

# TORUSFLÄCHEN DES GALILEISCHEN RAUMES $\mathbb{G}_3$

von

OTTO RÖSCHEL

(Leoben)

1. Einleitung. Werden im reellen dreidimensionalen projektiven Raum  $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ <sup>1)</sup> - in dem wir Punkte wie üblich durch reelle projektive Koordinaten  $x_0:x_1:x_2:x_3 \neq 0:0:0:0$  beschreiben - eine reelle Ebene  $\omega(x_0 = 0)$  und eine reelle Gerade  $f(x_0 = x_1 = 0)$  als absolute Ebene beziehungsweise absolute Gerade angesprochen, so bilden alle  $\omega$  und  $f$  einzeln festlassenden Projektivitäten des  $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ , die mit der auf  $f$  operierenden elliptischen Involution

$$(1) \quad J : (0:0:x_2:x_3) \longrightarrow (0:0:x_3:-x_2)$$

kommutieren, eine achtgliedrige Gruppe

$$(2) \quad \begin{aligned} x_0' &= x_0 \\ x_1' &= ax_0 + ax_1 \\ x_2' &= bx_0 + cx_1 + \rho \cdot \cos \varphi \cdot x_2 + \rho \cdot \sin \varphi \cdot x_3 \\ x_3' &= dx_0 + ex_1 - \rho \cdot \sin \varphi \cdot x_2 + \rho \cdot \cos \varphi \cdot x_3 \end{aligned}$$

( $a, b, c, d, e, \varphi, \rho \in \mathbb{R}$ ,  $a\rho \neq 0$ ), die gemäß [9] Ähnlichkeitsgruppe eines galileischen Raumes  $\mathbb{G}_3$  genannt wird. Die Geometrie dieser

---

1) Fallweise werden wir auch die komplexe Erweiterung  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  benützen.

Ähnlichkeitsgruppe war Gegenstand der Untersuchungen von P.Г. ВУХАРАЕВ [1] und A.И. СИПОТА [2]. Die in (2) durch  $\alpha = \rho = 1$  ausgezeichnete sechsgliedrige Untergruppe, die in den üblichen affinen Koordinaten  $1:x:y:z = x_0:x_1:x_2:x_3$  ( $x_0 \neq 0$ ) durch

$$\begin{aligned} x' &= a + x \\ (3) \quad y' &= b + cx + y \cdot \cos \varphi + z \cdot \sin \varphi \\ z' &= d + ex - y \cdot \sin \varphi + z \cdot \cos \varphi \end{aligned}$$

beschrieben wird, wurde in [9] vom Autor als *Bewegungsgruppe*  $B_6$  des galileischen Raumes  $G_3$  bezeichnet und liegt den Untersuchungen in [9] zugrunde.

2. Kreise und Drehungen des galileischen Raumes  $G_3$ . In [9] wurden *Kreise des  $G_3$*  ausführlich untersucht: Es existieren zwei verschiedene Typen von Kreisen. Die einen liegen in Ebenen, die die absolute Gerade  $f$  enthalten, die anderen nicht. Im ersten Fall schneiden die Kreise die absolute Gerade  $f$  in den konjugiert komplexen Doppelpunkten  $(0:0:1:\pm i)$  der elliptischen Involution  $J(1)$ , im zweiten Fall handelt es sich um Parabeln, deren Fernpunkt im Schnittpunkt der Trägerebene mit der absoluten Geraden  $f$  liegt. Kreise des ersten Typs wurden in [9] als *euklidische Kreise*, solche des zweiten Typs als *isotrope Kreise* bezeichnet. Analog existieren im  $G_3$  nach [9, S.15f.] zwei verschiedene Klassen von *Drehungen*.

(A) *Euklidische Drehungen*: Sie werden in der Normalform durch

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \\ (4) \quad y(t) &= y_0 \cdot \cos t + z_0 \cdot \sin t & t \in [0, 2\pi] \\ z(t) &= -y_0 \cdot \sin t + z_0 \cdot \cos t \end{aligned}$$

beschrieben und besitzen die  $x$ -Achse als Fixpunktgerade, die wir im folgenden als *Drehachse*  $a$  bezeichnen; die *Bahnkurven* sind *euklidische Kreise* in Ebenen des Büschels um die absolute Gerade  $f$ . Diese Drehungen können auch als Drehungen in einem geeignet gewählten euklidischen Raum aufgefaßt werden.

