

RÄUMLICHE ZWANGLÄUFE MIT EINER ZWEIPARAMETRIGEN SCHAR
EBENER BAHNKURVEN I

von

Otto Röschel (Leoben)

Herrn o. Prof. Dr. H. Vogler zum 50. Geburtstag gewidmet

Zwangläufe Σ/Σ' des reellen dreidimensionalen euklidischen Raumes \mathbb{E}_3 mit durchwegs ebenen Bahnkurven sind vielfach studiert worden (vgl. [1], [2], [3], [5], [6] und [7]). Es handelt sich dabei um die wohlbekannteren DARBOUX - Bewegungen, bei welchen alle Punkte auf Ellipsen laufen. Weiters wurden solche Zwangläufe Σ/Σ' betrachtet, bei denen bloß alle Punkte einer im Gangraum Σ festen Geraden ebene Bahnen im Rastraum Σ' beschreiben (vgl. [8], [9] und [15]). Für Zwangläufe Σ/Σ' , bei denen alle Punkte einer im Gangraum festen Fläche X ebene Bahnen besitzen, liegen hingegen nur einige Beispiele vor. So werden in [13] Zylinderschrotungen untersucht, bei denen alle Punkte einer gangfesten Ebene ebene Bahnkurven beschreiben. Ein weiteres Beispiel für solche Zwangläufe stammt von W. WUNDERLICH [17]: Bei den sogenannten *kubischen Zwangläufen* gibt es im allgemeinen einen gangfesten Drehzylinder, dessen Punkte auf ebenen Kurven dritter Ordnung geführt werden (vgl. auch [5]). Ziel des vorliegenden ersten Teiles dieser Arbeit ist es, alle Zwangläufe Σ/Σ' zu ermitteln, bei denen die Punkte einer gangfesten Fläche X ebene Bahnkurven durchlaufen. Der zweite Teil soll der weitergehenden Untersuchung der

hier gewonnenen Zwangläufe und einigen Sonderfällen gewidmet sein.

1. Grundlagen

Im reellen dreidimensionalen projektiven Raum \mathbb{P}_3 - wir werden fallweise auch die komplexe Erweiterung vornehmen - weisen wir den Punkten die üblichen homogenen Koordinaten $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \neq (0 : 0 : 0 : 0)$ zu. Dann wird durch

$$\begin{aligned} x_0'(t) &= x_0 \\ \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix} &= x_0 \begin{bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \\ d_3(t) \end{bmatrix} + A(t) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

mit reeller orthogonaler (3×3) - Matrix $A(t) = (a_{ij}(t))$ und reellwertigen analytischen Funktionen $d_i(t)$, $a_{ij}(t)$ ($i, j = 1, 2, 3$; $t \in (-\infty, +\infty)$) ein *analytischer räumlicher Zwanglauf* Σ/Σ' im Sinne eines im \mathbb{P}_3 eingebetteten *euklidischen Raumes* \mathbb{E}_3 erklärt ¹⁾, der sich auf den in der Fernebene ω ($x_0=0$) gelegenen *absoluten Kegelschnitt* m

$$x_0 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \quad (2)$$

als Maßgebilde stützt. Im folgenden setzen wir für $t = 0$ die Anfangsbedingungen

$$a_{ij}(0) = \delta_{ij}, \quad d_i(0) = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3)$$

mit den Kroneckersymbolen δ_{ij} voraus. Gemäß [1, S.33] kann

¹⁾ Da für uns im folgenden reine Schiebungen $a_{ij} = \text{konst.}$ keine wesentliche Rolle spielen, wollen wir sie von den folgenden Betrachtungen ausschließen.

dann der Zwangslauf (1) in der Umgebung von $t = 0$ in der Normalform

$$\begin{cases} x_0'(t) = x_0 \\ x_1'(t) = x_1 - tx_2 + \frac{t^2}{2}(\epsilon x_3 - x_1) + \frac{t^3}{6}[(1+\epsilon^2)x_2 + \gamma_2 x_3 + d_{31}x_0] + \dots \\ x_2'(t) = x_2 + tx_1 + \frac{t^2}{2}(\mu x_0 - x_2) + \frac{t^3}{6}[-(1+\epsilon^2)x_1 + (\frac{3}{2}\epsilon - \gamma_1)x_3 + d_{32}x_0] + \dots \\ x_3'(t) = x_3 + x_0 t \sigma + \frac{t^2}{2}(\lambda x_0 - \epsilon x_1) + \frac{t^3}{6}[-\gamma_2 x_1 + (\frac{3}{2}\epsilon + \gamma_1)x_2 + d_{33}x_0] + \dots \end{cases} \quad (4)$$

entwickelt werden, wobei die Momentanachse mit der x_3 - Achse zusammenfällt. Alle auftretenden Koeffizienten $\gamma_1, \gamma_2, d_{31}, d_{32}, d_{33}, \epsilon, \lambda, \mu$ sind reelle Konstanten.

Punkte des Gangraumes Σ , die zum Zeitpunkt $t = 0$ Wendepunkte ihrer Bahnen durchlaufen, liegen im allgemeinen auf einer Raumkurve dritter Ordnung $w(0)$ (vgl. [1, S. 165]). Genau für $\epsilon = \lambda = \sigma = 0$ ist $w(0)$ eine zweiparametrische Mannigfaltigkeit. Es handelt sich dabei mit [14, S. 358] im allgemeinen um den Drehzylinder $w(0)$

$$x_1^2 + x_2^2 = \mu x_0 x_2, \quad (5)$$

der die Momentanachse $a(0)$ enthält. $\epsilon = \lambda = \sigma = 0$ kennzeichnet eine Getriebestellung, in der eine oskulierende Zylinderrollung vorliegt.

