

## EINE VERALLGEMEINERUNG DER BERTRANDKURVEN

JOHANN LANG UND OTTO RÖSCHEL (GRAZ)

**Abstract.** A curve  $c$  in  $E_3$  defines a unique FRENET motion  $\xi_i$  of order  $i$  ( $i \in N$ ); its moving frame is the FRENET frame of  $i$ -th order (ST. BILINSKI [3]). Two curves with the same FRENET motion of order 1 form a pair of BERTRAND curves. IF the FRENET motion of order  $k$  of  $c$  is also a FRENET motion of order  $k$  of another curve  $\bar{c}$ , we call  $c$  a " $\mathcal{B}$ -curve of order  $k$ ". In this paper we give a representation of  $\mathcal{B}$ -curves of order 2.

**1. Einleitung.** In [3] hat ST. BILINSKI folgende Verallgemeinerung der BERTRANDkurven des euklidischen Raumes  $E_3$  vorgenommen: Bei einem auf die Bogenlänge  $s \in [0, 1] \subset \mathfrak{R}$  parametrisierten wendepunktfreien  $C^k$ -Kurvenstück ( $k \in N$ ,  $k \leq 3$ )  $\mathbf{x}(s)$  bezeichnen wir den Tangenten-, Haupt- und Binormaleneinheitsvektor mit  $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_1(s)$ ,  $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_1(s)$  und  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1(s)$ , Krümmung und Torsion mit  $\kappa_1, \tau_1$ , durch Striche kennzeichnen wir die Ableitung nach der Bogenlänge  $s$ .

ST. BILINSKI definiert die Invarianten  $(i + 1)$ -ter Art für  $i = 1, \dots, k - 3$

$$\kappa_{i+1} = \sqrt{\kappa_i^2 + \tau_i^2}, \quad \tau_{i+1} = \frac{\kappa_i \tau_i' - \kappa_i' \tau_i}{\kappa_i^2 + \tau_i^2} \quad (1)$$

und das Begleitdreibein  $(i + 1)$ -ter Art durch

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{i+1} &= \mathbf{n}_i \\ \mathbf{n}_{i+1} &= \mathbf{b}_{i+1} \times \mathbf{t}_{i+1} \\ \mathbf{b}_{i+1} &= \frac{\kappa_i}{\kappa_{i+1}} \mathbf{b}_i + \frac{\tau_i}{\kappa_{i+1}} \mathbf{t}_i. \end{aligned} \quad (2)$$

rekursiv. Als Ableitungsgleichungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}'_i &= \kappa_i \mathbf{n}_i \\
\mathbf{n}'_i &= -\kappa_i \mathbf{t}_i + \tau_i \mathbf{b}_i \\
\mathbf{b}'_i &= -\tau_i \mathbf{n}_i.
\end{aligned}
\tag{3}$$

Die vom Kurvenpunkt  $\mathbf{x}(s)$  ausgehenden Geraden  $\mathbf{t}_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{b}_i$  mit den Richtungsvektoren  $\mathbf{t}_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{b}_i$  heißen "Tangente", "Hauptnormale" und "Binormale  $i$ -ter Art".

Den durch die Lagen von  $\mathbf{t}_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{b}_i$  mit  $\mathbf{x}(s)$  eindeutig verbundenen Zwanglauf  $\zeta_i$  des begleitenden Dreibeins  $i$ -ter Art gegenüber dem Rastraum definieren wir als "Begleitzwanglauf  $i$ -ter Art" ("FRENETzwanglauf  $i$ -ter Art").

Kurvenpaare mit derselben Hauptnormalenfläche  $i$ -ter Art werden in [3] "BERTRANDkurven  $i$ -ter Art" genannt. In [3] wird für BERTRANDkurvenpaare 2. Art folgendes Resultat hergeleitet:

*Zwei  $C^4$ -Kurven besitzen genau dann dieselbe Hauptnormalenfläche zweiter Art, wenn eine (relativ komplizierte) Differentialgleichung (siehe [3, 298]) für die Krümmung und die Torsion der Ausgangskurve erfüllt ist.*

BERTRANDkurven erster Art sind die gewöhnlichen BERTRANDkurven und lassen sich bekanntlich auch auf eine andere Weise kennzeichnen: Genau für sie ist der vom Begleitdreibein erster Art (gewöhnliches Begleitdreibein) der Ausgangskurve definierte "Begleitzwanglauf erster Art" ("FRENETzwanglauf") gleichzeitig Begleitzwanglauf erster Art eines weiteren Kurvenstückes. Diese kinematische Charakterisierung von BERTRANDkurvenpaaren (erster Art) kann für die Auszeichnung spezieller Raumkurvenpaare herangezogen werden, deren Begleitzwangläufe zweiter und höherer Art übereinstimmen. Die entsprechenden Raumkurven nennen wir " $\mathcal{B}$ -Kurven  $i$ -ter Art."