(B) *Isotrope Drehungen*: Sie werden in der Normalform durch

$$(5) \quad \begin{aligned} x(t) &= x_0 + bt \\ y(t) &= y_0 + x_0 t + b \frac{t^2}{2} \\ z(t) &= z_0 \end{aligned} \quad (b \in \mathbb{R}/\{0\}, t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\})$$

beschrieben. Die Bahnkurven sind *isotrope Kreise* mit dem isotropen Radius  $b^2$ ); die absolute Gerade  $f$  bleibt punktweise fest. Als *Meridianschnitte* von Drehflächen des Typs B sind damit die Schnitte mit Ebenen des Büschels um  $f$  anzusehen. Diese isotropen Drehungen lassen sich als Drehungen in einem geeignet gewählten Flaggenraum  $I_3^{(2)}$  auffassen und wurden in diesem Zusammenhang bereits von H. SACHS [10] angegeben. Die entstehenden Drehflächen lassen sich nach [10] auch durch *Schiebung* der Meridiankurven längs der kongruenten isotropen Drehkreise erzeugen.

3. Normalformen der Torusflächen des  $G_3$ . Analog einer möglichen euklidischen Definition wollen wir jene *Drehflächen* des  $G_3$  als *Torusflächen* ansprechen, deren *Meridiankurven* Kreise sind. Wir werden dabei die beiden Drehungstypen getrennt untersuchen und

2) Dieser Radius ist im Sinne der ebenen isotropen Geometrie (vgl. K. STRUBECKER [11]) zu verstehen. Die Bewegungsgruppe  $B_6$  (3) induziert nämlich in jeder  $f$  nicht enthaltenden Ebene eine ebene isotrope Geometrie mit der Ferngeraden und dem Schnittpunkt der Ebene mit  $f$  als Absolutgebilde.

gelangen so zu zwei verschiedenen Klassen von Torusflächen:

(A) Die Meridiankurve  $m$  ist ein isotroper Kreis, der oBdA durch  $(v, 2pv^2 - A, 0)$  ( $v \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ,  $p \in \mathbb{R}/\{0\}$ ,  $A \in \mathbb{R}$ ) beschrieben wird.

Bei der Drehung (4) überstreicht  $m$  die Torusfläche vom Typ A  $\Phi_A$

$$(6) \quad (v, (2pv^2 - A) \cdot \cos t, -(2pv^2 - A) \cdot \sin t),$$

deren Gleichung

$$(7) \quad y^2 + z^2 = (2px^2 - A)^2$$

lautet. Die Dreh- und Meridiankreise bilden nach [9] die isotropen Flächenkurven und die Krümmungslinien der Fläche  $\Phi_A$ .  $\Phi_A$  ist eine algebraische Fläche vierter Ordnung, deren Doppelkurve aus der doppelt zu zählenden absoluten Geraden  $f$  besteht. Die absoluten Punkte  $(0:0:1:\pm i)$  sind uniplanare Knoten von  $\Phi_A$ ; die entsprechenden Tangentialebenen werden durch  $y^2 + z^2 = 0$  beschrieben. Je nach dem Schnitt der Meridiankurve  $m$  mit der Drehachse  $a$  stellen sich drei Typen von Torusflächen  $\Phi_A$  ein:

(A1)  $\frac{A}{p} > 0: \Phi_A$  werde als Spindeltorus bezeichnet; es existieren zwei reelle konische Knoten auf der Drehachse.

(A2)  $A = 0: \Phi_A$  werde als Dorntorus bezeichnet; die beiden konischen Knoten sind zusammengefallen.

(A3)  $\frac{A}{p} < 0: \Phi_A$  werde als Ringtorus bezeichnet; es existieren zwei konjugiert komplexe konische Knoten.

Keine Fläche dieser drei Typen besitzt Plattkegelschnitte; die einzigen auf  $\Phi_A$  gelegenen Geraden sind neben  $f$  die Schnittgeraden von  $\Phi_A$  mit den beiden konjugiert komplexen Ebenen  $x^2 + y^2 = 0$ . Diese Geraden verbinden die absoluten Punkte  $(0:0:1:\pm i)$  mit den

konischen Knoten  $(2p:\pm\sqrt{A}:0:0)$  auf der Drehachse  $a$ . Wir fassen zusammen in

Satz 1: Wird ein isotroper Kreis  $m$  des galileischen Raumes  $\mathbb{G}_3$  einer euklidischen Drehung des  $\mathbb{G}_3$  unterworfen, deren Drehachse  $a$  in derselben Ebene wie  $m$  liegt, so entsteht eine algebraische Fläche vierter Ordnung  $\Phi_A$ , die als Torusfläche vom Typ A im  $\mathbb{G}_3$  anzusprechen ist.  $\Phi_A$  trägt im algebraischen Sinn zwei konische Knoten auf der Drehachse und zwei konjugiert komplexe uniplanare Knoten in den absoluten Punkten  $(0:0:1:\pm i)$ . Neben der absoluten Geraden  $f$  sind die einzigen auf  $\Phi_A$  gelegenen Geraden die paarweise konjugiert komplexen Verbindungsgeraden der konischen Knoten mit den absoluten Punkten  $(0:0:1:\pm i)$ .