Punkte des Gangraumes Σ , die zum Zeitpunkt $t = 0$ Henkelpunkte ihrer Bahnen durchlaufen - sie besitzen wegen der verschwindenden Bahntorsion stationäre Schmiegeebenen -, sind durch $\det(\dot{x}_i'(0), \ddot{x}_i'(0), \dot{\ddot{x}}_i'(0)) = 0$, also auf Grund von (4) durch

$$\begin{vmatrix} -x_2 & \epsilon x_3 - x_1 & (1+\epsilon^2)x_2 + \gamma_2 x_3 + d_{31}x_0 \\ x_1 & \mu x_0 - x_2 & -(1+\epsilon^2)x_1 + (\frac{3}{2}\epsilon - \gamma_1)x_3 + d_{32}x_0 \\ \sigma x_0 & \lambda x_0 - \epsilon x_1 & -\gamma_2 x_1 + (\frac{3}{2}\epsilon + \gamma_1)x_2 + d_{33}x_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

gekennzeichnet. Liegt in (1) ein Zwanglauf Σ/Σ' vor, der für $t = 0$ von einem Zwanglauf mit durchwegs ebenen Punktbahnen hyperoskuliert wird, so ist (6) für alle Punkte des Gangraumes Σ erfüllt. Ist das nicht der Fall, so stellt (6) im allgemeinen eine Fläche dritter Ordnung dar, die wir Henkelpunktsfläche $X(0)$ von Σ/Σ' zum Zeitpunkt $t = 0$ nennen wollen. $X(0)$ kann auch zerfallen, wobei für uns nur ein Typ von Bedeutung ist : $X(0)$ zerfällt in die Fernebene ω und einen weiteren Bestandteil $X^*(0)$; dies ist mit (6) genau für $\epsilon = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ der Fall, was zur Folge hat, daß der Zwanglauf (1) zum Zeitpunkt $t = 0$ von einer Zylinderschrotung hyperoskuliert wird (vgl. [1, S. 312 ff.]).²⁾ $X^*(0)$ ist dann entweder ein Drehzylinder parallel zur Momentanachse $a(0)$ - der auch in zwei konjugiert komplexe Ebenen zerfallen kann - oder besteht nur aus einer zur Momentanachse parallelen Ebene.

Die Fernkurve $k(0)$ der Henkelpunktsfläche $X(0)$ (6) wird im allgemeinen durch

$$x_0 = 0, (x_1^2 + x_2^2) [-\gamma_2 x_1 + (\frac{3}{2}\epsilon + \gamma_1)x_2] - 3\epsilon^2 x_1 x_2 x_3 = 0 \quad (7)$$

beschrieben. Sie besitzt für $(\epsilon, \gamma_1, \gamma_2) \neq (0, 0, 0)$ stets einen Doppelpunkt $A_u(0)$ im Fernpunkt der Momentanachse $a(0)$ (vgl. [1, S. 214]).

Dem Zwanglauf (1) ist ein sphärischer Zwanglauf Σ^*/Σ^* , mit $d_1(t) = d_2(t) = d_3(t) = 0$ zugeordnet, für den $\sigma = \lambda = \mu = d_{31} = d_{32} = d_{33} = 0$ ist. Er wird in der Umgebung von $t = 0$ in der Normalform (vgl. [1, S. 214])

2) Zylinderschrotungen wurden vor allem von A. SCHÖNFLIES in [12] eingehend studiert.

$$\begin{cases}
 x_0'(t) = x_0 \\
 x_1'(t) = x_1 - \frac{t}{4}x_2 + \frac{t^2}{2}(\epsilon x_3 - x_1) + \frac{t^3}{6}[(1+\epsilon^2)x_2 + \gamma_2 x_3] + \\
 \quad + \frac{t^4}{24}[(1+\epsilon^2)x_1 + 3\gamma_2 \epsilon x_2 + (2\gamma_1 + q_1)x_3] + \dots \\
 x_2'(t) = x_2 + \frac{t}{4}x_1 - \frac{t^2}{2}x_2 + \frac{t^3}{6}[-(1+\epsilon^2)x_2 + (\frac{3}{2}\epsilon - \gamma_1)x_3] + \\
 \quad + \frac{t^4}{24}[-3\epsilon\gamma_2 x_1 + (1+4\epsilon^2)x_2 + (2\gamma_2 - q_2)x_3] + \dots \\
 x_3'(t) = x_3 - \frac{t}{2}\epsilon \cdot x_1 + \frac{t^3}{6}[-\gamma_2 x_1 + (\frac{3}{2}\epsilon + \gamma_1)x_2] + \\
 \quad + \frac{t^4}{24}[(2\gamma_1 - q_1)x_1 + (2\gamma_2 + q_2)x_2 - 3\epsilon^2 x_3] + \dots
 \end{cases} \quad (8)$$

beschrieben, wobei neben den schon bekannten Invarianten noch die reellen Zwanglaufkonstanten vierter Ordnung q_1 und q_2 auftreten. Zum Zeitpunkt $t = 0$ besitzt der sphärische Zwanglauf (8) die Henkelpunktsfläche $\chi^*(0)$ mit der Gleichung

$$(x_1^2 + x_2^2)[- \gamma_2 x_1 + (\frac{3}{2}\epsilon + \gamma_1)x_2] = 3\epsilon^2 x_1 x_2 x_3, \quad (9)$$

die sich aus (6) ergibt, wenn man dort $d_{31} = d_{32} = d_{33} = \sigma = \lambda = \mu = 0$ beachtet.