In der vorliegenden Arbeit werden wir  $\mathcal{B}$ -Kurven zweiter Art studieren und sie kurz " $\mathcal{B}$ -Kurven" nennen. Die in [3] angegebenen BERTRANDkurvenpaare zweiter Art sind im allgemeinen keine  $\mathcal{B}$ -Kurven, weil der Abstand entsprechender Punkte im allgemeinen vom Parameter  $s$  abhängt.

## 2. Das Begleitdreibein zweiter Art. Für $i = 1, 2$ ergibt sich aus (3)

$$\mathbf{t}'_1 = \kappa_1 \mathbf{n}_1, \quad \mathbf{n}'_1 = -\kappa_1 \mathbf{t}_1 + \tau_1 \mathbf{b}_1, \quad \mathbf{b}'_1 = -\tau_1 \mathbf{n}_1
\tag{4}$$

und

$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{n}_1, \quad \mathbf{n}_2 = -\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \mathbf{t}_1 + \frac{\tau_1}{\kappa_2} \mathbf{b}_1, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \mathbf{b}_1 + \frac{\tau_1}{\kappa_2} \mathbf{t}_1
\tag{5}$$

mit

$$\kappa_2 = \sqrt{\kappa_1^2 + \tau_1^2}, \quad \tau_2 = \frac{\kappa_1 \tau_1' - \kappa_1' \tau_1}{\kappa_1^2 + \tau_1^2}.
\tag{6}$$

Der Vektor  $\mathbf{b}_2$  ist der normierte DARBOUXvektor von  $\mathbf{x}(s)$ . Die von  $b_2$  überstrichene Regelfläche ist die rektifizierende Torse  $T$  von  $\mathbf{x}(s)$ , auf der  $\mathbf{x}(s)$  bekanntlich (siehe E. KRUPPA [5, 67]) eine geodätische Linie ist. Die vom DARBOUXvektor überstrichene Torse ist die einzige Torse durch  $\mathbf{x}(s)$  mit dieser Eigenschaft.

Die Gratlinie der rektifizierenden Torse besitzt das begleitende Dreibein

$$\{\mathbf{x}(s) + \frac{\kappa_1 \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}}{\kappa_1' \tau_1 - \kappa_1 \tau_1'} \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2, -\mathbf{n}_2, \mathbf{t}_2\}$$

sowie die Krümmung  $\tilde{\kappa} = \frac{\tau_2 \kappa_2}{\tau_1}$  und die Torsion  $\tilde{\tau} = \frac{\kappa_2^2}{\tau_1}$ . Wir lesen unmittelbar ab:

$$\tilde{\kappa} : \tilde{\tau} = \tau_2 : \kappa_2 = \kappa_1 \tau_1' - \kappa_1' \tau_1 : (\kappa_1^2 + \tau_1^2)^{\frac{3}{2}}. \quad (7)$$

Durch  $\tau_2 : \kappa_2 = \text{const.}$  sind "Böschungslinien zweiter Art" definiert. Aus (7) erkennen wir, daß genau für diese Kurvenklasse die rektifizierende Torse Böschungstorse ist (vergleiche [3,293]).

**3. Der Begleitzwanglauf zweiter Art.** Der Begleitzwanglauf zweiter Art<sup>1</sup>  $\Sigma^*/\Sigma$  des Kurvenstücks  $\mathbf{x}(s)$  wird durch

$$\zeta \cdots \mathbf{y} = \mathbf{x}(s) + x^* \mathbf{t}_2(s) + y^* \mathbf{n}_2(s) + z^* \mathbf{b}_2(s) \quad s \in [0, 1] \subset \mathfrak{R} \quad (8)$$

beschrieben. Die *Momentanachse*  $m$  besitzt den Richtungsvektor

$$\mathbf{m}(s) = \tau_2(s) \mathbf{t}_2(s) + \kappa_2(s) \mathbf{b}_2(s), \quad (9)$$

steht daher auf die Kurvenhauptnormale zweiter Art  $n_2$  normal, trifft sie aber i.a. nicht. Das *Gangaxoid*  $\Pi^*$  ist damit eine *konoidale Regelfläche* mit Richtebene orthogonal zu  $n_2$ . Im begleitenden Dreibein zweiter Art wird  $m$  durch

