RÄUMLICHE ZWANGLÄUFE MIT EINER ZWEIPARAMETRIGEN SCHAR EBENER BAHNKURVEN II

von

Otto Röschel (Leoben)

In [24] ist es gelungen, alle räumlichen Zwangläufe Σ/Σ' mit einer zweiparametrigen Schar ebener Bahnkurven anzugeben. In dieser Note sollen insbesondere die darunter befindlichen *symmetrischen Schrotungen*, die *Umkehrbewegungen* dieser Zwangläufe und jene ausgezeichnete Klasse von Bewegungsvorgängen eingehend studiert werden, bei der sowohl der Ausgangszwanglauf als auch die Umkehrbewegung eine *zweiparametrige Schar ebener Bahnkurven* besitzt . Hierbei wird die Bezeichnungsweise von [24] beibehalten, und die Numerierung lückenlos fortgesetzt.

3. Symmetrische Schrotungen mit einer zweiparametrigen Schar ebener Bahnkurven

Die durch (20), (29) und (34) gegebenen Zwangläufe Σ/Σ' mit einer zweiparametrigen Schar ebener Bahnkurven lassen sich in der Normalform durch

$$\begin{aligned} x'(t) &= x \cos t - y \sin t \\ y'(t) &= x \sin t + y \cos t + A(1 - \cos t) + B f(t) \\ z'(t) &= z + C \sin t + D(1 - \cos t) + E f(t) \end{aligned} \qquad (36)$$

mit einer willkürlichen Funktion $f(t)$ der Klasse C^3 erfassen ($A,B,C,D,E \in \mathbb{R}$, $t \in (-\infty,+\infty)$). Dem Zwanglauf (36) ist die *Grundrißbewegung* σ/σ'

$$\begin{aligned} x'(t) &= x \cos t - y \sin t \\ y'(t) &= x \sin t + y \cos t + A(1 - \cos t) + Bf(t) \end{aligned} \tag{37}$$

zugeordnet, bei der ersichtlich der Punkt U (0,0) der Gangebene σ entweder auf der y' - Achse gleitet oder Fixpunkt ist ($A(1-\cos t) \equiv -Bf(t)$). In einer Reihe bemerkenswerter Arbeiten hat J. KRAMES (vgl. [6], [7], [19], [20], [21], [22] und [23]) sogenannte *symmetrische räumliche Zwangläufe* untersucht: Man gelangt zu diesen Bewegungen, indem man das Rastsystem Σ' an einer stetigen Schar von Geraden g' spiegelt; die so gewonnene stetige Schar gleichsinnig kongruenter Spiegelbilder definiert einen eindeutigen Zwanglauf, der *symmetrisch* genannt wird (vgl. auch [1, S. 317 f.]). Unter den Zylinderschrotungen (36) sind genau jene *symmetrisch*, deren Grundrißzwanglauf σ/σ' eine *ebene symmetrische Rollung* ist. Diese Zwangläufe σ/σ' sind dadurch gekennzeichnet, daß das *Polkurvenpaar* p, p' kongruent ist und sich stets durch Spiegelung an der momentanen Wälztangente ineinander überführen läßt. Insbesondere gilt, daß sich jede Bahnkurve der symmetrischen Rollung σ/σ' durch fortgesetzte Spiegelung eines in σ' festen Punktes P^* an den Tangenten der Rastpolkurve p' gewinnen läßt (vgl. R. BEREIS [18]).

Ist der Punkt U der Gangebene σ bei (37) *Fixpunkt* - was durch $A(1 - \cos t) + Bf(t) = 0 \ \forall \ t \in (-\infty,+\infty)$ gekennzeichnet ist -, so liegt in (36) eine *Umschwungbewegung* um die feste z' - Achse vor, die im weitesten Sinne auch als symmetrische Zylinderschrotung aufzufassen ist - die Henkelpunktsfläche X^* wird entweder zum Minimalebenenpaar durch die z - Achse oder umfaßt den ganzen Gangraum Σ. Letzteres tritt genau für $f(t) = K(1 - \cos t) + L \sin t$ $(K, L =$ konst. $\in \mathbb{R})$ und $A(1 - \cos t) + Bf(t) = 0$ ein; Σ/Σ' ist entweder eine *Drehung* um die feste $z' = z$ - Achse oder ein *vollkommen steiler DARBOUX'scher Umschwung* (vgl. [1, S.321]).

Ist der Punkt U der Gangebene σ bei (37) *kein Fixpunkt* - was durch $A(1 - \cos t) + Bf(t) \neq 0$ gekennzeichnet ist -, so gleitet er auf der y' - Achse. Der Zwanglauf σ/σ' ist nach obigem offensichtlich genau dann symmetrisch, wenn es zu U in der Rastebene σ' einen festen Punkt U^* gibt, sodaß die Bahn von U (y' - Achse) durch fortgesetzte Spiegelung von U^* an den Tangenten der Rastpolkurve p' entsteht (vgl. Abbildung 1). Liegt U^* auf der y' - Achse, so sind die Spiegelungsachsen parallel - d.h. σ/σ' wäre eine *Schiebung längs der y' - Achse*; ein Fall, der hier auszuschließen ist.