Es handelt sich dabei im allgemeinen um einen Kegel dritter Ordnung, der dieselbe Fernkurve k (7) wie die Henkelpunktsfläche des Ausgangszwanglaufs besitzt. Da wir alle räumlichen Zwangläufe (4) bestimmen wollen, bei denen die Punkte einer im Gangraum Σ festen Fläche ebene Bahnen durchlaufen, haben wir jene Zwangläufe zu ermitteln, bei denen die Henkelpunktsfläche $\chi(0)$ für den gesamten Zwanglauf im Gangraum stationär ist. Mit (9) muß das dann auch für den zugeordneten sphärischen Zwanglauf (8) der Fall sein, was nach [1. S. 216] genau dann zutrifft, wenn (9) und die der Forderung $\det(\dot{x}_i'(0), \ddot{x}_i'(0), \ddot{\ddot{x}}_i'(0)) = 0$ entsprechende Gleichung

$$\begin{aligned}
 & (x_1^2 + x_2^2 - \epsilon x_1 x_3) [(2\gamma_1 - q_1)x_1 + (2\gamma_2 + q_2)x_2 - 3\epsilon^2 x_3] - \\
 & - \epsilon x_1 x_2 [(1 + 4\epsilon^2)x_2 + (2\gamma_2 - q_2)x_3] + \epsilon x_1^2 [(1 + \epsilon^2)x_1 + (2\gamma_1 + q_1)x_3] = 0
 \end{aligned} \tag{10}$$

denselben Kegel $X^*(0)$ darstellen. Ein Koeffizientenvergleich der beiden Polynome (9) und (10) liefert nach einiger Rechnung die Bedingungen

$$\epsilon = 0 \quad \text{und} \quad \gamma_1 q_1 - \gamma_2 q_2 = 2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) ; \tag{11}$$

$\epsilon = 0$ kennzeichnet Σ^*/Σ^* , als sphärischen Bewegungsvorgang mit zum Zeitpunkt $t = 0$ oskulierender Drehung um eine feste Achse $a(0)$, die zweite Bedingung spielt im folgenden keine Rolle. Ist für den ganzen Zwanglauf Σ^*/Σ^* , $\epsilon = 0$, so handelt es sich dabei um eine Drehung um die feste Achse $a(0)$ ($x_1 = x_2 = 0$). Wir haben damit den

SATZ 1: Die sphärischen Zwangläufe Σ^/Σ^* , bei denen alle Punkte einer im Gangraum Σ^* festen Fläche X^* ebene Bahnkurven durchlaufen, stimmen mit den Drehungen um eine im Gangraum Σ^* feste Achse $a(0)$ überein; alle Punktbahnen sind dann im allgemeinen Kreise.*

Damit ist klargestellt, daß jene räumlichen Zwangläufe, bei denen die Punkte einer im Gangraum Σ stationären Fläche, der Henkelpunktsfläche X , ebene Bahnen besitzen, als zugeordnete sphärische Bewegungsvorgänge nur Drehungen um eine feste Achse besitzen können. Wir haben somit den

SATZ 2: Alle räumlichen Zwangsläufe Σ/Σ' , bei denen eine zweiparametrische Schar gangfester Punkte auf ebenen Bahnkurven geführt wird, sind Zylinderschrotungen.³⁾

2. Zylinderschrotungen mit einer zweiparametrischen Schar ebener Bahnkurven

Im folgenden schließen wir aus, daß Σ/Σ' (1) ein Zwangslauf mit durchwegs ebenen Bahnkurven ist. In den üblichen, mit

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 1 : x : y : z \quad (x_0 \neq 0) \quad (12)$$

eingeführten inhomogenen Koordinaten x, y, z werden Zylinderschrotungen durch

$$\begin{cases} x'(t) = x \cos t - y \sin t + d(t) \\ y'(t) = x \sin t + y \cos t + e(t) \\ z'(t) = z + f(t) \end{cases} \quad (13)$$

($t \in (-\infty, +\infty)$, $d(t), e(t), f(t) \in C^3$) mit den Anfangsbedingungen

$$d(0) = e(0) = f(0) = 0 \quad (14)$$

beschrieben. Die Henkelpunktsfläche $\lambda(t)$ zerfällt in die Fernebene ω und die durch

$$0 = \det \begin{bmatrix} h(x, y, t) + \dot{d}(t) & g(x, y, t) + \ddot{d}(t) & h(x, y, t) + \dot{\dot{d}}(t) \\ -g(x, y, t) + \dot{e}(t) & -h(x, y, t) + \ddot{e}(t) & -g(x, y, t) + \dot{\dot{e}}(t) \\ \dot{f}(t) & \ddot{f}(t) & \dot{\dot{f}}(t) \end{bmatrix} \quad (15)$$

³⁾ Dies erklärt, warum alle bislang bekannten Beispiele für solche Zwangsläufe Zylinderschrotungen sind.

beschriebene Fläche zweiter Ordnung $X^*(t)$, wobei

$$\begin{cases} g(x, y, t) = -x \cos t + y \sin t & \text{und} \\ h(x, y, t) = x \sin t + y \cos t \end{cases} \quad (16)$$

bedeuten - Ableitungen nach t werden wir im folgenden durch Punkte kennzeichnen. $X^*(t)$ wird durch die Gleichung

