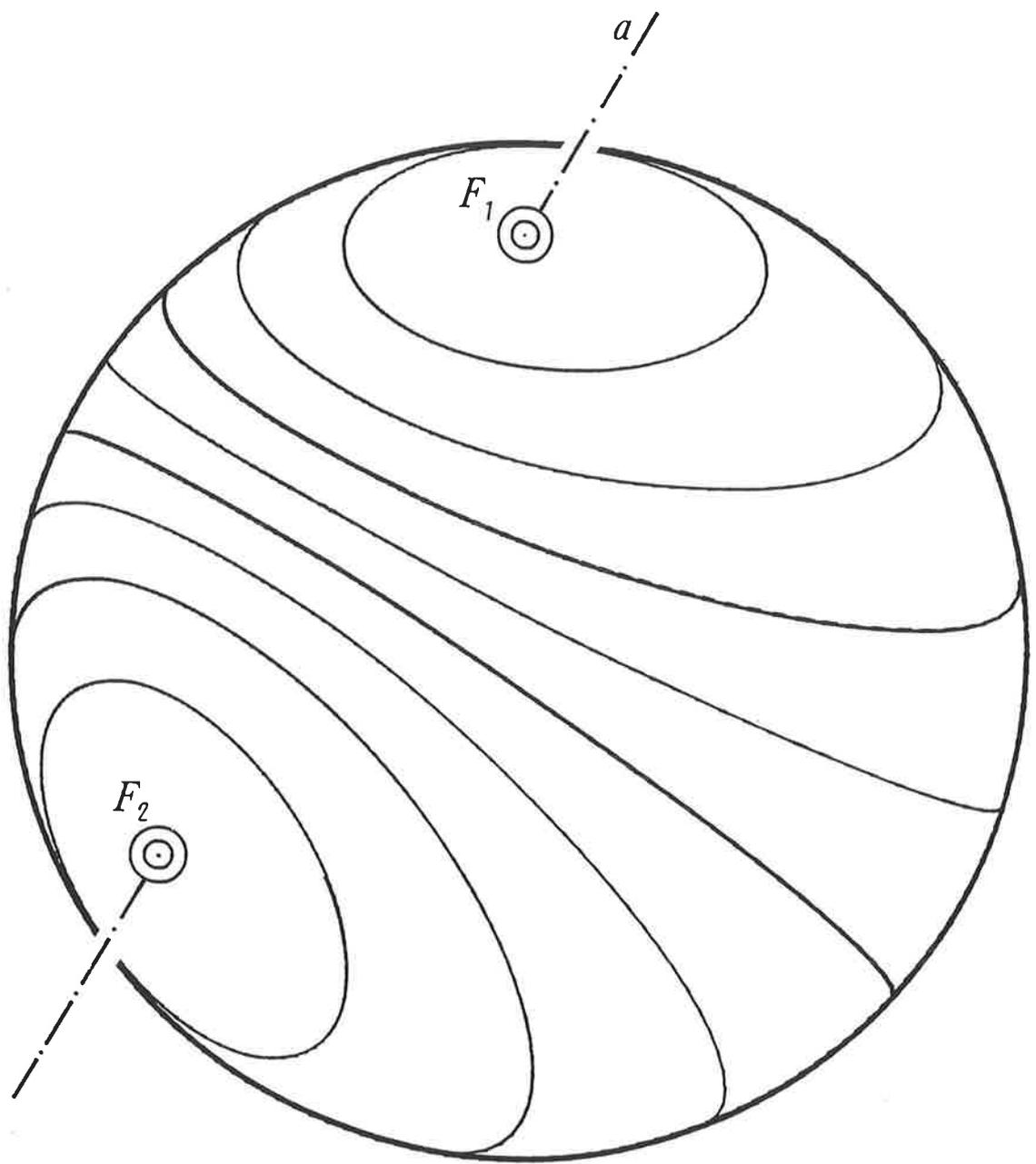


Abbildung 2