Abbildung 1

Ist $U^* \notin y'$, so umhüllen die zugehörigen Spiegelungsachsen bekanntlich eine *Parabel p' mit Brennpunkt U^* und Leitlinie* y' (vgl. Abbildung 1), womit σ/σ' als *symmetrische Parabelrollung* erkannt ist (vgl. R. BEREIS [18] bzw. W. WUNDERLICH [17]). In der Normalform kann dieser Zwanglauf durch

$$\begin{aligned} x'(t) &= x \cos t - y \sin t \\ y'(t) &= x \sin t + y \cos t + A \tan \frac{t}{2} \qquad (A = \text{konst.} \in \mathbb{R}) \end{aligned} \tag{38}$$

beschrieben werden. Als z' - Komponenete des zugehörigen räumlichen Zwanglaufs erhalten wir mit (36)

$$z'(t) = z + B \sin t + C(1 - \cos t) + D \tan \frac{t}{2} \qquad (39)$$

$(B, C, D = \text{konst.} \in \mathbb{R})$. Es handelt sich somit im allgemeinen um die von W. WUNDERLICH in [17] ausführlich untersuchten *kubischen symmetrischen Schrotungen* [1]. Wir haben damit den

SATZ 6 : *Unter den räumlichen Zwangläufen Σ/Σ' mit einer zweiparametrigen Schar ebener Bahnkurven sind genau alle Umschwungbewegungen um eine rastfeste Achse und alle kubischen symmetrischen Bewegungsvorgänge symmetrisch.*

4. Umkehrbewegungen der räumlichen Zwangläufe mit einer zweiparametrigen Schar ebener Bahnkurven

Wir schließen vorerst die Umschwungbewegungen um eine rastfeste Achse von unseren Betrachtungen aus und können daher im folgenden in (36)

$$A(1 - \cos t) + Bf(t) = g(t) \neq 0 \qquad (40)$$

setzen. Die Umkehrbewegung Σ'/Σ des Zwanglaufes (36) besitzt dann die Darstellung

$$\begin{aligned} x(t) &= x'\cos t + y \sin t - g(t)\sin t \\ y(t) &= -x'\sin t + y \cos t - g(t)\cos t \qquad (41) \\ z(t) &= z' + \bar{C} \sin t + \bar{D}(1 - \cos t) + \bar{E}g(t) \end{aligned}$$

---

[1] W. WUNDERLICH gibt auch an, daß die zugehörige KRAMES'sche Grundfläche dieser Zwangläufe i.a. eine konoidale Regelfläche vierten Grades ist.

mit $\bar{C},\bar{D},\bar{E}$ = konst. $\in \mathbb{R}$ und einer willkürlichen C^3 - Funktion $g(t)$. Für $g(t) = B \sin t$ ist hier die bekannte MANNHEIM'sche Bewegung enthalten, die als Umkehrbewegung der DARBOUX'schen Bewegungen aufzufassen ist (vgl. [1, S. 310 f.]).[2)]

Da die Punkte der wegen $g(t) \neq 0$ reellen Henkelpunktsfläche X^* beim Ausgangszwanglauf (36) Bahnen in den Ebenen eines Bündels mit einem Fernpunkt S' als Träger durchlaufen, müssen die Ebenen dieses Bündels bei der Umkehrbewegung (41) *Kegel mit Spitzen auf* X^* umhüllen; da es sich bei (41) um eine Zylinderschrotung handelt, sind die Hüllkegel im allgemeinen *Drehkegel*, deren Achsen parallel zur z - Achse verlaufen. Liegen die bewegten Bündelebenen aus Σ' parallel zur z' - Achse, so werden diese Drehkegel zu Drehzylindern, deren Radius unter Umständen verschwindet. Ist der Bündelscheitel S' ein Fernpunkt der $[x',y']$ - Ebene, so werden die zu z' orthogonalen Bündelebenen im allgemeinen nur parallelverschoben.