$$\kappa_2 x^* - \tau_2 z^* = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \quad \text{und} \quad y^* = -\frac{\tau_1 \tau_2}{\kappa_2 (\kappa_2^2 + \tau_2^2)}; \quad (10)$$

erfaßt. Der Momentanschraubparameter berechnet sich als

$$p = \frac{\tau_1}{\kappa_2^2 + \tau_2^2}. \quad (11)$$

Das Gemeinlot von  $m$  und der Binormalen zweiter Art  $b_2$  trifft  $b_2$  im *Gratpunkt der rektifizierenden Ebene der Ausgangskurve*. Dieses Gemeinlot ist mithin *Hauptnormale der zugehörigen Gratlinie*.

### Abbildung 1

<sup>1</sup>Mit  $\Sigma^*$  bezeichnen wir den Gangraum, mit  $\Sigma$  den Rastrum.

**4. Kennzeichnung von  $\mathcal{B}$ -Kurven.** Das Kurvenstück  $\mathbf{x}(s)$  soll nun eine  $\mathcal{B}$ -Kurve sein. Dann muß der Begleitzwanglauf zweiter Art  $\zeta$  von  $\mathbf{x}(s)$  auch für ein weiteres Kurvenstück  $\bar{\mathbf{x}}(s)$  Begleitzwanglauf zweiter Art sein. Dabei braucht allerdings  $s$  nicht auch Bogenlänge auf dem zweiten Kurvenstück zu sein. Das zu  $\bar{\mathbf{x}}(s)$  gehörende begleitende Dreibein zweiter Art  $\{\bar{\mathbf{x}}(s); \bar{\mathbf{t}}_2(s), \bar{\mathbf{n}}_2(s), \bar{\mathbf{b}}_2(s)\}$  muß im begleitenden Dreibein zweiter Art der Ausgangskurve stationär sein.

Nach Abschnitt 3 ist das Gangaxoid  $\Pi^*$  konoidal mit Richtebene orthogonal zu  $\mathbf{n}_2$ , im Fall einer  $\mathcal{B}$ -Kurve auch zu  $\bar{\mathbf{n}}_2$ . Wir unterscheiden daher im folgenden zwei Fälle:

Fall A:  $\mathbf{n}_2$  und  $\bar{\mathbf{n}}_2$  sind linear unabhängig. Das Gangaxoid  $\Pi^*$  ist dann eine Zylinderfläche -  $\zeta$  daher eine Zylinderschrotung. Für sie ist  $\mathbf{m}'$  parallel zu  $\mathbf{m}$ , woraus mit (9) unter Verwendung der Ableitungsgleichungen  $\kappa_2 : \tau_2 = \text{const.}$  folgt. Nach Abschnitt 2 ist die Ausgangskurve dann *Böschungslinie zweiter Art*, also *geodätische Linie auf einer Böschungstorse*. Bei Zylinderschrotungen laufen alle Punkte des Gangraumes  $\Sigma^*$ , die auf einer zur Momentanachse parallelen Geraden liegen, auf schiebungsgleichen Bahnen. Damit gilt der

**SATZ 1:** *Böschungslinien zweiter Art des euklidischen Dreiraumes  $E_3$  sind stets  $\mathcal{B}$ -Kurven.*

#### Abbildung 2

Fall B:  $\mathbf{n}_2$  und  $\bar{\mathbf{n}}_2$  sind linear abhängig. Es gilt daher  $\mathbf{n}_2 = \pm \bar{\mathbf{n}}_2$ . Nach Satz 1 dürfen wir Böschungslinien zweiter Art von unseren Überlegungen ausschließen. Es ist daher  $\kappa_2 : \tau_2$  nicht konstant. Abbildung 2 veranschaulicht die Situation, falls  $\mathbf{n}_2 = \bar{\mathbf{n}}_2$  gilt. Jener Punkt  $\bar{U}^*$  in  $\Sigma^*$ , der bei  $\zeta$  die Kurve  $\bar{\mathbf{x}}(s)$  überstreicht, soll die Koordinaten  $(\alpha^*/\beta^*/\gamma^*)$  besitzen. Wir unterscheiden zwei weitere Fälle: Fall  $B_1$ :  $\beta^* = 0$  und Fall  $B_2$ :  $\beta^* \neq 0$ .

