

# ZUR KINEMATIK DER ISOTROPEN EBENE

Otto Röschel

In this paper there are studied kinematics in the isotropic plane. We shall investigate fundamental properties of the point - paths, develop a formula analog to the wellknown formula of Euler - Savary and study special motions : An isotropic elliptic motion and an isotropic four - bar - motion.

Während die Elementargeometrie einschließlich der Differential - geometrie der isotropen Ebene in letzter Zeit Gegenstand bemerkenswerter Untersuchungen war (vergleiche [1], [3], [4], [6], [7], [8], [9], [11], [13] und [14]), wurden Zwangläufe im Hinblick auf die isotrope Bewegungsgruppe  $G_3$  bisher kaum studiert. Die einzigen diesbezüglichen Ansätze stammen von K. STRUBECKER ([12] und [14]), der einparametrische Untergruppen der Gruppe  $G_3$  betrachtet. In der Gruppe  $G_5$  der isotropen Ähnlichkeiten der isotropen Ebene hat vor kurzem J. TÖLKE ([17], [18] und [19]) kinematische Verhältnisse untersucht. In der folgenden Note soll gezeigt werden, wie man trotz Fehlens eigentlicher Polkurven einen systematischen Aufbau der isotropen Kinematik hinsichtlich der isotropen Bewegungsgruppe  $G_3$  gestalten kann.

## 1. BAHNKURVEN

Wird in der affinen Ebene durch

$$\begin{cases} x(t) = a(t) + x_0 \\ y(t) = b(t) + c(t) \cdot x_0 + y_0 \end{cases} \quad (1)$$

ein spezieller affiner Bewegungsvorgang erklärt, so liegt nach [11, S. 318] ein Zwanglauf im Sinne der ebenen isotropen Geometrie vor <sup>1)</sup>. Sieht man von den im folgenden nicht wesentlichen momentanen isotropen Scherungen ab, kann in (1)  $a(t) = t$  gesetzt werden ; dadurch wird jede Bahnkurve von (1) auf ihre isotrope <sup>1)</sup>  $a(t)$ ,  $b(t)$  und  $c(t)$  sind reellwertige Funktionen der Klasse  $C^r$  ( $r \geq 3$ ) über  $(-\infty, +\infty)$ .

Bogenlänge  $t$  als Parameter bezogen.

Die Punkte jeder im Gangsystem  $\Sigma$  festen isotropen Geraden  $x_0 =$   
 $=$  konstant  $\in \mathbb{R}$  besitzen im Rastsystem  $\Sigma_0$  Bahnkurven, die sich  
 durch isotrope Schiebungen ineinander überführen lassen. Die  
 Bahntangenten der Bahnkurve von  $(x_0/y_0)$  besitzen in  $\Sigma_0$  die  
 Richtung der Geraden

$$y = x \cdot (b'(t) + x_0 \cdot c'(t))^2. \quad (2)$$

Der isotrope Winkel  $\varphi(t)$  der Bahntangenten zweier Punkte  $(x_0/y_0)$   
 und  $(x_1/y_1)$  berechnet sich zu

$$\varphi(t) = c'(t) \cdot (x_1 - x_0). \quad (3)$$

Längs einer nichtisotropen Geraden  $g$  ( $y_0 = k \cdot x_0$ ,  $k \in \mathbb{R} \setminus 0$ ) von  $\Sigma$   
 besitzen die Bahnkurven augenblicklich ( $t = 0^3$ ) Tangenten mit  
 der Darstellung

$$y = k \cdot x_0 + (x - x_0) \cdot (b'(0) + x_0 \cdot c'(0)). \quad (4)$$

Sie umhüllen den isotropen Kreis

$$y = x^2 \cdot \frac{c'(0)}{4} + x \cdot \frac{k + b'(0)}{2} + \frac{(k - b'(0))^2}{4 \cdot c'(0)}. \quad (5)$$

Sein Radius  $R = 2/c'(0)$  ist von der gewählten nichtisotropen Ge-  
 raden unabhängig.

Satz 1 : Punkte einer isotropen Geraden  $i$  von  $\Sigma$  beschreiben bei  
 einem ebenen isotropen Zwangslauf  $\Sigma / \Sigma_0$  kongruente Bahnkurven.  
 Die Bahntangenten der Punkte jeder in  $\Sigma$  festen nichtisotropen  
 Geraden  $g$  umhüllen zu jedem Zeitpunkt  $t$  einen isotropen Kreis,  
 dessen Radius von der gewählten Geraden unabhängig ist.

Diese Aussage gestattet es, mit Mitteln der projektiven Geo -  
 metrie auf einer gegebenen Geraden  $g \in \Sigma$  den momentanen Hüll -  
 punkt  $H$  zu ermitteln, wenn die momentanen Bahntangenten zweier  
 Punkte  $P$  und  $Q$  auf  $g$  gegeben sind. (Abbildung 1 zeigt die Be -  
 stimmung von  $H$  mit Hilfe des Satzes von BRIANCHON <sup>4)</sup>).

<sup>2)</sup> Die Ableitung nach der Bogenlänge  $t$  wird durch Striche ge -  
 kennzeichnet.

<sup>3)</sup> O.B.d.A. soll  $b(0) = c(0) = 0$  gelten.