Von den vorhin ausgeschlossenen Umschwungbewegungen werden bekanntlich genau dann die Ebenen einer zweiparametrigen Schar so geführt, daß sie im allgemeinen Kegel umhüllen, wenn es sich um den *vollkommen steilen DARBOUX'schen Umschwung* handelt, bei dem wie auch bei der allgemeinen MANNHEIM'schen Bewegung alle allgemeinen Ebenen Drehkegel umhüllen. Wir haben damit den

SATZ 7 : *Von den Umkehrbewegungen Σ'/Σ der räumlichen Zwangläufe Σ/Σ' mit einer zweiparametrigen Schar ebener Bahnkurven*

---

2) Für $g(t) = 0$ erhalten wir hier auch den vollkommen steilen DARBOUX'schen Umschwung, der wegen (40) vorerst ausgeschlossen ist. Gilt weiter $\bar{C} \sin t + \bar{D}(1 - \cos t)$ = konst., so liegen Drehungen um die rastfeste z - Achse vor.

werden im allgemeinen genau die Ebenen eines Bündels mit einem Fernpunkt S' als Träger längs Kegeln geführt; es handelt sich dabei im allgemeinen um Drehkegel, deren Spitzen die Henkelpunktsfläche X^* des Ausgangszwanglaufs Σ/Σ' erfüllen. Als Sonderfälle sind dabei die MANNHEIM'schen Bewegungen aufzufassen, bei denen alle Ebenen des Gangraumes im allgemeinen Drehkegel umhüllen.[3)]

Fragt man nun in Analogie zu den Abschnitten 1 und 2 nach allen jenen räumlichen Zwangläufen $\Sigma^*/\Sigma^{*\prime}$, bei denen eine zweiparametrige Schar von Ebenen Kegel als Hüllflächen besitzt, so muß die Umkehrbewegung $\Sigma^{*\prime}/\Sigma^*$ offensichtlich ein Zwanglauf mit einer zweiparametrigen Schar ebener Bahnkurven sein, womit klar ist, daß es sich bei $\Sigma^*/\Sigma^{*\prime}$ nur um die durch (41) beschriebenen Zwangläufe handeln kann, wobei allerdings auf die Einschränkung (40) zu verzichten ist (vgl. Fußnote 3). Man erhält so das überraschende Ergebnis, daß die fraglichen Ebenen des Gangraumes Σ^* im allgemeinen einem Bündel mit einem Fernpunkt als Scheitel angehören, und die Hüllkegel im allgemeinen Drehkegel sind, deren Spitzen entweder einer Ebene oder einem Drehzylinder angehören. Es gilt somit der

SATZ 8 : *Die räumlichen Zwangläufe $\Sigma^*/\Sigma^{*\prime}$, bei denen eine zweiparametrige Schar von Ebenen stets Kegel umhüllt, sind genau die durch (41) erfaßten Umkehrbewegungen von*

[3)] Diese Sonderfälle werden in (41) miterfaßt, wenn auf (40) verzichtet wird.

Zwangläufen $\Sigma^{*\prime}/\Sigma^{*}$ *mit einer zweiparametrigen Schar ebener Bahnkurven. Sieht man von den MANNHEIM'schen Bewegungen ab, so gehören die ausgezeichneten Ebenen einem Bündel mit einem Fernpunkt als Träger an; ihre Hüllkegel sind im allgemeinen Drehkegel, deren Spitzen entweder einem Drehzylinder oder einer Ebene angehören.*[4)]

Neben den MANNHEIM'schen Bewegungen und dem Sonderfall des vollkommen steilen DARBOUX'schen Umschwungs ist noch ein weiteres Beispiel für solche Bewegungsvorgänge bereits bekannt. Es sind dies die von W. WUNDERLICH in [17] studierten *symmetrischen kubischen Zwangläufe*, die sich bereits in Abschnitt 3 als ausgezeichnet erwiesen haben. Sie stellen sich in (41) für

$$g(t) = A \tan \frac{t}{2} \qquad (A = \text{konst.} \in \mathbb{R}-0) \tag{42}$$

ein.

5. Eine ausgezeichnete Klasse von Zwangläufen

Wir wollen hier nach allen jenen räumlichen Zwangläufen Σ/Σ' fragen, die sowohl eine *zweiparametrige Schar ebener*

---

4) Es sei hier besonders darauf hingewiesen, daß die Forderung nach Hüllkegeln wesentlich ist; wäre auch eine zweiparametrige Schar von *Hüllzylindern* zugelassen, so würden wir als Zwanglauf jede beliebige Zylinderschrotung betrachten können, bei der ja in trivialer Weise alle zur gangfesten Richtung parallelen Ebenen im allgemeinen Zylinder umhüllen. Dieser Soderfall ist als Gegenstück zu in den Abschnitten 1 und 2 aufgetretenen Umschwungbewegungen aufzufassen, bei denen stets zwei Minimalebenen in sich bewegt werden.