Fall  $B_1$ :  $\beta^* = 0$ .  $\bar{U}^*$  und  $U^*$  liegen in der Ebene  $y^* = 0$ . Die Vektoren  $\bar{\mathbf{t}}_2, \bar{\mathbf{n}}_2, \bar{\mathbf{b}}_2$  besitzen dann in  $\Sigma^*$  die Darstellung

$$\bar{\mathbf{n}}_2 = \pm \mathbf{n}_2, \quad \bar{\mathbf{t}}_2 = \pm(\mathbf{t}_2 \sin 2\phi - \mathbf{b}_2 \cos 2\phi), \quad \bar{\mathbf{b}}_2 = \mathbf{t}_2 \cos 2\phi + \mathbf{b}_2 \sin 2\phi$$

mit konstantem  $\phi \in [0, \pi)$ . Die Gerade

$$\bar{b}_2 \dots \mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} \alpha^* \\ 0 \\ \gamma^* \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \cos 2\phi \\ 0 \\ \sin 2\phi \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathfrak{R} \quad (12)$$

muß bei  $\zeta$  die rektifizierende Torse von  $\bar{\mathbf{x}}(s)$  überstreichen. Dies ist genau dann der Fall, wenn  $\bar{b}_2$  bei  $\zeta$  eine Torse mit Tangentialebene normal zu  $\bar{t}_2$  durchläuft, auf der die Bahn von  $\bar{U}^*$  eine geodätische Linie ist (vergleiche E. KRUPPA [5,67]). Die Bahnkurven der Punkte von  $\bar{b}_2$  werden bei  $\zeta$  durch

$$\mathbf{y}(s, \lambda) = \mathbf{x}(s) + (\alpha^* + \lambda \cos 2\phi) \mathbf{t}_2 + (\gamma^* + \lambda \sin 2\phi) \mathbf{b}_2 \quad (13)$$

beschrieben. Wir erhalten als Torsenbedingung

$$0 = \frac{\partial \mathbf{y}(s, \lambda)}{\partial s} \Big|_{\lambda=0} \bar{\mathbf{t}}_2 = \mp \cos 2\phi \frac{\tau_1}{\kappa_2}. \quad (14)$$

Die Beziehung

$$\det \left( \bar{\mathbf{t}}_2, \frac{\partial \mathbf{y}(s, \lambda)}{\partial s} \Big|_{\lambda=0}, \frac{\partial^2 \mathbf{y}(s, \lambda)}{(\partial s)^2} \Big|_{\lambda=0} \right) = 0. \quad (15)$$

garantiert, daß  $\bar{U}^*$  eine geodätische Linie auf dieser Torse durchläuft. Aus (14) ist ersichtlich, daß (abgesehen von den in Satz 1 mitbehandelten ebenen Kurven)  $\cos 2\phi = 0$ , also  $\phi = \frac{\pi}{4}$  oder  $\phi = \frac{3\pi}{4}$  sein muß. (15) wird damit zu

$$(\alpha^* \kappa_2 - \gamma^* \tau_2)^2 \kappa_2 \tau_2 - (\alpha^* \kappa_2 - \gamma^* \tau_2) \kappa_1 \tau_2 = \tau_1 (\alpha^* \kappa_2' - \gamma^* \tau_2'). \quad (16)$$

(16) läßt sich zu

$$(\alpha^* \kappa_2 - \gamma^* \tau_2)^2 \kappa_2 \tau_2 = \left( \frac{\tau_1 (\alpha^* \kappa_2' - \gamma^* \tau_2')}{\kappa_2} \right)' \quad (17)$$

umformen, woraus für  $u(s) := \frac{\tau_1 (\alpha^* \kappa_2 - \gamma^* \tau_2)}{\kappa_2}$  die Lösung

$$u(s) = \frac{\tau_1}{\kappa_1 + M \tau_1} \quad (18)$$

mit einer reellen Integrationskonstanten  $M$  gewonnen werden kann. Werden  $\kappa_2$  und  $\tau_2$  gemäß (6) durch  $\kappa_1, \tau_1$  ausgedrückt, so entsteht als charakteristische Differentialgleichung einer  $\mathcal{B}$ -Kurve im Fall B1

$$[1 - \alpha^* (\kappa_1 + M \tau_1)] (\kappa_1^2 + \tau_1^2)^{\frac{3}{2}} + \gamma^* (\kappa_1 + M \tau_1) (\kappa_1 \tau_1' - \kappa_1' \tau_1) = 0. \quad (19)$$

Für beliebige Wahl von  $\alpha^*, \gamma^*$  und  $M$  existieren damit Lösungen unseres Problems. Die Ebene  $\beta^* = 0$  überstreicht bei  $\zeta$  die rektifizierende Torse der Gratlinie der rektifizierenden Torse von  $\mathbf{x}(s)$ .