(B) Die Meridiankurve  $m$  ist ein euklidischer Kreis, der  $oBdA$  durch  $(0, R \cdot \cos u, R \cdot \sin u)$  ( $u \in [0, 2\pi]$ ,  $R \in \mathbb{R}/\{0\}$ ) beschrieben werden kann.  $m$  beschreibt bei der isotropen Drehung (5) die Fläche  $\Phi_B$

$$(8) \quad (bt, R \cdot \cos u + b \frac{t^2}{2}, R \cdot \sin u),$$

die durch die algebraische Gleichung

$$(9) \quad (y - \frac{x^2}{2b})^2 = R^2 - z^2$$

erfaßt wird. Es handelt sich dabei wegen  $R \neq 0$  um eine Fläche vierter Ordnung, deren Doppelkurve aus der doppelt zu zählenden absoluten Geraden  $f$  besteht. Die absoluten Punkte  $(0:0:1:\pm i)$  sind konische Knoten der Fläche, während der Fernpunkt  $F(0:0:1:0)$  der isotropen Drehkreise als Zwickpunkt aufzufassen ist.  $\Phi_B$  ist nach obigem auch durch Schiebung von  $m$  längs der isotropen Drehkreise erzeugbar und besitzt daher zwei isotrope Plattkreise  $p_1$

