

BEMERKUNG ZU DEN TORUSFLÄCHEN DES FLAGGENRAUMES

von

OTTO RÖSCHEL

(Leoben)

1. Nichtisotrope Torusflächen im Flaggenraum. In einem reellen dreidimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ - wir werden Punkte mit homogenen Koordinaten $x_0:x_1:x_2:x_3 \neq 0:0:0:0$ beschreiben - wird die neungliedrige Gruppe projektiver Kollineationen

$$(1) \quad \begin{aligned} x_0' &= x_0 \\ x_1' &= ax_0 + \alpha x_1 \\ x_2' &= bx_0 + cx_1 + \beta x_2 \\ x_3' &= dx_0 + ex_1 + fx_2 + \gamma x_3, \end{aligned} \quad \begin{aligned} & a, b, c, d, e, f, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \\ & \alpha\beta\gamma \neq 0 \end{aligned}$$

die die absolute Ebene ω ($x_0 = 0$), die absolute Gerade f ($x_0 = x_1 = 0$) und den absoluten Punkt F ($0:0:0:1$) einzeln festlassen, als Ähnlichkeitsgruppe eines Flaggenraumes $I_3^{(2)}$ mit dem Absolutgebilde $\{\omega, f, F\}$ angesprochen. H. BRAUNER hat in [1] die in (1) durch $\alpha = \beta = \gamma = 1$ ausgezeichnete Untergruppe als Bewegungsgruppe B_6 dieses Flaggenraumes $I_3^{(2)}$ ausgezeichnet und die dazugehörige Geometrie studiert¹⁾

1) Man vergleiche diesbezüglich auch H. SACHS [4] und die dort angegebene Literatur.

und sowohl alle eingliedrigen Untergruppen als auch $I_3^{(2)}$ - Analoga zu den gängigsten Bewegflächen des euklidischen Raumes angeben. Darunter befindet sich auch die Herleitung der Torusflächen des $I_3^{(2)}$ [1, III, S.66 f.],²⁾ wobei H. BRAUNER für die nichtisotrope Drehungsgruppe mit der Normalform

$$\begin{aligned} x' &= x + at \\ (2) \quad y' &= y + xt + \alpha \frac{t^2}{2} && (\alpha \in \mathbb{R}/\{0\}, t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}) \\ z' &= z \end{aligned}$$

- wir verwenden im folgenden stets inhomogene Koordinaten $x_0:x_1:x_2:x_3 = 1:x:y:z$ ($x_0 \neq 0$) - jene parabolischen Zylinder als nichtisotrope Torusflächen bezeichnet, die eine die absolute Gerade f treffende Gerade g ($x = \text{konst.}$) bei (2) überstreicht.³⁾ Dies deshalb, weil H. BRAUNER die Hüllflächen einer Punktkugel bzw. Punktgrenzkugel des $I_3^{(2)}$ bei der nichtisotropen Drehungsgruppe (2) als Torusflächen anspricht. Überträgt man jedoch die euklidische Definition des Torus als Drehfläche mit einem Kreis als Meridian in den Flaggenraum, so gelangt man für die nichtisotrope Drehung (2) zu einem überraschenden Ergebnis, das hier vorgestellt werden soll: Die Meridiankurven der nichtisotropen Drehflächen liegen mit [1, III, S.66] in den durch $x = \text{konst.}$ gekennzeichneten vollisotropen Ebenen. Als Meridian m wählen wir den vollisotropen Kreis [1, I, S.124] mit der Parameterdarstellung $(0, v, 2pv^2)$ ($p = \text{konst.} \in \mathbb{R}/\{0\}, v \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$).

2) Dabei treten je nach Art der Drehungsgruppen verschiedene Typen von Torusflächen auf.

3) Diese parabolischen Zylinder werden von H. BRAUNER ausführlich untersucht und als Punktkugeln bzw. Punktgrenzkugeln angesprochen. [1, I, S.125 f.].