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2) \cdot \alpha(t) + x [\beta(t) \sin t + \gamma(t) \cos t] + \\ + y [\beta(t) \cos t - \gamma(t) \sin t] + \delta(t) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

erfaßt, wobei abkürzend

$$\begin{cases} \alpha(t) = \dot{f}(t) + \ddot{f}(t) \\ \beta(t) = \dot{f}(t) [\ddot{d}(t) - \ddot{e}(t)] + \ddot{f}(t) [\dot{e}(t) + \dot{e}(t)] - \ddot{f}(t) [\dot{d}(t) + \dot{e}(t)] \\ \gamma(t) = -\dot{f}(t) [\ddot{d}(t) + \ddot{e}(t)] + \ddot{f}(t) [\dot{d}(t) + \dot{d}(t)] - \ddot{f}(t) [\dot{d}(t) - \dot{e}(t)] \\ \delta(t) = \dot{f}(t) [\ddot{d}(t) \dot{e}(t) - \ddot{e}(t) \dot{d}(t)] + \ddot{f}(t) [\dot{e}(t) \dot{d}(t) - \dot{e}(t) \dot{d}(t)] + \\ + \ddot{f}(t) [\ddot{e}(t) \dot{d}(t) - \dot{e}(t) \ddot{d}(t)] \end{cases} \quad (18)$$

bezeichnen . Die Henkelpunktsfläche $X^*(t)$ ist im Gangraum Σ genau dann stationär, wenn

$$\begin{cases} \alpha(t) = R(t) \cdot \alpha(0) \\ \beta(t) = R(t) \cdot \beta(0) \\ \gamma(t) = R(t) \cdot \gamma(0) \\ \delta(t) = R(t) \cdot \delta(0) \end{cases} \quad R(t) \in C^3, R(t) \neq 0 \quad (19)$$

gilt. Im Fall $\alpha(t) = 0$ stellt $X^*(t)$ (17) eine Ebene dar, die für den Zwangslauf Σ/Σ' genau dann stationäre Henkelpunktsfläche ist, wenn (18) mit $\dot{f}(t) + \ddot{f}(t) = 0$ gilt. Die Integration des zugehörigen Differentialgleichungssystems (18) führt auf den Zwangslauf

$$\begin{cases} x'(t) = x \cos t - y \sin t + Ed(t) \\ y'(t) = x \sin t + y \cos t + A(1 - \cos t) + Bd(t) \\ z'(t) = z + C \sin t + D(1 - \cos t), \end{cases} \quad (20)$$

wobei A, B, C, D und E reelle Konstanten und $d(t)$ eine beliebige Funktion der Klasse C^3 sind. E. VASCONCELOS und J. TÖLKE haben in [13] diese Zwangsläufe studiert und eine Normalform angegeben. Interessant ist hierbei, daß (20) durch Überlagerung einer DARBOUX - Bewegung ($d(t) = 0$ für alle $t \in (-\infty, +\infty)$, vgl. [1, S. 307]) und einer stetigen - nicht notwendig gleichförmigen - Schiebung längs einer festen Geraden g entsteht, die zu den Achsen - zylindern der DARBOUX - BEWEGUNG orthogonal ist. Als Normalform kann o.B.d.A. (20) mit $E = 0$ angesehen werden. Wir haben damit den⁴⁾

SATZ 3: Die einzigen Zwangsläufe Σ/Σ' , des dreidimensionalen euklidischen Raumes E_3 , bei denen genau die Punkte einer gangfesten reellen Ebene ebene Bahnkurven durchlaufen, sind die durch (20) erfaßten Bewegungsvorgänge; sie lassen sich durch Überlagerung einer DARBOUX - Bewegung mit einer stetigen Schiebung längs einer zu den Achsenzylindern der DARBOUX - Bewegung orthogonalen Geraden erzeugen.

Wird in dieser gangfesten Ebene eine Gerade h festgehalten, die nicht parallel zu den Achsenzylindern verläuft, so beschreiben ihre Punkte ebene Bahnkurven in Ebenen parallel zur festen Schiebrichtung (orthogonal zu den Achsenzylindern). Es ist dies ein Beispiel für die von H. VOGLER in [15] angegebene Ergänzung eines Satzes von A. MANNHEIM [8]; die von h überstri-

⁴⁾ Obwohl in [13] diese Zwangsläufe angegeben werden, scheint dieser Sachverhalt nicht bemerkt worden zu sein, der die interessante Sonderstellung dieser Bewegungsvorgänge deutlich macht. Für $C = D = d(t) = 0$ sind auch die Drehungen um die z' - Achse in (20) enthalten.

chene Regelfläche gehört bei geeigneter Parameterwahl der von H. SACHS in [10] ermittelten Klasse an. Wählt man $d(t) = \tan \frac{t}{2}$, $E = 0$, so stellt (20) einen von W. WUNDERLICH in [17] untersuchten *symmetrischen kubischen Zwangslauf* dar.

Im Fall $\alpha(t) \neq 0$ können wir o.B.d.A. $\alpha(0) \neq 0$ und nach geeigneter Wahl der Achsenzylinder

$$\dot{d}(0) = \ddot{d}(0) = \dot{e}(0) = 0, \quad \ddot{e}(0) \neq 0 \quad 5) \quad (21)$$

setzen (vgl. [1, S. 315]). Wir erhalten in (18)

$$\begin{cases} \alpha(0) = \dot{f}(0) + \ddot{f}(0) \\ \beta(0) = -\dot{f}(0) [\dot{d}(0) - \ddot{e}(0)] + \ddot{f}(0) \dot{e}(0) - \ddot{f}(0) \ddot{e}(0) \\ \gamma(0) = -\dot{f}(0) \ddot{e}(0) + \ddot{f}(0) \dot{d}(0) \\ \delta(0) = -\dot{d}(0) \ddot{e}(0) \dot{f}(0), \end{cases} \quad (22)$$

womit die Gleichung der Henkelpunktsfläche $X^*(0)$ die Gestalt

$$(x^2 + y^2) [\dot{f}(0) + \ddot{f}(0)] + x\gamma(0) + y\beta(0) + \delta(0) = 0 \quad (23)$$

annimmt.