Bahnkurven besitzen als auch eine *zweiparametrige Schar gangfester Ebenen längs Kegeln* führen. Wir haben in Abschnitt 4 erkannt, daß für solche Zwangläufe Σ/Σ' auch die Umkehrbewegungen Σ'/Σ eine zweiparametrige Schar von ebenen Bahnkurven besitzen müssen, also ebenfalls die geforderten Eigenschaften haben; der Zwanglauf Σ/Σ' ist demnach sowohl von der Bauart (36) als auch (41). Die *Grundrißbewegung* σ/σ' liegt damit offensichtlich fest : Nach Abschnitt 2 existiert ein in σ fester Punkt U, der auf einer Geraden - der y' - Achse - geführt wird oder Fixpunkt ist. Letzteres ist mit (41) nur für den *vollkommen steilen DARBOUX'schen Umschwung* oder *Drehungen um eine rastfeste Achse* möglich. Im anderen Fall muß es, da σ/σ' auch als Umkehrbewegung eines solchen Zwanglaufes aufzufassen ist, eine in σ feste Gerade h geben, die durch einen *rastfesten Stützpunkt* $H' \in \sigma'$ gleitet. Die Grundrißbewegung ist damit der durch die bekannte *Winkelschleife* erzeugbare Zwanglauf (vgl. Abbildung 2).

Abbildung 2

Eine ausführliche Darstellung dieser Winkelschleife gibt W. WUNDERLICH in [16, S. 112 f.] an. Weisen wir o.B.d.A. der Geraden h die Darstellung

$$\mathfrak{x}' = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix} \qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R};\ \gamma^2+\delta^2=1,\ \nu\in(-\infty,+\infty) \quad (43)$$

und dem Stützpunkt H' die Koordinaten (α,β) zu, so kann der

Zwanglauf σ/σ' durch

$$\begin{aligned} x'(t) &= x\cos t - y\sin t \\ y'(t) &= x\sin t + y\cos t + \frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)(1-\cos t)-(\alpha\gamma+\beta\delta)\sin t}{\gamma\cos t - \delta\sin t} \end{aligned} \tag{44}$$

beschrieben werden. Der zugehörige räumliche Zwanglauf Σ/Σ' besitzt die z' - Komponente

$$z'(t) = z + C\sin t + D(1-\cos t) + E\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)(1-\cos t)-(\alpha\gamma+\beta\delta)\sin t}{\gamma\cos t - \delta\sin t} \tag{45}$$

mit reellen Konstanten C, D und E. Führen wir $\tan\frac{t}{2} := u$ als neuen Parameter ein, so erhalten wir (44) und (45) in der Gestalt

$$\begin{aligned} x'(u) &= \frac{x(1-u^2) - 2uy}{1+u^2} \\ y'(u) &= \frac{2ux + y(1-u^2)}{1+u^2} + 2u\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)u - (\alpha\gamma+\beta\delta)}{\gamma(1-u^2) - 2\delta u} \\ z'(u) &= z + 2u\,\frac{C+Du}{1+u^2} + 2Eu\,\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)u - (\alpha\gamma+\beta\delta)}{\gamma(1-u^2) - 2\delta u} . \end{aligned} \tag{46}$$

Die fraglichen Zwangläufe bewegen daher im allgemeinen die Punkte des Gangraumes Σ auf *rationalen Raumkurven vierter Ordnung*, deren Grundrisse im allgemeinen *monozirkulare Quartiken* abgeben, die als Bahnkurven der Winkelschleife (Abbildung 2) angesehen werden können. Die *Achsenzylinder* sind demnach im allgemeinen ebenfalls von vierter Ordnung; ihre Grundrisse hat W. WUNDERLICH in [16, S. 113 f.] ausführlich untersucht. Es ist bemerkenswert, daß die Punkte der im Gangraum Σ stationären Henkelpunktsfläche X^* im allgemeinen ebene Bahnkurven vierter Ordnung durchlaufen, während die Ebenen des ausgezeichneten Bündels Drehkegel umhüllen. Als bemerkenswerte *Sonderformen* sind in (46) enthalten :

(A) *Die symmetrischen Zylinderschrotungen* (38),(39), wobei sich für $\alpha = \beta = 0$ der *vollkommen steile DARBOUX'sche Umschwung* beziehungsweise für $\alpha = \beta = C = D = 0$ die *Drehung um eine rastfeste Achse* einstellt. Die *symmetrischen kubischen Zwangläufe* ergeben sich in (46) für $\alpha = \alpha\delta - \beta\gamma$; die Normalform (38),(39) wird für $\beta = 0$, $\delta = 1$, $\alpha \neq 0$ angenommen. Die Achsenzylinder sind in diesem Fall *parabolische Zylinder*, die Bahnkurven im allgemeinen rationale Kurven dritter Ordnung (vgl. W. WUNDERLICH [17]). Die Grundrißbewegung kann durch eine *symmetrische Winkelschleife* erzeugt werden.[5)]

(B) *Die räumlichen Zwangläufe* (46) mit $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$. Die Grundrißbewegung σ/σ' kann als *einfach geschränkte Winkelschleife* aufgefaßt werden (vgl. W. WUNDERLICH [16, S. 114]); die Bahnkurven sind im allgemeinen rationale Kurven vierter Ordnung - der Rastzylinder ist ein *parabolischer Zylinder*, der Gangzylinder besitzt die Ordnung vier.