Er überstreicht bei der nichtisotropen Drehung (2) die Fläche Φ mit der Parameterdarstellung

$$(3) \quad \varphi(t, v) = (\alpha t, v + \alpha \frac{t^2}{2}, 2pv^2)$$

und der algebraischen Gleichung

$$(4) \quad z = 2p(y - \frac{x^2}{2\alpha})^2,$$

die hier als *nichtisotroper Torus* bezeichnet werden soll. Es handelt sich dabei um eine jener Flächen vierter Ordnung mit drei in die absolute Gerade f zusammengerückten Doppelgeraden; (4) trägt in den Tangentialebenen eine zweiparametrische Kegelschnittsschar und stellt daher einen besonderen *Römerflächentyp* dar, der in letzter Zeit vor allem von W. WUNDERLICH [7, S.490 f.] untersucht wurde.⁴⁾ Von W. WUNDERLICH stammt auch eine Erzeugung als Schiebfläche, die mit der hier angegebenen als nichteuklidische Drehfläche übereinstimmt.⁵⁾ Diese Römerfläche besitzt eine zweigliedrige Automorphismengruppe (vgl. [7, S.496]), die als Untergruppe in der Ähnlichkeitsgruppe (1) enthalten ist. Wir haben damit den

Satz 1: Durch nichtisotrope Drehung eines vollisotropen Kreises m des $I_3^{(2)}$ entsteht eine algebraische Fläche vierter Ordnung mit drei in die absolute Gerade f zusammengerückten Doppelgeraden, die als nichtisotrope Torusfläche des $I_3^{(2)}$ aufgefaßt werden kann. Diese Fläche ist eine spezielle Römerfläche und wird von einer zweigliedrigen Untergruppe der Ähnlichkeitsgruppe (1) des $I_3^{(2)}$ in sich transformiert.

4) Weitere Literaturangaben zu diesem Flächentyp befinden sich in [7, S.497].

5) Nach H. BRAUNER [1, III, S.66] sind nichtisotrope Drehflächen auch durch Schiebung eines Meridians längs einem Drehkreis erzeugbar.

2. Loxodromen auf nichtisotropen Torusflächen. In Analogie zum euklidischen Fall werden wir jene Flächenkurven $v = v(t) \in C^1(\mathbb{R})$ des Torus (4) als *Loxodromen* bezeichnen, die alle Drehkreise ($v = \text{konst. in (4)}$) unter konstantem $I_3^{(2)}$ -Winkel $\alpha \in \mathbb{R}/\{0\}$ schneiden. Mit [1, I, S.123] muß dann

$$(5) \quad \frac{dv}{dt} = \alpha \alpha$$

gelten, woraus wir

$$(6) \quad v(t) = \alpha \alpha (t + K)$$

mit einer reellen Konstanten K gewinnen. Die zugehörigen Loxodromen besitzen die Parameterdarstellung

$$(7) \quad (\alpha t, \alpha \frac{t^2}{2} + \alpha \alpha (t + K), 2p\alpha^2 \alpha^2 (t + K)^2).$$

Es handelt sich um *nichtisotrope Kreise* in den zum Drehkreis $v = \alpha^2 \alpha$ gehörenden *Torustangentialebenen*. Wir haben damit den

Satz 2: Die Loxodromen der nichtisotropen Torusfläche (4) des $I_3^{(2)}$ sind durchwegs *nichtisotrope Kreise* in Tangentialebenen dieser Fläche.