Als spezielle Lösungen stellen sich für  $\gamma^* = 0$  die gewöhnlichen BERTRANDkurven ein, deren charakteristische Differentialgleichung durch

$$1 = \alpha^*(\kappa_1 + M\tau_1) \quad (20)$$

festgelegt ist.

Fall  $B_2$ :  $\beta^* \neq 0$ .  $\zeta$  führt die beiden Geraden  $b_2^*$  und  $\bar{b}_2^*$  auf Torsen  $\Phi, \bar{\Phi}$ , deren Tangentialebenen  $\varepsilon, \bar{\varepsilon}$  im Gangraum mit festen Ebenen  $\varepsilon^*, \bar{\varepsilon}^*$  übereinstimmen. Die Bahnkurven der Punkte  $U^*, \bar{U}^*$  müssen geodätische Linien auf  $\Phi$  bzw.  $\bar{\Phi}$  sein.

### Abbildung 3

Sei vorerst  $\varepsilon$  nicht parallel zu  $\bar{\varepsilon}$ . Die Schnittgerade  $\varepsilon \cap \bar{\varepsilon} =: g$  ist parallel zu  $\mathbf{n}_2$ , also ist  $g$  das Gemeinlot von  $b_2, \bar{b}_2$ . Es erweist sich für die anschließende Rechnung als zweckmäßig, im Gangsystem das folgende Koordinatensystem  $\Sigma^*$  zu verwenden: Der Ursprung  $O^*$  sei der Mittelpunkt der von den Gemeinlotfußpunkten auf  $b_2^*, \bar{b}_2^*$  gebildeten Strecke. Die  $x^*$ -Achse sei  $g^*$ , die  $y^*$ -Achse liege in einer Symmetrieebene von  $\varepsilon^*, \bar{\varepsilon}^*$ . Die Geraden  $b_2^*, \bar{b}_2^*$  besitzen dann in  $\Sigma^*$  die Darstellung

$$b_2^*, \bar{b}_2^* : \quad \mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} \pm\delta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \phi \\ \pm \sin \phi \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Die Punkte  $U, \bar{U}$  gehören in  $\Sigma^*$  zu Punkten  $U^*, \bar{U}^*$  mit den zwei reellen Parametern  $\lambda = u, \bar{u}$ . Der Zwanglauf  $\zeta$  besitzt eine Darstellung der Bauart

$$\mathbf{x}(s) = A(s)\mathbf{x}^* + \mathbf{d}^*(s), \quad (22)$$

wobei  $A(s)$  eine von  $s$  abhängige orthogonale Matrix ist. Da  $\zeta$  Begleitzwanglauf zweiter Art sowohl für  $U^*$  als auch für  $\bar{U}^*$  sein soll, müssen nach Abschnitt 2 die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

1.  $b_2^*, \bar{b}_2^*$  überstreichen Torsen, deren Tangentialebenen gangfest sind und mit  $\varepsilon^*, \bar{\varepsilon}^*$  übereinstimmen.

2. Auf  $\Phi, \bar{\Phi}$  sind die Bahnen von  $U^*, \bar{U}^*$  geodätische Linien.

Im Gangsystem  $\Sigma^*$  besitzt der Zwangslauf (22) die Darstellung  $\mathbf{x}^* = A^t(t)(\mathbf{x} - \mathbf{d}(t))$ , woraus für die infinitesimale Transformation

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \dot{A}^t(t)A(t)\mathbf{x}^* - A^t(t)\dot{\mathbf{d}}(t) = \mathbf{m}^*(t) \times \mathbf{x}^* + \mathbf{u}^*(t) \quad (23)$$

mit  $\mathbf{u}^*(t) := (a(t), b(t), c(t))^t = -A^t(t)\dot{\mathbf{d}}(t)$  folgt.  $\mathbf{m}^*(t)$  legt die Richtung der Momentanachse fest. Diese Momentanachse steht nach Voraussetzung auf den Vektor  $\mathbf{n}_2$  normal, muß daher in  $\Sigma^*$  dem Komplex der zu  $g^*$  orthogonalen Geraden angehören. Ist das Gangaxoid zylindrisch, so liegt Fall A vor. Wir dürfen daher als neuen Bewegungsparameter  $t$  den Winkel zwischen der  $x^*$ -Achse und der Momentanachse  $m^*$  wählen und erhalten

$$\mathbf{m}^* := \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Die Punkte von  $b_2^*$  (bzw.  $\bar{b}_2^*$ ) liefern im Gangsystem die Tangentenvektoren