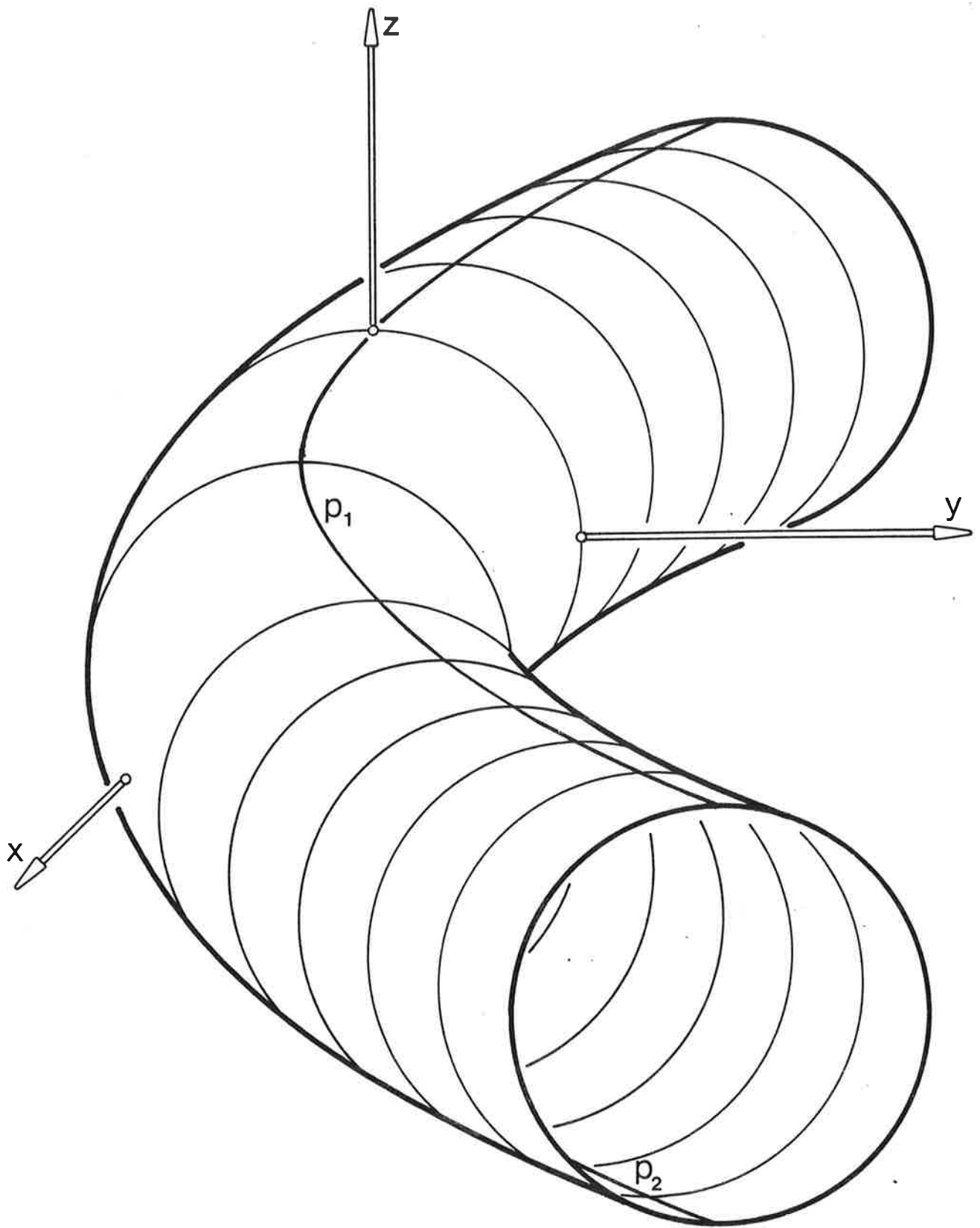


Abbildung 1

und  $p_2$  in den Ebenen  $z = \pm R$ , die in Abbildung 1 eingetragen sind. Die Abbildung 1 zeigt  $\Phi_B$  in einem galileischen Normalriß in die Ebene  $x = 0$ . Wieder sind die isotropen Drehkreise und die Meridiankreise Krümmungslinien bzw. isotrope Flächenkurven von  $\Phi_B$  (vgl. [9]).

Abbildung 1

Wir notieren den

Satz 2: Wird ein euklidischer Kreis  $m$  des galileischen Raumes  $G_3$  einer isotropen Drehung des  $G_3$  unterworfen, so entsteht eine algebraische Fläche vierter Ordnung  $\Phi_B$ , die als Torusfläche vom Typ B des  $G_3$  anzusprechen ist.  $\Phi_B$  (9) besitzt konische Knoten in den absoluten Punkten  $(0:0:1:\pm i)$  und einen Zwickpunkt in  $(0:0:1:0)$  sowie zwei isotrope Plattkreise und läßt sich auch als Schiebfläche erzeugen.

4. VILLARCEAU-Kreise auf dem Ringtorus des  $G_3$ . Analog zu den auf dem euklidischen Ringtorus existierenden VILLARCEAU-Kreisen (vgl. [14, S.154]) gibt es auch auf den Ringtorusflächen  $\Phi_A$  ( $p_A < 0$ ) im  $G_3$  eine solche reelle Kreisschar: Die Ebenen

$$(10) \quad y = \pm Bx \quad \text{mit} \quad B = \sqrt{-8Ap}$$

sind wegen  $Ap < 0$  reelle Doppeltangentialebenen des Ringtorus (7). Sie schneiden den Torus nach

$$(11) \quad y = \pm Bx, \quad z = \pm \left( \frac{y^2}{4A} - A \right);$$

der Schnitt zerfällt damit in je ein Paar isotroper Kreise, die wir als VILLARCEAU-Kreise des galileischen Ringtorus  $\Phi_A$  bezeichnen.<sup>3)</sup> Durch Drehung um die Achse  $a$  entsteht daraus eine stetige Schar solcher Kreise. Wir fassen zusammen im

Satz 3: Ringtorusflächen des galileischen Raumes  $G_3$  werden von ihren Doppeltangentialebenen nach isotropen Kreispaaren geschnitten; diese Ebenen umhüllen einen Drehkegel mit der Torusachse als Achse.

Einer der in (11) angegebenen VILLARCEAU-Kreise  $k$  kann in (6)

durch  $\cos t = \frac{Bv}{2pv^2 - A}$  bzw.  $\sin t = \frac{2pv^2 + A}{2pv^2 - A}$  erfaßt werden; wir

erhalten damit als Parameterdarstellung dieses isotropen Kreises

$$(12) \quad (v, Bv, -2pv^2 - A) \quad (v \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}).$$

Die VILLARCEAU-Kreise des euklidischen Ringtorus schneiden die Meridiankreise unter festem Winkel (vgl. [14, S.155]). Wir zeigen, daß dies auch auf dem galileischen Ringtorus gilt - die galileischen VILLARCEAU-Kreise sind somit galileische *Loxodromenkreise* der isotropen Meridiankreise: In den Punkten des VILLARCEAU-

---

3) Für den Spindeltorus fallen diese Doppeltangentialebenen und auch die VILLARCEAU-Kreise komplex aus; für den Dorntorus werden die Ebenen zu den Meridianebenen, die Kreise zu den Meridiankreisen. Es sei auch bemerkt, daß Torusflächen vom Typ B (9) keine derartige reelle stetige Kreisschar tragen.