Die Loxodromenkreisschar (7) besitzt Tangenten, die eine Geradenkongruenz G mit der Parameterdarstellung

$$(8) \quad \varphi(t, u, v) = (\alpha t, \alpha \frac{t^2}{2} + v, 2pv^2) + u(1, t + \alpha, 4p\alpha v)$$

erfüllen ($u \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$). Längs dem Meridiankreis m ($t = 0$) gehören diese Tangenten dem *Regulus*

$$(9) \quad \varphi(0, u, v) = (0, v, 2pv^2) + u(1, \alpha, 4p\alpha v)$$

auf dem *hyperbolischen Paraboloid*

$$(10) \quad z = 2p(y^2 - a^2x^2)$$

an. Bei der den Torus erzeugenden nichtisotropen Drehung (2) besitzt dieses Paraboloid die Brennflächen der Kongruenz G als Hüllflächen. Die Charakteristik von (9) wird durch

$$(11) \quad \det\left(\frac{d\varphi}{du}, \frac{d\varphi}{dv}, A(\varphi(u, v))\right) = 0$$

erfaßt, wobei $A(\varphi(u, v)) = (\alpha, u, 0)$ den Bahntangentenvektor der Punkte des Paraboloides bei der Drehung (2) zum Zeitpunkt $t = 0$ angibt. Auswertung von (11) führt auf

$$(12) \quad u(v + au - a^2\alpha) = 0 ;$$

die Charakteristik zerfällt in den *Torusmeridian* m ($u = 0$ in (12)) und den *isotropen Kreis*

$$(13) \quad (u, a^2\alpha, 2pa^2(a^2\alpha^2 - u^2)),$$

der bei der Drehung (2) die *singuläre Fläche zweiter Ordnung*

$$(14) \quad x^2 - 2\alpha y + \frac{z}{2pa^2} + a^2\alpha^2 = 0$$

überstreicht. Dabei handelt es sich im Sinne des $I_3^{(2)}$ um eine *Punktkugel* (vgl. [1, I, S.125]). Wir fassen zusammen in

Satz 3: Die Tangenten aller zu einem festen Kurswinkel gehörenden Loxodromen der nichtisotropen Torusfläche (4) des $I_3^{(2)}$ erfüllen eine Geradenkongruenz, deren Brennflächen aus dem Torus und der Punktkugel (14) bestehen.⁶⁾

6) Für den euklidischen Raum wurden dazu analoge Beziehungen von W. WUNDERLICH [8] aufgedeckt.

Abbildung 1

In Abbildung 1 ist ein nichtisotroper Torus des $I_3^{(2)}$ mit einem seiner Loxodromenkreise dargestellt.