$$\mathbf{t}^* = \mathbf{m}^*(t) \times \mathbf{x}^* + \mathbf{u}^*(t) = \begin{pmatrix} a(t) + \lambda \sin(\phi - t) \\ b(t) + \delta \sin t \\ c(t) - \delta \cos t \end{pmatrix} \quad (25)$$

beziehungsweise

$$\bar{\mathbf{t}}^* = \begin{pmatrix} a(t) - \bar{\lambda} \sin(\phi + t) \\ b(t) - \delta \sin t \\ c(t) + \delta \cos t \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Sie liegen genau dann in  $\varepsilon^*$  bzw.  $\bar{\varepsilon}^*$ , wenn  $\mathbf{t}^* \cdot (0, -\sin \phi, \cos \phi)^t = -b(t) \sin \phi + c(t) \cos \phi - \delta \cos(\phi - t) = 0$  und analog  $b(t) \sin \phi + c(t) \cos \phi + \delta \cos(\phi + t) = 0$  gilt. Daraus gewinnen wir

$$b(t) = -\delta \cos t \cot \phi \quad \text{und} \quad \mathbf{t}^* = \begin{pmatrix} a(t) + \lambda \sin(\phi - t) \\ \frac{-\delta \cos(\phi + t)}{\sin \phi} \\ \frac{-\delta \cos(\phi + t)}{\cos \phi} \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Analoges gilt für  $\bar{\mathbf{t}}^*$ , wobei  $\lambda, \delta, \phi$  durch  $\bar{\lambda}, -\delta, -\phi$  zu ersetzen sind.

Nun ist  $\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{A}(t)\mathbf{x}^* + \ddot{\mathbf{d}}$ . Im Gangsystem  $\Sigma^*$  besitzt dieser Vektor die Richtung

$$\mathbf{c}^* := A^t(t)\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{t}}^* - \dot{A}^t(t)A(t)\mathbf{t}^* = \dot{\mathbf{t}}^* + \mathbf{m}^*(t) \times \mathbf{t}^*. \quad (28)$$

Für die Bahnen von  $U^*$  und  $\bar{U}^*$  entstehen so die Vektoren

$$\mathbf{c}^* = \begin{pmatrix} \dot{a} - u \cos(\phi - t) - \frac{\delta}{\sin \phi \cos \phi} \cos(\phi + t) \sin(\phi - t) \\ \frac{\delta \sin(\phi + t)}{\sin \phi} + \sin t(a + u \sin(\phi - t)) \\ \frac{\delta \sin(\phi + t)}{\cos \phi} - \cos t(a + u \sin(\phi - t)) \end{pmatrix} \quad (29)$$

und analog für  $\bar{\mathbf{c}}^*$ . Die Bedingung, daß die Bahn von  $U^*$  ( $\bar{U}^*$ ) auf der von  $b_2^*$  bzw.  $\bar{b}_2^*$  überstrichenen Torse  $\Phi$  bzw.  $\bar{\Phi}$  geodätische Linie ist, lautet im Gangsystem

$$\det \left( \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}, \mathbf{t}^*, \mathbf{c}^* \right) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \det \left( \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{t}}^*, \bar{\mathbf{c}}^* \right) = 0. \quad (30)$$

Diese Bedingung (30) führt für den Punkt  $U^*$  auf die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} & -(a + u \sin(\phi - t)) \frac{\delta \sin(\phi + t)}{\sin \phi \cos \phi} + (a + u \sin(\phi - t))^2 \sin(\phi - t) - \\ & - (\dot{a} - u \cos(\phi - t)) \frac{\delta \cos(\phi + t)}{\sin \phi \cos \phi} + \delta^2 \frac{\cos^2(\phi + t) \sin(\phi - t)}{\sin^2 \phi \cos^2 \phi} = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Die entsprechende Bedingung für  $\bar{U}^*$  erhalten wir daraus, indem wir  $u, \delta, \phi$  durch  $\bar{u}, -\delta, -\phi$  ersetzen.