Kreises (12) besitzen die Meridiankreise die Tangentenvektoren

$$(1, 4pv \frac{Bv}{2pv^2 - A'} - 4pv \frac{4pv^2 + A}{4pv^2 - A});$$

die Tangenten an den isotropen Kreis  $k$  (12) haben die Richtungsvektoren  $(1, B, -4pv)$ . Der Winkel zwischen diesen Vektoren kann im galileischen Raum  $\mathbb{G}_3$  nach [9] als Abstand der zugehörigen Fernpunkte gemessen werden. Dieser Abstand ist ein *euklidischer Abstand*, da von der Bewegungsgruppe  $B_6$  in der Fernebene genau jene ebene euklidische Metrik induziert wird, für die  $f$  die Ferngerade und  $J(1)$  die Rechtwinkelinvolution ist. Mit [9, S.9] erhalten wir für unseren Winkel

$$(13) \quad \Delta = B = \text{konst} \quad (\forall v \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}).$$

Wir haben damit den

Satz 4: Die isotropen VILLARCEAU-Kreise der Ringtorusflächen des galileischen Raumes  $\mathbb{G}_3$  schneiden die isotropen Meridiankreise unter konstantem galileischen Winkel und sind damit als Loxodromenkreise des galileischen Ringtorus anzusprechen.

Längs  $k$  (12) besitzt der Ringtorus Flächennormalen (vgl. [9, S.97]) mit dem Richtungsvektor

$$(14) \quad \mathcal{N} = (0, Bv, -(2pv^2 + A));$$

die Flächennormalen erfüllen die Regelfläche  $\Psi$

$$(15) \quad (v, Bv(1 + \lambda), -(2pv^2 + A)(1 + \lambda)) \quad (\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\})$$