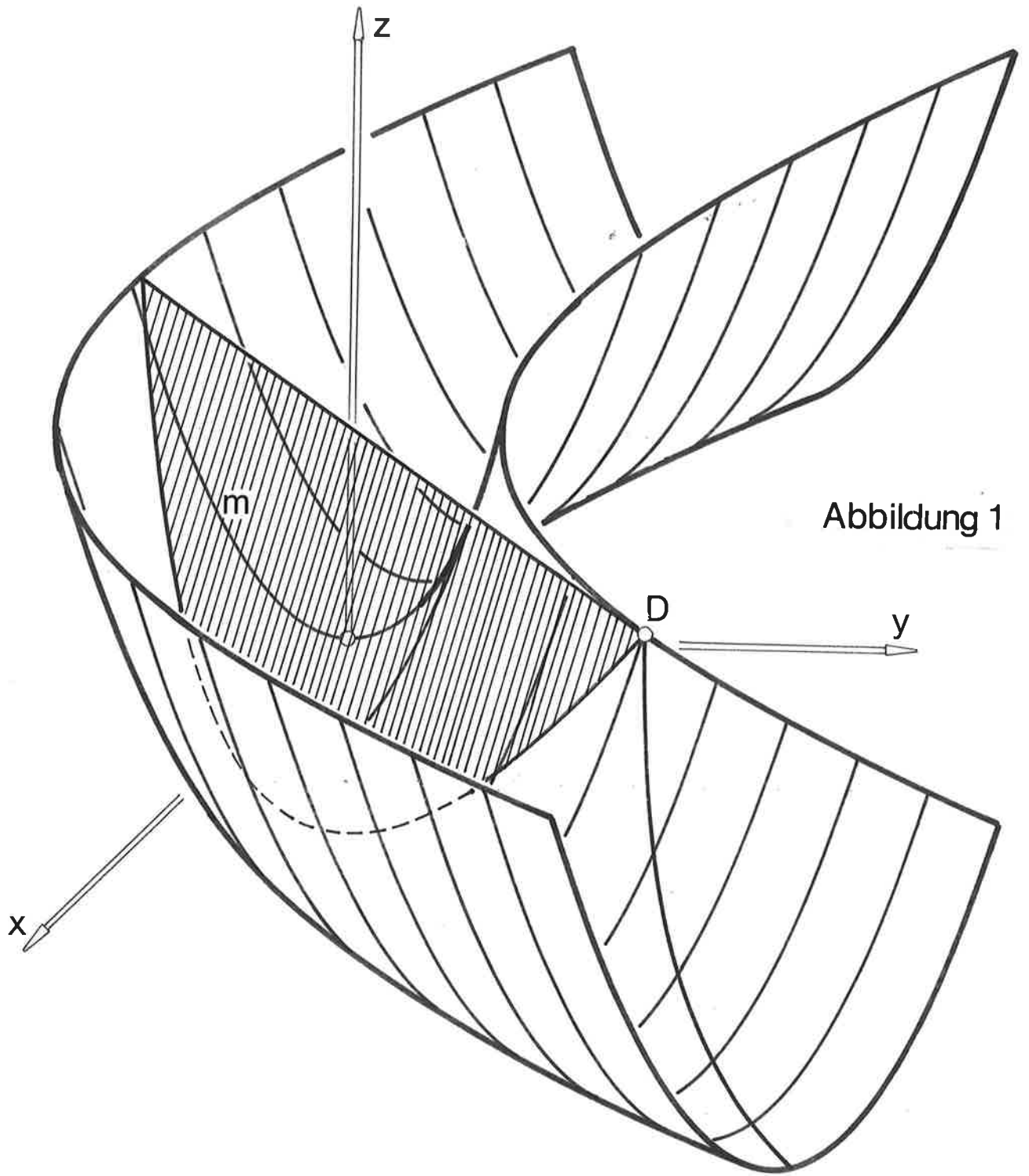


Abbildung 1

Literaturverzeichnis

- [1] H. BRAUNER, Geometrie des zweifach isotropen Raumes I, II, III. J. Reine Angew. Math. 224, 118 - 146 (1966), 226, 132 - 158, 228, 38 - 70 (1967).
- [2] D. PALMAN, Über die Kugelschnitte der Torusfläche des isotropen Raumes I_3 . Sb. Österr. Akad. Wiss. 187, 51 - 68 (1979).
- [3] D. PALMAN, Drehzykliden des einfach isotropen Raumes. Rad. Yug. Akad. 408, 51 - 59 (1984).
- [4] H. SACHS, Lehrbuch der isotropen Geometrie. Wiesbaden 1986.
- [5] K. STRUBECKER, Geometrie in einer isotropen Ebene. Math. Nat. Unterr. 15, 297 - 306, 343 - 351, 385 - 394 (1963).
- [6] K. STRUBECKER, Über die Kugelschnitte des Torus. Sb. Österr. Akad. Wiss. 180, 137 - 175 (1971).
- [7] W. WUNDERLICH, Durch Schiebung erzeugbare Römerflächen. Sb. Österr. Akad. Wiss. 176, 473 - 497 (1967).
- [8] W. WUNDERLICH, Über die Torusloxodromen. Mh. Math. Phys. 56, 313 - 334 (1952).

Anschrift des Autors:

Otto Röschel

Institut für Mathematik und Angewandte Geometrie

MU-Leoben

Franz-Josef-Straße 18

A-8700 Leoben