(C) *Die Umkehrbewegungen der unter (B) genannten Zwangläufe*, die sich für $\beta = 0$ ergeben.

Wir haben damit den

---

5) Die *kubische Umschwungbewegung* (vgl. W. WUNDERLICH [17]) tritt hier nicht auf, weil wir gefordert haben, daß eine zweiparametrige Schar gangfester Ebenen *Drehkegel* umhüllen soll (vgl. Fußnote 4).

SATZ 9 : *Die räumlichen Zwangläufe* Σ/Σ' *mit einer zweiparametrigen Schar ebener Bahnkurven, bei denen außerdem eine zweiparametrige Schar von gangfesten Ebenen längs Kegeln geführt wird, sind die in der Normalform durch* (46) *erfaßten Bewegungsvorgänge. Diese Zwangläufe führen im allgemeinen die Punkte des Gangraumes auf rationalen Raumkurven vierter Ordnung, während die allgemeinen Ebenen des Gangraumes Torsen vierter Klasse umhüllen. Genau die Punkte der im Gangraum* Σ *stationären Henkelpunktsfläche* X^* *besitzen ebene Bahnen; die Ebenen eines gangfesten Bündels mit einem Fernpunkt als Träger umhüllen im allgemeinen Drehkegel, deren Spitzen den Henkelpunktszylinder beziehungsweise die Henkelpunktsebene* $X^{*'}$ *der Umkehrbewegung* Σ'/Σ *erfüllen. Als Sonderformen treten die symmetrischen kubischen Zwangläufe verschiedenen symmetrischen kubischen Zwangläufe, der vollkommen steile DARBOUX'sche Umschwung und die Drehung um eine rastfeste Achse auf, bei denen die Bahnkurven im allgemeinen rationale Kubiken beziehungsweise Ellipsen oder Kreise sind.*

Es ist damit gelungen, ein weiteres Beispiel für eine Raumbewegung Σ/Σ' anzugeben, bei der alle allgemeinen Punkte des Gangraumes auf *Raumkurven vierter Ordnung* geführt werden. Bekannte Beispiele sind hierzu etwa die von J. KRAMES [21] und[23] angegebenen symmetrischen Schrotungen. Auch eine von J. TÖLKE und E.V.de VASCONCELOS in [25] entdeckte Zylinderschrotung sowie einige von W. KAUTNY [4] angegebenen Umschwungbewegungen sind zu dieser Klasse zu zählen.

Als Beispiel für einen Zwanglauf der Bauart (44),(45) sei der Sonderfall (B) mit der Annahme $D = E = \alpha\delta - \beta\gamma = 0$ eingehender studiert. Er läßt sich durch

$$\begin{aligned} x'(t) &= x \cos t - y \sin t \\ y'(t) &= x \sin t + y \cos t + \frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)\sin t}{\delta \sin t - \gamma \cos t} \\ z'(t) &= z + C \sin t \end{aligned} \tag{47}$$

darstellen. In diesem Fall ist die Henkelpunktsfläche X^* durch $x = 0$ gegeben (vergleiche Abbildung 3); für die Punkte U und $P \in X^*$ sind die (ebenen) rationalen Bahnkurven vierter Ordnung in der Abbildung eingetragen.

Abbildung 3

Die durch

$$\begin{aligned} x(t) &= x' \cos t + y' \sin t - \frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)\sin^2 t}{\delta \sin t - \gamma \cos t} \\ y(t) &= -x' \sin t + y' \cos t - \frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)\sin t \cos t}{\delta \sin t - \gamma \cos t} \\ z(t) &= z' - C \sin t \end{aligned} \tag{48}$$

erfaßte Umkehrbewegung Σ'/Σ besitzt die Henkelpunktsebene $X^{*\prime}$ (17) mit der Gleichung

$$x'\beta - y'\alpha = 0. \tag{49}$$

Da (48) durch Überlagerung eines vollkommen steilen DARBOUX'schen Umschwungs mit einer Schiebung in Richtung der Geraden $x'\beta - y'\alpha = 0,\ z' = 0$ erzeugbar ist, gilt für die Ausgangsbewegung Σ/Σ', daß genau die Ebenen $\varepsilon \subset \Sigma$, die zur Geraden

$x'\beta - y'\alpha = 0$, $z' = 0$ parallel sind, Drehkegel (beziehungsweise Entartungsfälle) umhüllen; die Spitzen dieser Drehkegel gehören der Ebene $X^{*\prime}$ an. In Abbildung 3 wurde einer dieser Hülldrehkegel eingetragen : Mit Hilfe eines Seitenrisses kann jener Punkt $Y \in \Sigma'$ ermittelt werden, dessen Bahn bei der Umkehrbewegung Σ'/Σ in der Ebene ε verläuft; dieser Punkt ist die Spitze des von ε bei Σ/Σ' umhüllten Drehkegels Ψ. Zu bemerken ist noch, daß alle den Punkt U des Gangraumes enthaltenden erstprojizierenden Ebenen im allgemeinen parabolische Zylinder umhüllen; in Abbildung 3 ist der von der Henkelpunktsebene $X^* \subset \Sigma$ umhüllte Zylinder Φ im Grundriß dargestellt.