Für  $\xi := a + u \sin(\phi - t)$  ist (31) eine RICCATI'sche Differentialgleichung, für die  $\xi_{1,2} = \pm \frac{i\delta \cos(\phi + t)}{\sin \phi \cos \phi}$  zwei Lösungen sind. Daraus gewinnen wir als allgemeine Lösungen

$$\xi(t) = \frac{i\delta \cos(\phi + t)}{\sin \phi \cos \phi} + \frac{2i\delta \cos(\phi + t)}{-\sin \phi \cos \phi + 2i\delta L \exp(-2i \cos(\phi - t))}, \quad (32)$$

wobei  $L$  eine komplexe Integrationskonstante ist. Die einzige reelle Lösung stellt sich für  $2i\delta L = \sin \phi \cos \phi$  ein. Sie lautet

$$\xi_R(t) = -\frac{\delta \cos(\phi + t)}{\sin \phi \cos \phi} \cdot \frac{1 + \cos(2 \cos(\phi - t))}{\sin(2 \cos(\phi - t))}. \quad (33)$$

Analog erhalten wir eine einzige reelle Lösung der zu  $\bar{U}^*$  gehörende Differentialgleichung.

$$\bar{\xi}_R(t) = -\frac{\delta \cos(\phi - t)}{\sin \phi \cos \phi} \cdot \frac{1 + \cos(2 \cos(\phi + t))}{\sin(2 \cos(\phi + t))}. \quad (34)$$

Die Existenz eines Zwanglaufes mit den gewünschten Eigenschaften bedingt

$$a(t) = \xi_R(t) - u \sin(\phi - t) = \bar{\xi}_R(t) + \bar{u} \sin(\phi + t). \quad (35)$$

Eine kurze Diskussion zeigt, daß es nicht möglich ist, die reellen Konstanten  $u, \bar{u}, \delta$  und  $\phi$  so zu wählen, daß obige Gleichung für alle  $t$  aus einem reellen Intervall gilt.



Ist nun  $\varepsilon$  parallel zu  $\bar{\varepsilon}$ , so sind die Geraden  $b_2^*$  und  $\bar{b}_2^*$  zueinander parallel. Sie sollen bei  $\zeta$  stets Charakteristiken von  $\varepsilon$  und  $\bar{\varepsilon}$  sein. Dies ist nur möglich, wenn die Momentanachsen parallel zur Ebene  $[b_2^*\bar{b}_2^*]$  liegen. Nach (9) stehen die Momentanachsen auch auf  $n_2^*$  normal. Entweder gilt dann  $[b_2^*\bar{b}_2^*] \perp n_2^*$  oder alle Momentanachsen haben dieselbe Richtung. Ersteres liefert genau den Fall B1 unserer Diskussion, das Zweite führt auf Zylinderschrotungen und somit auf Fall A.

Im Fall B2 gibt es daher keine  $\mathcal{B}$ -Kurven. Wir fassen zusammen:

**SATZ 2:** *Abgesehen von Böschungslinien zweiter Art sind genau jene Kurven des dreidimensionalen euklidischen Raumes  $E_3$   $\mathcal{B}$ -Kurven, für deren Krümmung  $\kappa_1$  und Torsion  $\tau_1$  die charakteristische Differentialgleichung (19) erfüllt ist. Die  $\mathcal{B}$ -Kurve  $\mathbf{x}(s)$  besitzt eine rektifizierende Torse mit einer Gratlinie  $\mathbf{g}(s)$ . Der Begleitzwanglauf zweiter Art  $\zeta$  von  $\mathbf{x}(s)$  ist in diesem Fall zugleich Begleitzwanglauf zweiter Art der Bahnkurve eines Punktes  $\bar{U}$ , der der rektifizierenden Ebene von  $\mathbf{g}(s)$  angehört.*

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Blaschke, W., und K. Leichtweiß: Elementare Differentialgeometrie. Springer-Verlag, Heidelberg – New York 1973.
- [2] Bertrand, J.: Mémoire sur la théorie des courbes a double courbure. J. math. pur. appl. 15 (1850), 332 - 350.
- [3] Bilinski, St.: Über eine Erweiterungsmöglichkeit der Kurventheorie. Monatsh. Math. 67 (1963), 289 - 304.
- [4] Césaro, E.: Vorlesungen über natürliche Geometrie. Teubner, Leipzig 1901.
- [5] Kruppa, E.: Analytische und Konstruktive Differentialgeometrie. Springer, Wien 1957.
- [6] Salkowski, E.: Beiträge zur Kenntnis der Bertrandschen Kurven. Math. Ann. 69 (1910), 560 – 579.
- [7] Wunderlich, W.: Bertrandsche Gewindekurvenpaare. Sb. d. Österr. Akad. d. Wiss. II, 190 (1981), 253 - 272.

Eine ausführliche Übersicht über die vorhandene Literatur zu den BERTRANDkurven findet sich in [2] und [7].