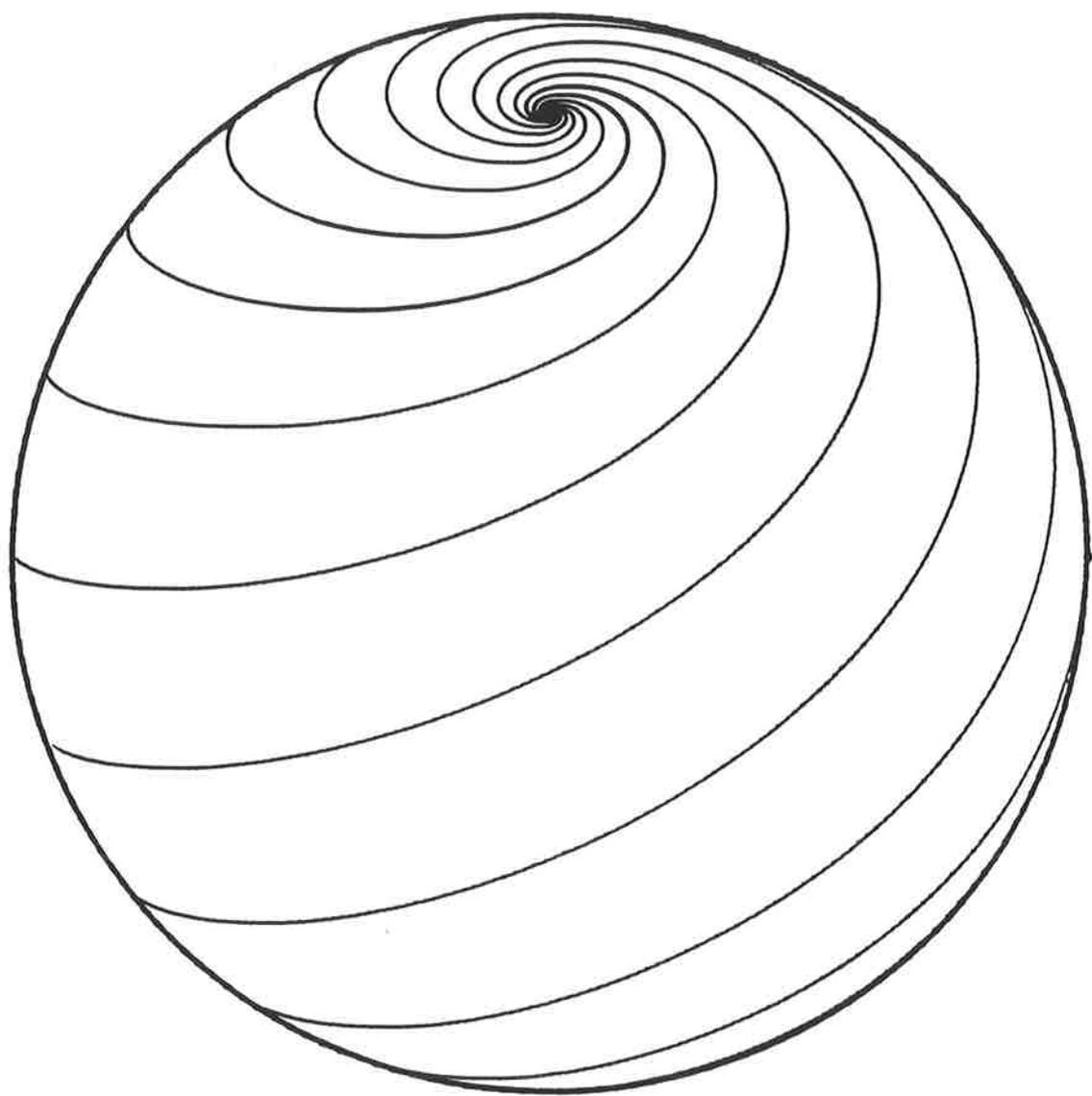


Abbildung 3