Literatur

[1] bis [17] sind in [24] zitiert.

[18] BEREIS, R.: Über die symmetrische Rollung. Österr. Ing.Arch. 7, 243 - 246 (1953).

[19] KRAMES, J.: Über die Fußpunktkurven von Regelflächen und eine besondere Klasse von Raumbewegungen (Über symmetrische Schrotungen I). Monatsh. Math. Phys. 45, 394 - 406 (1937).

[20] KRAMES, J.: Zur Bricard'schen Bewegung, deren sämtliche Bahnkurven auf Kugeln liegen (Über symmetrische Schrotungen II). Monatsh. Math. Phys. 45, 407 - 417 (1937).

[21] KRAMES, J.: Zur Geometrie des Bennett'schen Mechanismus (Über symmetrische Schrotungen V). Sber. Österr. Akad. Wiss. 146, 159 - 173 (1937).

[22] KRAMES, J.: Die Borel - Bricard Bewegung mit punktweise gekoppelten orthogonalen Hyperboloiden (Über symmetrische Schrotungen VI). Monatsh. Math. Phys. 46, 172 - 195 (1937).

[23] KRAMES, J.: Über eine konoidale Regelfläche fünften Grades und die darauf gegründete symmetrische Schrotung. Sber. Österr. Akad. Wiss. 190, 221 - 230 (1981).

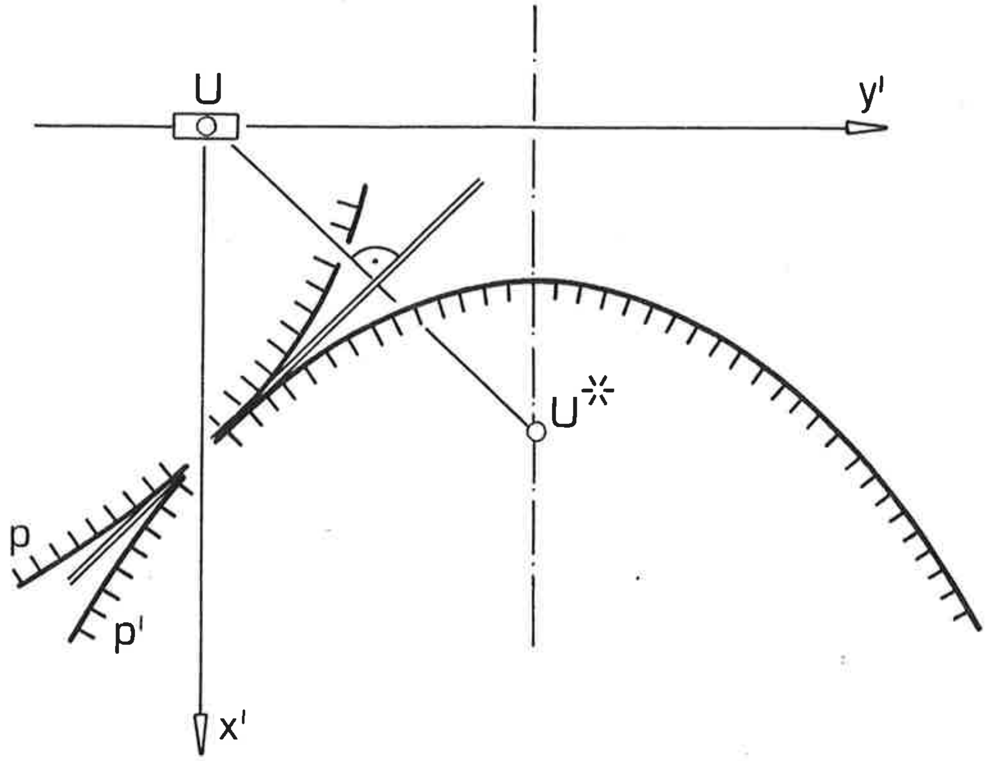
[24] RÖSCHEL, O.: Räumliche Zwangläufe mit einer zweiparametrigen Schar ebener Bahnkurven I. Sber. Österr. Akad. Wiss. (eingereicht).