mit der algebraischen Gleichung

$$(16) \quad Bxz + y(2px^2 + A) = 0.$$

$\Psi$  ist eine Regelfläche dritten Grades mit der absoluten Geraden  $f$

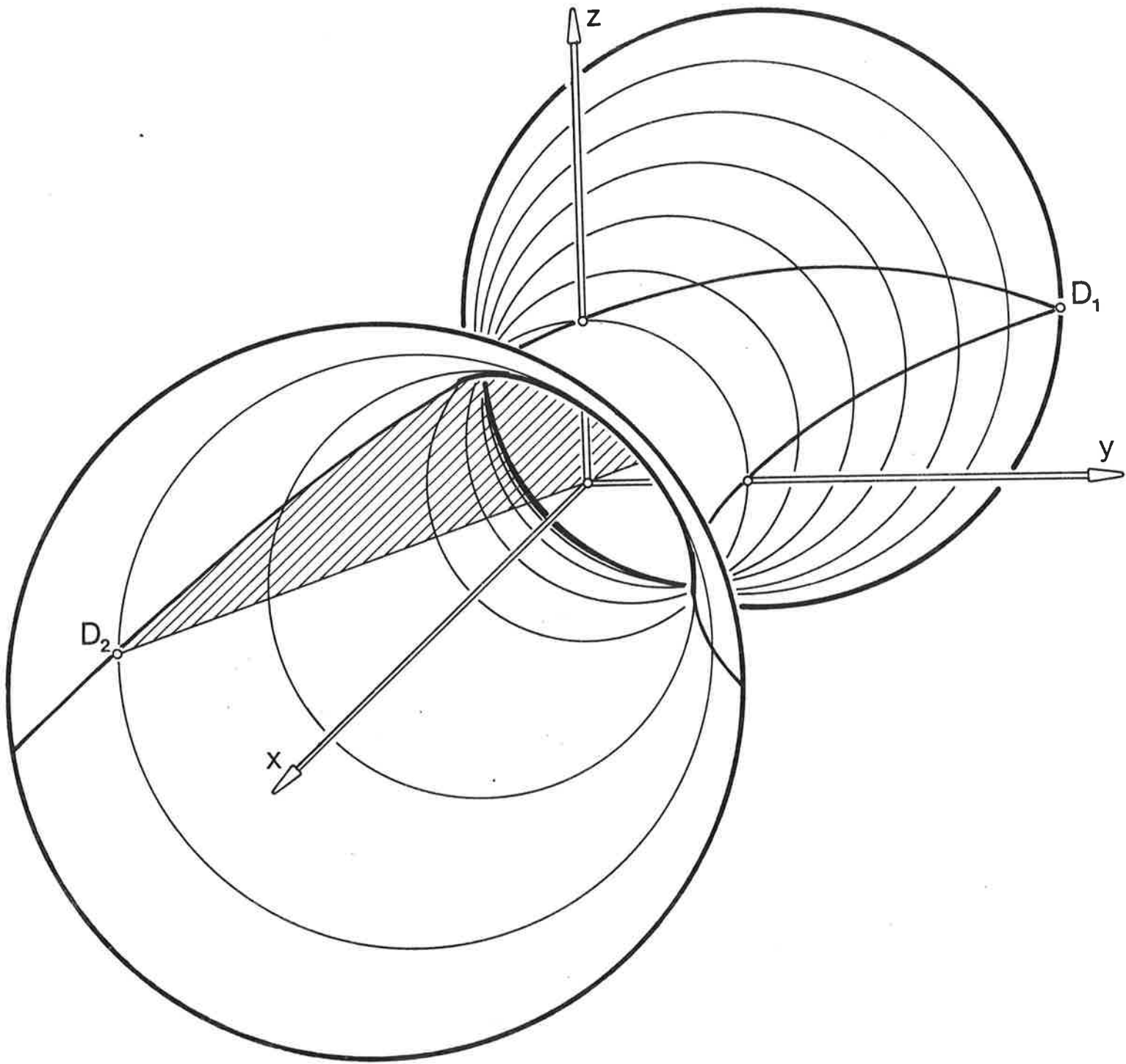


Abbildung 2

als Doppelgerade und der Torusachse  $a$  ( $x$ -Achse) als einfache Leitgerade; das konjugiert komplexe Ebenenpaar

$$(17) \quad y^2 + z^2 = 0$$

bildet die beiden  $\Psi$  berührenden Torsalebene.  $\Psi$  ist daher nach [4, S.176] eine Regelfläche dritten Grades II. Typs. Im  $\mathbb{G}_3$  liegt ein gerades Konoid vor, das nach [9, S.72] dem Typ C zuzuordnen ist. Wir haben damit den<sup>4)</sup>

Satz 5: Die von den Flächennormalen in den Punkten eines VILLARCEAU'schen Kreises des galileischen Ringtorus gebildete Regelfläche  $\Psi$  ist von drittem Grad und II. Typ; im galileischen Raum  $\mathbb{G}_3$  liegt ein gerades Konoid vor, das dem Typ C zuzuordnen ist.  $\Psi$  besitzt die absolute Gerade  $f$  als Doppelgerade und die Drehachse des Torus als einfache Leitgerade.

**Abbildung 2**

In Abbildung 2 ist ein Ringtorus mit einem VILLARCEAU'schen Kreis in einer galileischen normalen Axonometrie mit der Bildebene  $x = 0$  dargestellt.

5. Loxodromen auf den Torusflächen vom Typ A. Jene Flächenkurven  $v = v(t)$  ( $v \in C^1[0, 2\pi]$ ) der Torusflächen (6), die sämtliche Meridiankreise ( $v = \text{konst.}$ ) unter konstantem galileischen Winkel  $a$

---

4) Längs einem VILLARCEAU'schen Kreis eines euklidischen Torus stellt sich bekanntlich eine Regelfläche 4. Grades VII. Sturmscher Art als Normalenfläche ein (vgl. [4, S. 283 f.]).

schneiden, bezeichnen wir als *Loxodromen*.<sup>5)</sup> Sie sind mit [9, S. 9] durch

$$(18) \quad \frac{dv}{dt} = \frac{2pv^2 - A}{a} \quad a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

gekennzeichnet. Je nach Typ der Torusfläche ergeben sich die folgenden Lösungskurven der Differentialgleichung (18):

$$v(t) = -\sqrt{\frac{A}{2p}} \cdot \tanh \left( \frac{t + K}{a} \sqrt{2Ap} \right) \quad \text{für den Spindeltorus,}$$

$$(19) \quad v(t) = -\frac{a}{2p(t+K)} \quad \text{für den Dorntorus und}$$

$$v(t) = \sqrt{\frac{-A}{2p}} \cdot \tan \left( \frac{t + K}{a} \sqrt{-2Ap} \right) \quad \text{für den Ringtorus.}$$

K stellt dabei eine reelle Integrationskonstante dar. Für  $a = \sqrt{-8Ap}$  erhalten wir auf dem Ringtorus die in Abschnitt 4 untersuchten Loxodromenkreise.<sup>6)</sup>

Die Tangenten aller zu einem festen Winkel  $a \in \mathbb{R} - \{0\}$  gehörenden Torusloxodromen erfüllen die Geradenkongruenz S mit der Parameterdarstellung

$$(20) \quad \varphi(t, u, v) = (v + u, [2pv^2 - A] \cdot \cos t + u[4pv \cdot \cos t - a \cdot \sin t], \\ -[2pv^2 - A] \cdot \sin t - u[4pv \cdot \sin t + a \cdot \cos t]) .$$

Diese Kongruenz kann in eine einparametrische Schar kongruenter Regelscharen zweiten Grades zerlegt werden, die von den längs den Meridianen auftretenden Loxodromentangenten erfüllt werden. Ihre Trägerflächen sind *hyperbolische Paraboloid*e; so stellt sich für  $t = 0$  das hyperbolische Paraboloid mit der Gleichung

---

5) Für den euklidischen Raum gibt W. WUNDERLICH in [13, S.313 f.] die analogen Resultate an.