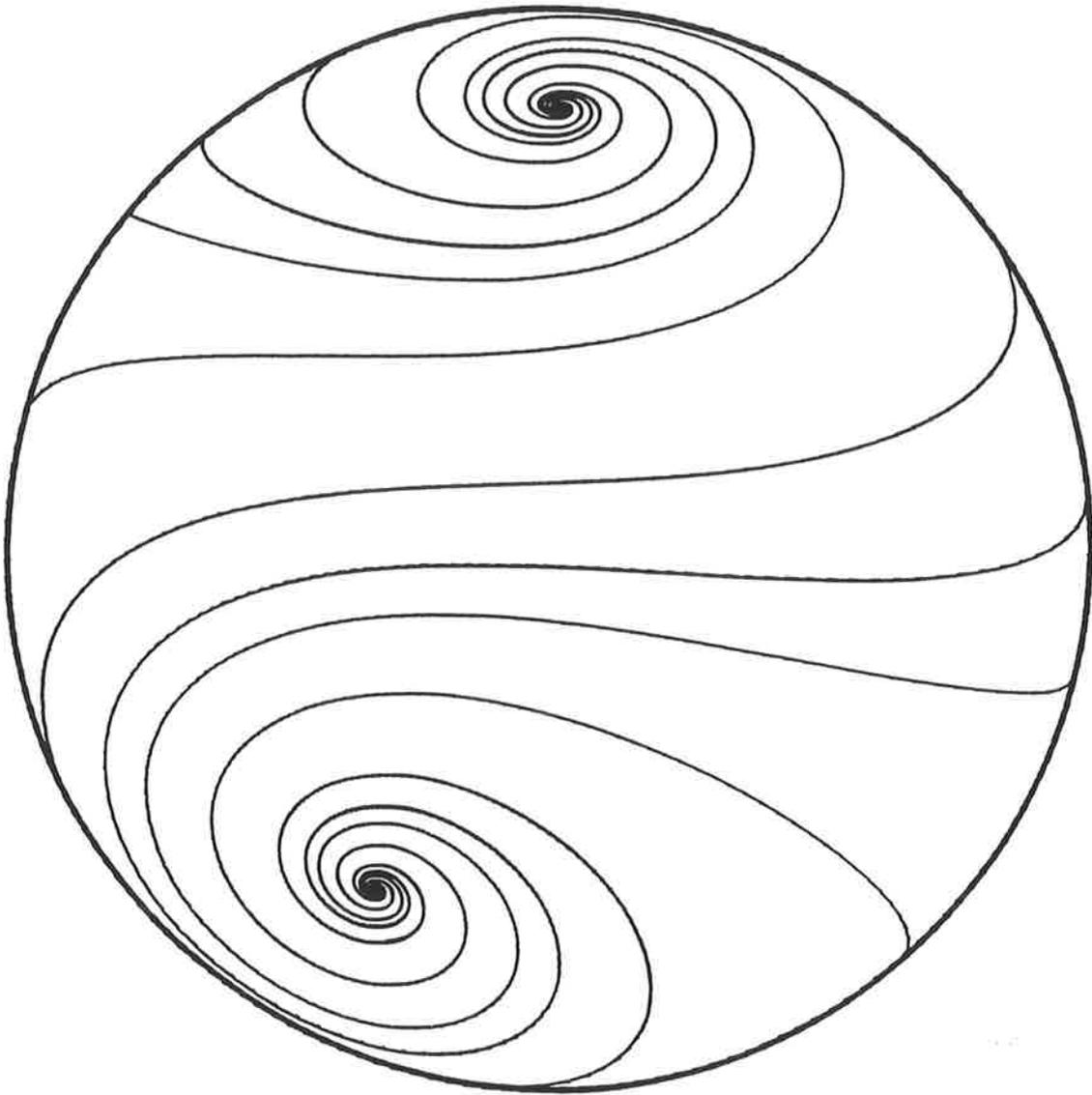


Abbildung 4