5) Mit $\ddot{e}(0) = 0$ wird der Zwangslauf (13) von einer stetigen Schraubung oskuliert. W. KAUTNY nennt solche Bewegungsvorgänge *Umschwungbewegungen* und zeigt in [4], daß bei einem derartigen Bewegungsvorgang ein nicht in den Minimalebene durch die feste Schraubachse gelegener Punkt genau dann auf einer ebenen Bahnkurve geführt wird, wenn dies für alle Punkte des Gangraumes der Fall ist; die Bahnkurven sind dann im allgemeinen Ellipsen. Da jede Umschwungbewegung alle Punkte der Minimalebene durch die rastfeste Schraubachse in diesen Minimalebene bewegt, stellen die zu $d(t) = e(t) = 0$ ($\forall t \in (-\infty, +\infty)$) gehörenden Umschwungbewegungen triviale Beispiele für die gesuchten Zwangsläufe dar, und wir können im folgenden $\ddot{e}(0) \neq 0$ voraussetzen.

Alle Punkte des Gangraumes Σ , deren Punktbahnen zum Zeitpunkt $t = 0$ Schmiegeebenen parallel zur Momentanachse besitzen, werden durch

$$x^2 + y^2 = y\ddot{e}(0) \quad (24)$$

erfaßt; sie gehören einem Drehzylinder $V(0)$ an, der die Momentanachse $m(0)$ enthält. $V(0)$ und $X^*(0)$ (23) haben stets die augenblickliche Wendegerade $w(0)$

$$x = \frac{\dot{\delta}(0) \ddot{\delta}(0) \ddot{e}(0)}{\dot{\delta}(0)^2 + \ddot{\delta}(0)^2}, \quad y = \frac{\dot{\delta}(0)^2 \ddot{e}(0)}{\dot{\delta}(0)^2 + \ddot{\delta}(0)^2} \quad (25)$$

gemeinsam. Nun sollen zwei Fälle getrennt diskutiert werden:

Fall I : $V(t)$ und $X^*(t)$ berühren sich während des ganzen Zwangslaufs (13). Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist das genau dann der Fall, wenn

$$\begin{cases} \dot{\delta}(0) \ddot{e}(0) = \ddot{\delta}(0) \dot{d}(0), \\ \dot{\delta}(0) \dot{d}(0) = -\ddot{\delta}(0) \ddot{e}(0) \quad \text{und} \\ 2 \cdot \dot{d}(0) [\dot{\delta}(0)^2 + \ddot{\delta}(0)^2] + \dot{\delta}(0) \beta(0) = -\ddot{e}(0) \dot{\delta}(0) [\dot{\delta}(0) + \ddot{\delta}(0)] \end{cases} \quad (26)$$

gilt.

Abgesehen vom trivialen Fall einer oskulierenden Zylinderrollung ($\dot{\delta}(0) = \ddot{\delta}(0) = 0$) besitzt (26) die Lösung

$$\dot{d}(0) = \ddot{e}(0) = 0, \quad (27)$$

woraus wir erkennen, daß die beiden Drehzylinder $V(0)$ und $X^*(0)$ übereinstimmen; die Bahnkurven der Punkte von $X^*(0)$ verlaufen daher in Ebenen parallel zu den Achsenzylindern.

In einem Normalriß auf die $[x, y]$ - Ebene (*Grundriß*) erscheinen die Punktbahnen der Zylinderschrotung (13) als Bahnkurven eines zugeordneten ebenen euklidischen Zwanglaufs σ/σ' , bei dem der Grundriß der Achsenzylinder die Polkurven und der Grundriß des Drehzylinders $V(t)$ den augenblicklichen Wendekreis abgibt. In unserem Sonderfall hat das zur Folge, daß die Grundrißbewegung eine *Ellipsenbewegung* ist (Wendekreis und Gangpolkurve sind identisch; vgl. [1, S. 348]). In der Normalform kann sie durch

$$\begin{cases} x'(t) = x \cos t - y \sin t \\ y'(t) = x \sin t + y \cos t + A (1 - \cos t) \end{cases} \quad A = \text{konst.} \in \mathbb{R} \quad (28)$$

dargestellt werden. Der zugehörige räumliche Zwanglauf wird daher durch

$$\begin{cases} x'(t) = x \cos t - y \sin t \\ y'(t) = x \sin t + y \cos t + A (1 - \cos t) \\ z'(t) = z + f(t) \end{cases} \quad (29)$$

beschrieben, wobei $f(t)$ eine willkürliche Funktion aus der Klasse C^3 bedeutet. Dieser Zwanglauf kann so wie (20) durch Überlagerung einer DARBOUX - Bewegung ($f(t) = B \sin t + C (1 - \cos t)$; $B, C = \text{konst.} \in \mathbb{R}$) und einer stetigen - nicht notwendig gleichförmigen - Schiebung längs der gangfesten Achsenrichtung erzeugt werden.