6) Für  $K = -\Pi$  stellt sich der Loxodromenkreis (12) ein.

$$(21) \quad F := 2p(a^2 x^2 - z^2) - a^2(y + A) = 0$$

ein. Das *Brennflächenpaar* der Kongruenz  $S$  ist somit das Hüllflächenpaar jener durch Drehung um die Torusachse aus (21) hervorgehenden Schar von Paraboloiden. Dabei ist die Charakteristik von (21) durch

$$(22) \quad \frac{dF}{dy} : \frac{dF}{dz} = a^2 : 4pz = y : z$$

gekennzeichnet. Sie besteht damit aus dem *Torusmeridian*  $m$  ( $z = 0$  in (21) bzw.  $t = u = 0$  in (20)) und der in der Ebene  $y = \frac{a^2}{4p}$  gelegenen *Hyperbel* mit der Parameterdarstellung

$$(23) \quad (x, y, z) = \left( \frac{C}{a} \cdot \cosh s, \frac{a^2}{4p}, C \cdot \sinh s \right)$$

( $s \in [0, 2\pi]$ ,  $C^2 = \frac{a^2}{2p} (A + \frac{a^2}{4p})$ ). Durch euklidische Drehung der beiden Teile dieser Charakteristik entsteht einerseits der *Ausgangstor* und andererseits das *Hyperboloid* mit der Parameterdarstellung

$$(24) \quad \left( \frac{C}{a} \cdot \cosh s, \frac{a^2}{4p} \cdot \cos t + C \cdot \sinh s \cdot \sin t, \right. \\ \left. - \frac{a^2}{4p} \cdot \sin t + C \cdot \sinh s \cdot \cos t \right)$$

und der algebraischen Gleichung

$$(25) \quad a^2 x^2 - y^2 - z^2 = \frac{a^2}{2p} \left( A + \frac{a^2}{8p} \right).$$

Genau für die *Loxodromenkreise* ( $a = \sqrt{-8Ap}$ ) wird dieses Hyperboloid zu einem *Drehkegel*. Wir haben damit den

Satz 6: Auf den galileischen Torusflächen  $\Phi_A$  vom Typ  $A$  erfüllen die Tangenten der zu einem festen Kurswinkel  $\alpha \in \mathbb{R}/\{0\}$  gehörenden

Torusloxodromen die in (20) beschriebene Strahlkongruenz  $S$ , deren Brennflächen vom Torus  $\Phi_A$  selbst und im allgemeinen von einem zum Torus koaxialen Drehhyperboloid gebildet werden.

6. Loxodromen auf den Torusflächen vom Typ B. Da die Meridiankreise auf der Torusfläche  $\Phi_B$  (9) in euklidischen Ebenen liegen, werden wir zur Definition der Loxodromen die in der Parameterdarstellung (8) durch  $u = \text{konst.}$  erfaßten Drehkreise heranziehen und jene Flächenkurven  $t = t(u)$  ( $t \in C^1[0, 2\pi]$ ) als Loxodromen bezeichnen, die sämtliche Drehkreise unter konstantem galileischen Winkel  $a \neq 0$  schneiden. Sie sind durch

$$(26) \quad \frac{dt}{du} = \frac{R}{ba}$$

gekennzeichnet und werden daher durch

$$(27) \quad t(u) = \frac{R}{ba} (u + K) \quad (K = \text{konst} \in \mathbb{R})$$

erfaßt. Als Parameterdarstellung der Loxodromen erhalten wir somit

$$(28) \quad \left( \frac{R}{a}(u + K), \frac{R^2}{2ba^2} (u + K)^2 + R \cdot \cos u, R \cdot \sin u \right).$$

Werden diese Loxodromen aus dem Zwickpunkt  $F$  (0:0:1:0) der Fläche in die  $[x, z]$ -Ebene projiziert, so entstehen Sinuslinien.<sup>7)</sup> Wir haben damit den

Satz 7: Die Loxodromen der Torusflächen vom Typ B erscheinen bei Normalprojektion aus dem absoluten Punkt der Drehkreise auf eine dazu galileisch orthogonale Ebene als Sinuslinien.

---

7) Das euklidische Analogon hat W. WUNDERLICH in [14, S.321] bewiesen.