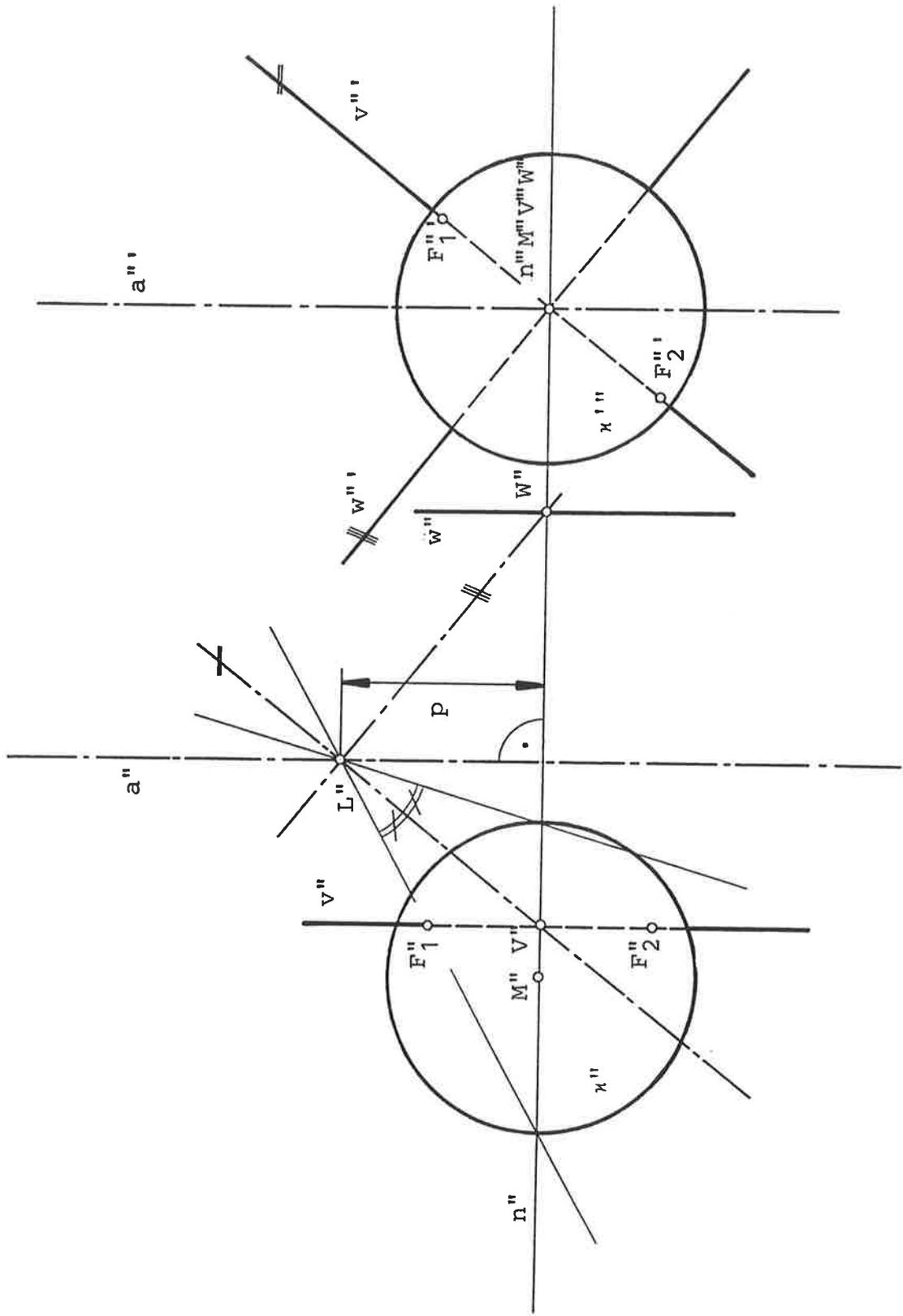


Abbildung 5