Fall II : Die Drehzylinder $V(0)$ und $X^*(0)$ besitzen außer der Wendegeraden $w(0)$ noch eine weitere gemeinsame Erzeugende $m(0)$. Die Punkte von $m(0)$ beschreiben Bahnkurven in einer Ebene parallel zu den Achsenzylindern. Ist $m(t)$ auf $X^*(t)$ nicht stationär, so befinden sich die Bahnkurven aller Punkte von $X^*(t) = X^*(0)$

in Ebenen parallel zu den Achsenzylindern, und wir sind bei Fall I angelangt. Ist $m(t)$ während des gesamten Zwanglaufs auf $X^*(0) = X^*(t)$ stationär, so kann $m(t)$ o.B.d.A. in die z -Achse des Gangsystems transformiert werden; die zugehörige Bahnebene kann o.B.d.A. als $[y, z]$ -Ebene gewählt werden. Diese Zylinderschrotungen werden daher in der Normalform durch

$$\begin{cases} x'(t) = x \cos t - y \sin t \\ y'(t) = x \sin t + y \cos t + e(t) \\ z'(t) = z + f(t) \end{cases} \quad (30)$$

beschrieben; dabei müssen wir allerdings auf die Anfangsbedingungen (21) verzichten. (18) erhält damit die einfachere Gestalt

$$\begin{cases} \alpha(t) = \dot{f}(t) + \ddot{f}(t) \\ \beta(t) = -\ddot{e}(t) [\dot{f}(t) + \ddot{f}(t)] + \ddot{f}(t) [\dot{e}(t) + \ddot{e}(t)] \\ \gamma(t) = \dot{e}(t) [\dot{f}(t) + \ddot{f}(t)] - \dot{f}(t) [\dot{e}(t) + \ddot{e}(t)] \\ \delta(t) = 0. \end{cases} \quad (31)$$

Der Henkelpunktszylinder $X^*(t)$ ist genau dann im Gangraum Σ stationär, wenn (19) mit (31) gilt. Die Integration des so entstehenden Differentialgleichungssystems liefert

$$f(t) = Ke(t) + L(1 - \cos t) + M \sin t, \quad (32)$$

wobei K, L und M reelle Integrationskonstanten sind. Setzen wir noch

$$e(t) = A(1 - \cos t) + B \varphi(t) \quad (A, B = \text{konst.} \in \mathbb{R}) \quad (33)$$

mit einer willkürlichen Funktion $\varphi(t) \in C^3$, so erhalten wir als Darstellung des Lösungszwanglaufs Σ/Σ'

$$\begin{cases} x'(t) = x \cos t - y \sin t \\ y'(t) = x \sin t + y \cos t + A(1 - \cos t) + B \varphi(t) \\ z'(t) = z + C \sin t + D(1 - \cos t) + E \varphi(t) \end{cases} \quad (34)$$

($A, B, C, D, E = \text{konst.} \in \mathbb{R}$), aus der unschwer zu erkennen ist, daß auch dieser Zwanglauf durch Überlagerung einer DARBOUX - Bewegung mit einer stetigen - nicht notwendig gleichförmigen - Schiebung längs einer festen Geraden g erzeugt werden kann, die weder parallel noch normal zu den Achsenzylindern liegt.⁶⁾

Damit haben wir den

SATZ 4: Die einzigen Zwangläufe Σ/Σ' des euklidischen Raumes E_3 , bei denen genau die Punkte einer im Gangraum Σ festen Fläche X ebene Bahnkurven besitzen, sind die durch (20), (29) und (34) beschriebenen Zylinderschrotungen; im ersten Fall ist X eine Ebene, in den beiden letzten ein Drehzylinder.⁷⁾ Diese Bewegungsvorgänge lassen sich alle durch Überlagerung einer DARBOUX - Bewegung mit einer stetigen Schiebung längs einer in Σ' festen Geraden g erzeugen, die nicht notwendig gleichförmig sein muß.

⁶⁾ Wird in (34) $\varphi(t) = 0$ gesetzt, so erhalten wir die DARBOUX-Bewegungen, die für $e(t) = 0$ (33) zum vollkommen steilen DARBOUX'schen Umschwung werden. Gilt zusätzlich $z'(t) = z$, so stellt (34) Drehungen um die z' - Achse dar. Setzen wir in (34) $\varphi(t) := \bar{B} \sin t + \bar{C} \tan \frac{t}{2}$, so entstehen die von W. WUNDERLICH in [17] bestimmten kubischen Zwangläufe, für die der folgende Satz bereits in [17] bewiesen wurde.

⁷⁾ Dieser Drehzylinder kann auch in die beiden Minimalebene durch die z' - Achse zerfallen, wie dies für die in (34) mit-erfaßten Umschwungbewegungen $A(1 - \cos t) = -B \varphi(t)$ der Fall ist (vgl. W. KAUTNY [4]).

Da die Bahnkurven bei einer DARBOUX - Bewegung im allgemeinen Ellipsen sind, liegen die Bahnkurven dieser speziellen Zylinderschrotungen im allgemeinen auf *elliptischen Zylindern*, deren Erzeugenden parallel zur Schiebrichtung der den Zwanglauf aus der DARBOUX - Bewegung erzeugenden Schiebung verlaufen. Wir haben damit den

SATZ 5: Bei den Zylinderschrotungen (20), (29) und (34) werden allgemeine Punkte des Gangraumes auf zur Schiebrichtung parallelen elliptischen Zylindern geführt. Für Punkte der Henkelpunktsebene (bei (20)) bzw. des Henkelpunktzylinders (bei (29) und (34)) liegen die Bahnkurven in Ebenen, die zur festen Schiebrichtung parallel sind.

Abbildung 1

In Abbildung 1 ist ein bemerkenswertes Beispiel für so einen Zwanglauf dargestellt: In (34) wurde

$$\varphi(t) = -C \cdot (\sin t + \sqrt{(1 - \cos t) \cos t}) \quad (35)$$

sowie $A=D=0$, $B=1$ und $C = E$ gesetzt, wodurch erreicht wird, daß die Grundrißbewegung zu einem *durchschlagenden exzentrischen Schubkurbelgetriebe* wird (vgl. [16, S. 95 ff.]). Die Bahn a des Punktes $A (C,0,0)$ ist eine *Ellipse*, die ebene Bahnkurve des Punktes $B (0,0,0)$ ist eine *Kurve 4. Ordnung*; die Bahnkurven der nicht auf X^* gelegenen Punkte sind im allgemeinen Raumkurven *achter Ordnung*; sie liegen auf *elliptischen Zylindern* (vgl. die Bahn c des Punktes C) und erscheinen im Grundriß als ebene Kurven vierter Ordnung (In der Figur wurde das Gangsystem für $t = 30^\circ$ eingetragen).