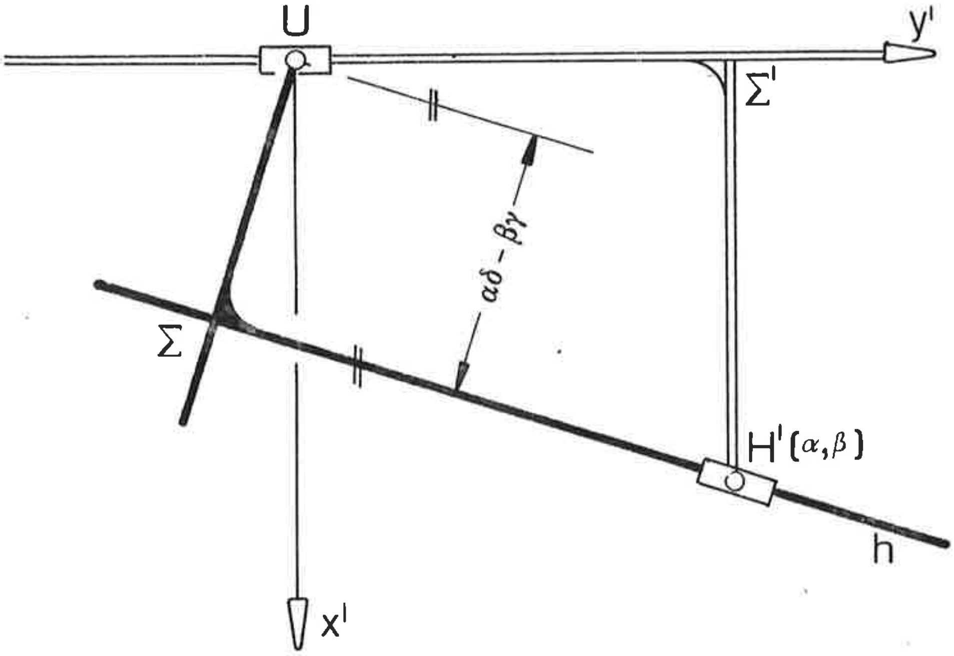
[25] TÖLKE, J. und VASCONCELOS, E.V.: Die Zwangläufe, bei denen das gleichseitige hyperbolische Paraboloid Bewegfläche eines Kegelschnitts ist. Sber. Österr. Akad. Wiss. 190, 303 - 316 (1981).

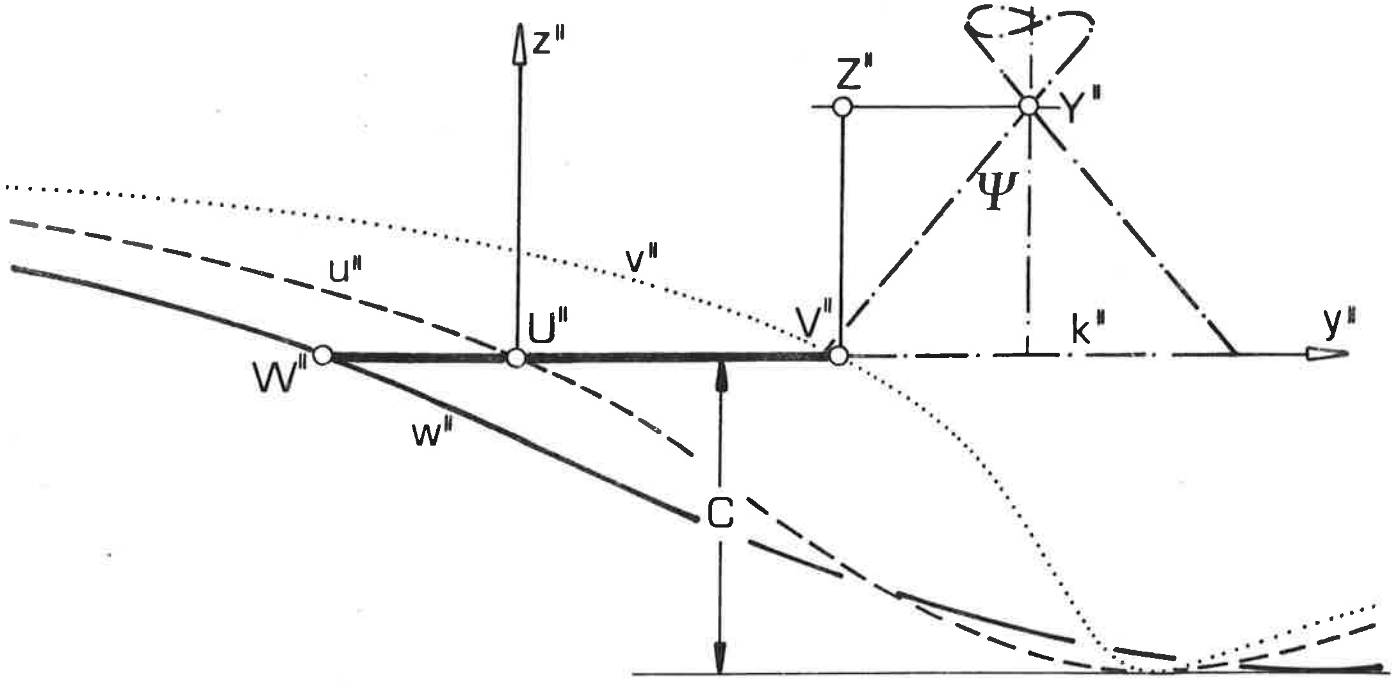
Anschrift des Verfassers :