Anschrift der Autoren:

Johann LANG und Otto RÖSCHEL

Institut für Geometrie

TU - Graz

Kopernikugasse 24

A-8010 GRAZ

Austria

Abbildung 1

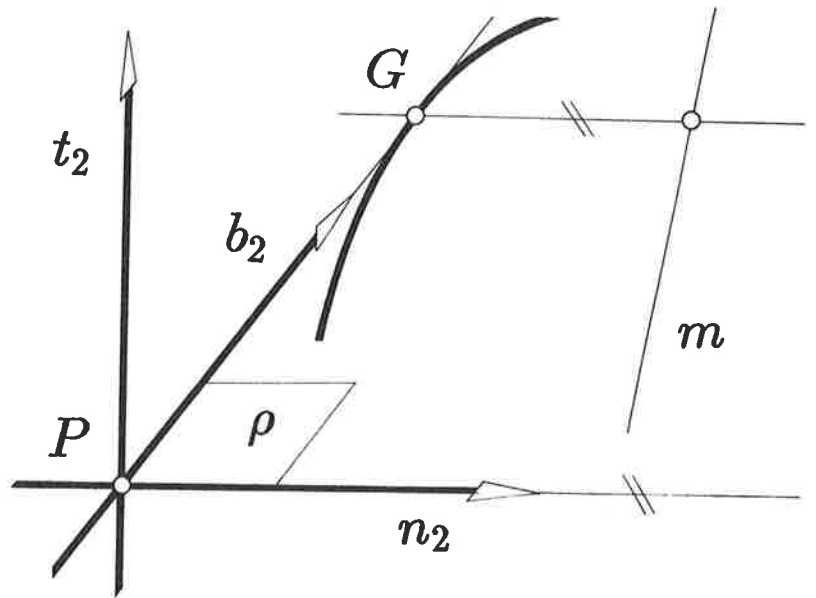


Abbildung 2

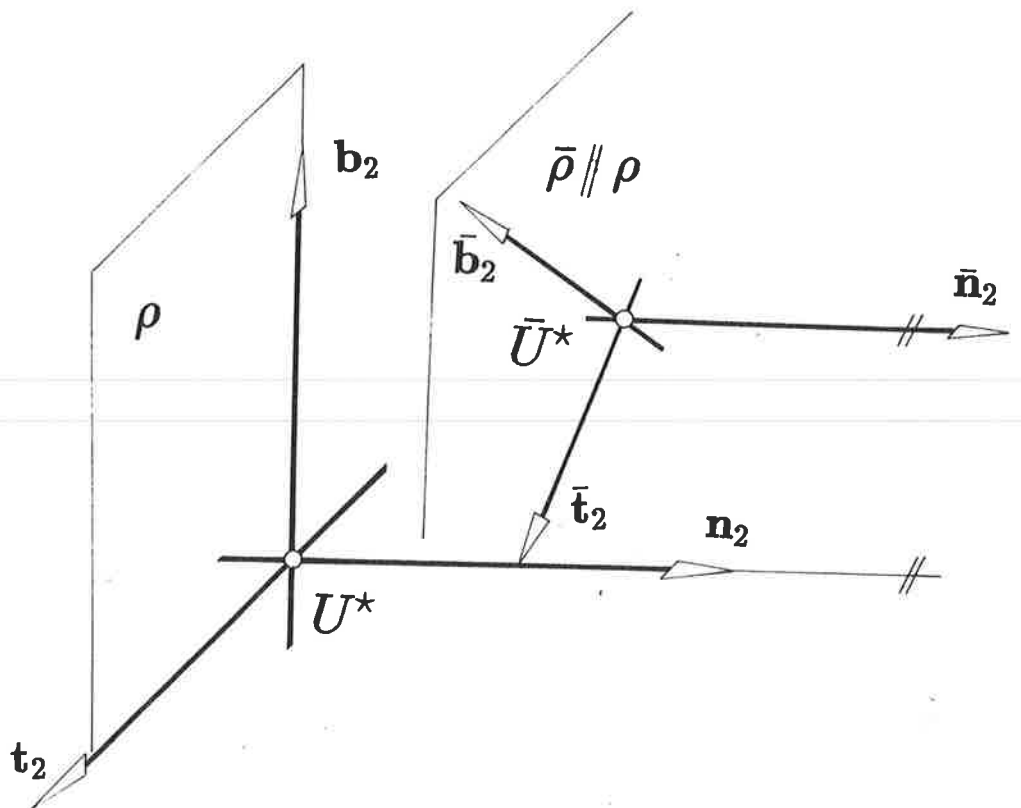


Abbildung 3