LITERATUR

- [1] BOTTEMA, O. und ROTH, B.: Theoretical kinematics. North-Holland Series, Amsterdam 1979.
- [2] DARBOUX, G.: Sur le déplacement d'une figure invariable. Comptes rendus Paris 92, 118 - 121 (1881).
- [3] GRÜNWARD, A.: Darstellung der MANNHEIM - DARBOUXschen Umschwungbewegung eines starren Körpers. Zeitschrift f. Math. u. Phys. 54, 154 - 220 (1906).
- [4] KAUTNY, W.: Zur Geometrie des harmonischen Umschwungs. Mh. Math. 60, 66 - 82 (1956).
- [5] KOENIGS, G.: Leçons de Cinématique. Lib. Scient. A. Hermann, Paris 1897.
- [6] KRAMES, J.: Zur kubischen Kreisbewegung des Raumes. Sitzungsber. d. Österr. Akad. d. Wiss. Wien 146, 145 - 158 (1937).
- [7] KRAMES, J.: Zur aufrechten Ellipsenbewegung des Raumes (Über symmetrische Schrotungen III), Mh. Math. u. Phys. 46, 38 - 50 (1937).
- [8] MANNHEIM, A.: Propriétés relatives aux trajectoires des points d'une figure de forme invariable. Comptes rendus Paris 76, 635 - 638 (1873).
- [9] MANNHEIM, A.: Principes et développements de la géométrie cinématique. Gauthiers Villars, Paris 1894.
- [10] SACHS, H.: Die Strahlflächen mit durchwegs ebenen Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden. Archiv Math. 21, 437 - 445 (1970).

- [11] SCHÖNFLIES, A.: Geometrie der Bewegungen in synthetischer Darstellung. Teubner 1886.
- [12] SCHÖNFLIES, A.: Über Bewegungen starrer Systeme im Fall cylindrischer Axenflächen. Math. Ann. 40, 317 - 331 (1892).
- [13] VASCONCELOS, E. und TÖLKE, J.: Eine Raumbewegung mit nur kubischen Bahnkurven. Sitzungsber. d. Österr. Akad. d. Wiss. Wien 180, 407 - 415 (1979).
- [14] VELDKAMP, G.R.: Canonical systems and instantaneous invariants in spatial kinematics. Journal of Mechan. 2, 329 - 388 (1967).
- [15] VOGLER, H.: Räumliche Zwangläufe mit ebenen Bahnkurven. Ber. Math. - Stat. Sect. Forschungszent. Graz, 162, 1 - 17 (1981).
- [16] WUNDERLICH, W.: Ebene Kinematik. Bibliographisches Institut, Mannheim 1970.
- [17] WUNDERLICH, W.: Kubische Zwangläufe. Sitzungsber. d. Österr. Akad. d. Wiss. Wien (im Druck).

Anschrift des Verfassers :