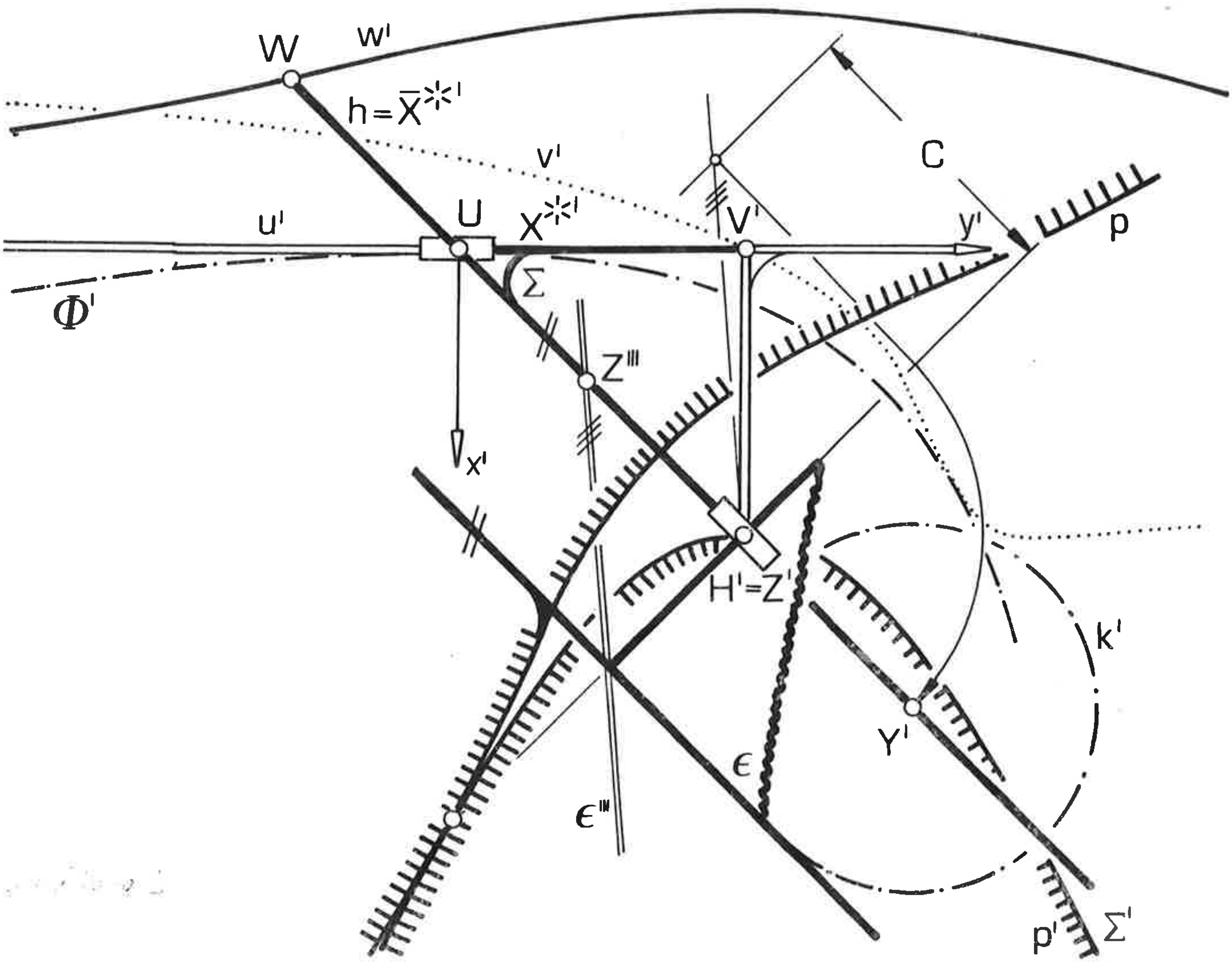
Otto Röschel
Institut für Mathematik und
Angewandte Geometrie
MU - Leoben

Franz - Josef - Straße 18
A - 8700 Leoben


U
y'
U*
p
p'
x'


U
y'
Σ'
αδ − βγ
Σ
H'(α,β)
h
x'


z''
Z''
Y''
Ψ
u''
v''
U''
V''
k''
y''
W''
w''
C


W
w'
h = X̄*'
v'
C
u'
U
X*'
V'
y'
p
Φ'
Σ
Z'''
x'
H' = Z'
k'
Y'
ε
ε'''
p'
Σ'