Die Tangenten aller zu einem festen Kurswinkel  $a \in \mathbb{R}/\{0\}$  gehörenden Torusloxodromen erfüllen hier die Geradenkongruenz  $T$  mit der Parameterdarstellung

$$(29) \quad \varphi(t, u, v) = (bt, R \cdot \cos u + \frac{bt^2}{2}, R \cdot \sin u) + \\ + v \cdot (1, -a \cdot \sin u + t, a \cdot \cos u). \quad (v \in \mathbb{R} \cup \{\infty\})$$

Längs dem Meridiankreis  $m$  ( $t = 0$ ) bilden die Loxodromentangenten den *Regulus*

$$(30) \quad \varphi(u, v) = (0, R \cdot \cos u, R \cdot \sin u) + v \cdot (1, -a \cdot \sin u, a \cdot \cos u)$$

auf dem *galileischen Drehhyperboloid*  $H$  mit der Gleichung

$$(31) \quad a^2 x^2 + R^2 = y^2 + z^2.$$

Bei der den Torus erzeugenden isotropen Drehung (5) besitzt dieses Drehhyperboloid  $H$  die *Brennflächen* der Geradenkongruenz  $T$  als Hüllflächen. Die Punkte der Charakteristik  $c$  von  $H$  sind dabei in (30) durch

$$(32) \quad \det \left( \frac{d\varphi}{du}, \frac{d\varphi}{dv}, \mathcal{A} \right) = 0 \quad \text{mit} \quad \mathcal{A} = (b, v, 0)$$

gekennzeichnet.<sup>8)</sup> Nach kurzer Rechnung erkennen wir, daß  $c$  aus dem Torusmeridiankreis  $m$  ( $v = 0$  in (30)) und einer *Hyperbel*  $h$  in der Ebene  $y = a^2 b$  besteht, wobei letztere bei der isotropen Drehung (5) das *hyperbolische Paraboloid*

$$(33) \quad a^2(2by - x^2) + z^2 = a^4 b^2 + R^2$$

überstreicht.

---

8)  $\mathcal{A}$  stellt den Tangentenvektor der Punkte  $\varphi(u, v)$  (30) bei der isotropen Drehung (5) zum Zeitpunkt  $t = 0$  dar.

Wir haben damit den

Satz 8: Auf den galileischen Torusflächen  $\Phi_B$  vom Typ B erfüllen die Tangenten der zu einem festen Kurswinkel  $\alpha \in \mathbb{R}/\{0\}$  gehörenden Torusloxodromen die in (29) beschriebene Strahlkongruenz  $T$ . Die Brennflächen dieser Kongruenz sind der Ausgangstorus und ein hyperbolisches Paraboloid, das die den Torus erzeugende isotrope Drehung gestattet.



LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Р.Г. БУХАРАЕВ, О поверхностях евклидова пространства с вырождающимся абсолютом. Уч. зап. Казанского гос. ун - та. 114, кн. 2, 39 - 52 (1954).
- [2] А.И. СИРОТА, Геометрия трехмерного пространства с вырожденной евклидовой метрикой. Уч. зап. Моск. Гос. пед. Инст. им. Ленина, 268 - 314 (1963).
- [3] F. HOHENBERG, Zerfallende Schnitte des Torus mit den Quadriken eines Büschels. Sb. Österr. Akad. Wiss., math.-nat. Kl.II, 180, 387 - 404 (1971).
- [4] E. MÜLLER und J. KRAMES, Konstruktive Behandlung der Regelflächen. Leipzig - Wien 1931.
- [5] J. KRAMES, Die Striktionslinie der Normalenfläche des Torus längs eines Loxodromenkreises. Sb. Österr. Akad. Wiss., math.-nat. Kl.II, 128, 1 - 12 (1919).
- [6] J. KRAMES, Über die Loxodromen vierter Ordnung auf Kreisringflächen. Sb. Österr. Akad. Wiss., math.-nat. Kl.II, 180, 35 - 48 (1971).
- [7] D. PALMAN, Kugelschnitte der Torusfläche des isotropen Raumes  $I_3$ . Sb. Österr. Akad. Wiss., math.-nat. Kl.II, 187, 51 - 68 (1979).
- [8] D. PALMAN, Sphärische Quartiken auf dem Torus im einfach isotropen Raum. Glasnik Mat. 14, 345 - 357 (1979).
- [9] O. RÖSCHEL, Die Geometrie des galileischen Raumes. Ber. Math.-Stat. Sekt. Forschungszent. Graz (im Druck).
- [10] H. SACHS, Lehrbuch der isotropen Geometrie. Wiesbaden 1986.

- [11] K. STRUBECKER, Geometrie in einer isotropen Ebene. Math. Nat. Unterr. 15, 297 - 306, 343 - 351, 385 - 394 (1962/63).
- [12] K. STRUBECKER, Über die Kugelschnitte des Torus. Sb. Österr. Akad. Wiss., math.-nat. Kl.II, 180, 137 - 175 (1971).
- [13] W. WUNDERLICH, Über die Torusloxodromen. Mh. Math. Phys. 56, 313 - 334 (1952).
- [14] W. WUNDERLICH, Darstellende Geometrie I. Mannheim 1966.

Anschrift des Autors:

Otto Röschel

Institut für Mathematik und Angewandte Geometrie

MU-Leoben

Franz-Josef-Straße 18

A-8700 Leoben