Otto Röschel

Institut für Mathematik und

Angewandte Geometrie

MU - Leoben

Franz - Josef - Straße 18

A - 8700 Leoben

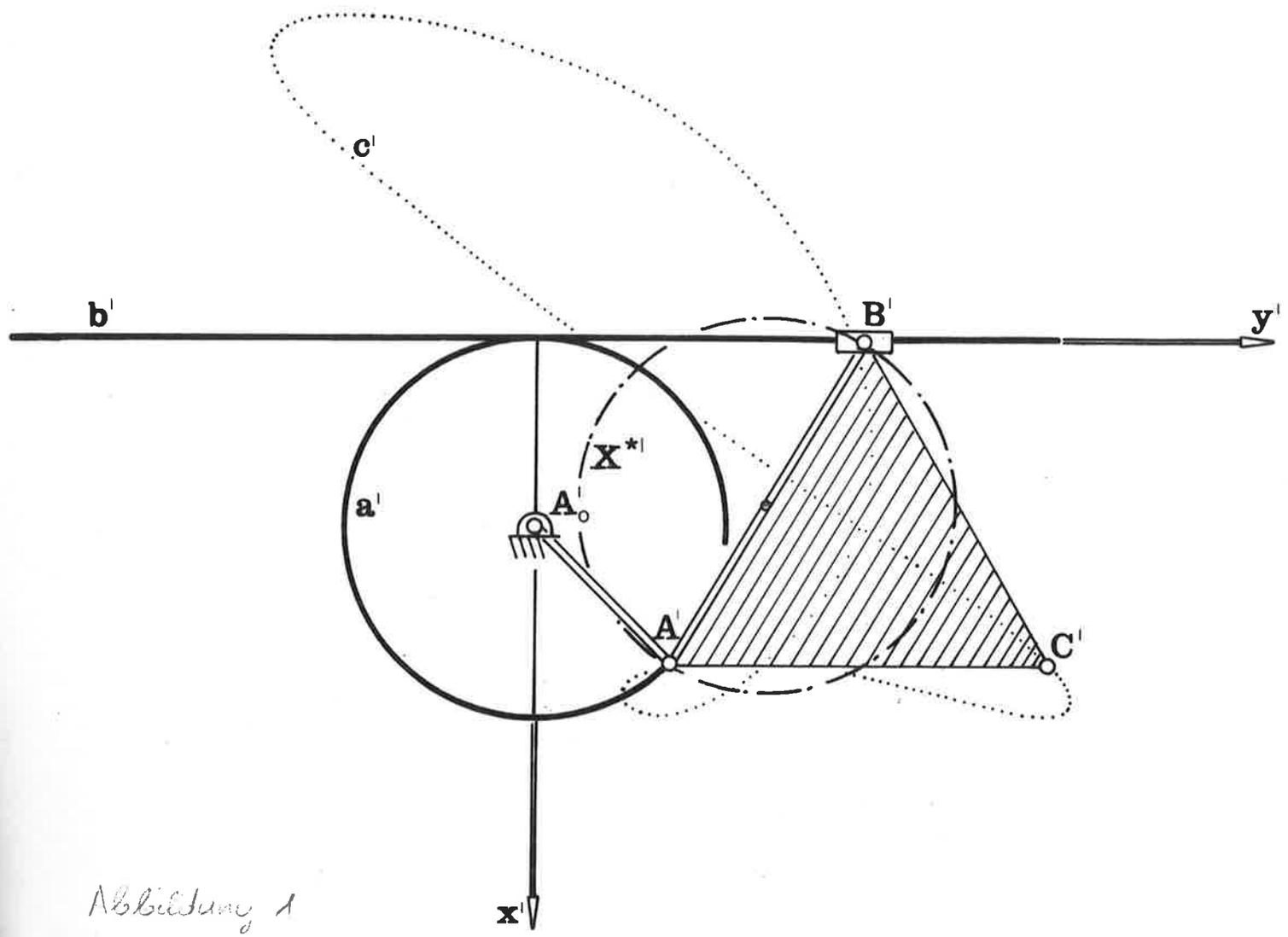
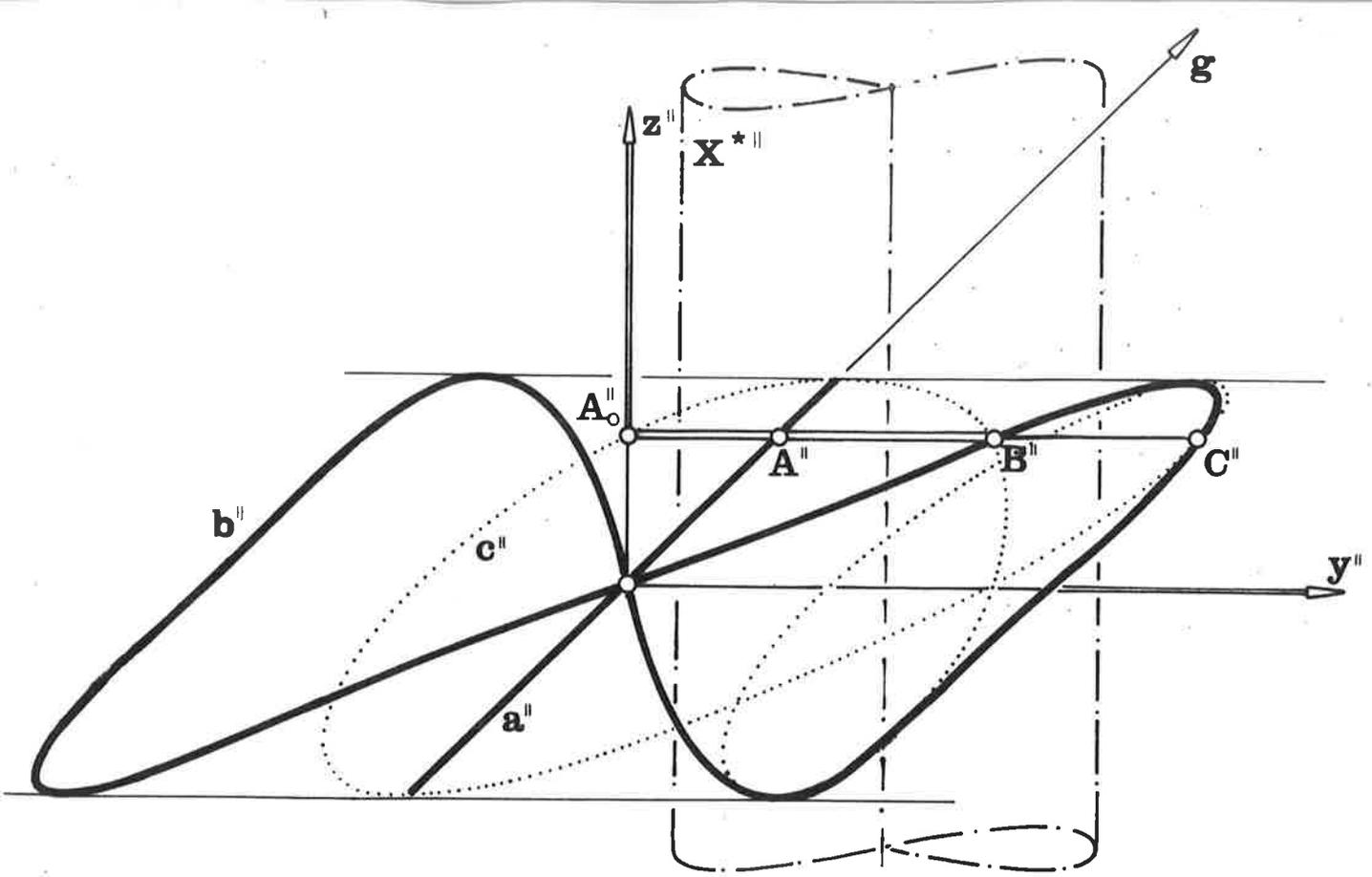


Abbildung 1