<sup>4)</sup> Vergleiche etwa [5, S. 61 ff.].





zwei nichtisotropen Geraden  $p_0$  und  $q_0$  geführt.  $p_0$  und  $q_0$  werden dabei o.B.d.A. zu

$$p_0 \dots y = 0 \quad \text{und} \quad q_0 \dots y = k \cdot x + f \quad (13)$$

mit  $k, f \in \mathbb{R}$  gewählt. Für  $t = 0$  liege  $P$  in  $(0/0)$  und  $Q$  in  $(d/k.d + f)$ . Damit ist der Zwanglauf  $\Sigma / \Sigma_0$  eindeutig bestimmt und wird durch

$$\begin{cases} x(t) = t + x_0 \\ y(t) = \frac{k \cdot t}{d} \cdot x_0 + y_0 \end{cases} \quad (14)$$

beschrieben. Die Bahnkurven sind Geraden mit der Gleichung

$$y = x \cdot \frac{k \cdot x_0}{d} - \frac{k \cdot x_0^2}{d} + y_0 \quad (15)$$

In Abbildung 2 wurde die Hüllbahn  $g_0$  der Geraden  $g = [P, Q]$  eingetragen:  $g_0$  ist jener isotrope Kreis, der sich nach Satz 1 als Hüllkurve der augenblicklichen Bahntangenten der Punktbahnen von  $g$  ergibt. Sein Radius berechnet sich gemäß (5) zu

$$R = 2 \cdot d/k \quad (16)$$

Sind  $p_0$  und  $q_0$  zueinander parallel ( $k = 0$ ), so liegen *nichtisotrope Schiebungen* vor - alle Bahngeraden sind parallel.

Satz 3: Das *isotrope Kreuzschiebergetriebe* führt alle Punkte der Gangebene auf Geraden; die Hüllbahnen *nichtisotroper Geraden* sind im allgemeinen kongruente *isotrope Kreise*.

### 3. KOPPELGETRIEBE

Eine Strecke  $\overline{PQ} = d = \text{konst.} \neq 0$  werde mit ihren Endpunkten auf zwei isotropen Kreisen  $p_0$  und  $q_0$  geführt, die o.B.d.A. durch

$$p_0 \dots y = \frac{x^2}{2 \cdot p} \quad \text{und} \quad q_0 \dots y = \frac{(x-f)^2}{2 \cdot q} - e \quad (17)$$

mit reelle Konstanten  $p, q, e$  und  $f$  ( $p \cdot q \neq 0$ ) beschrieben werden. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  liege  $P$  in  $(0/0)$  und  $Q$  in  $(d/-e+(d-f)^2/(2q))$ . Damit ist das *isotrope Koppelgetriebe* eindeutig bestimmt und besitzt die analytische Darstellung

$$\begin{cases} x(t) = t + x_0 \\ y(t) = \frac{t^2}{2 \cdot p} + x_0 \cdot \frac{t}{2 \cdot d \cdot p \cdot q} \cdot (t \cdot (p - q) + 2 \cdot p \cdot (d - f)) + y_0 \end{cases} \quad (18)$$

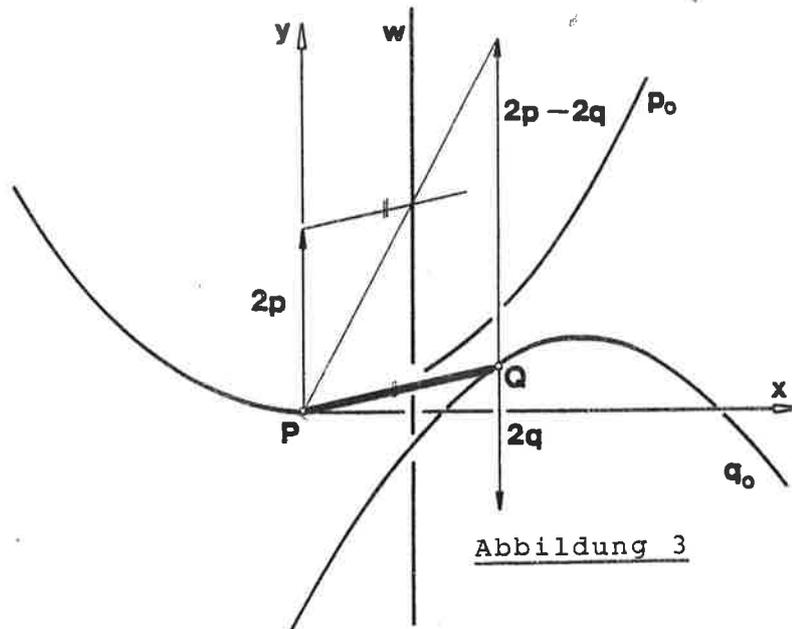


Abbildung 3

Die Bahnkurven der Punkte  $(x_0/y_0)$  von  $\Sigma$  sind im allgemeinen *isotrope Kreise* mit der konstanten Krümmung

$$\kappa(x_0) = \frac{1}{p} + x_0 \cdot \frac{p - q}{d \cdot p \cdot q} \quad (19)$$

Die Wendegerade  $w(t)$  besitzt in  $\Sigma$  die Gleichung

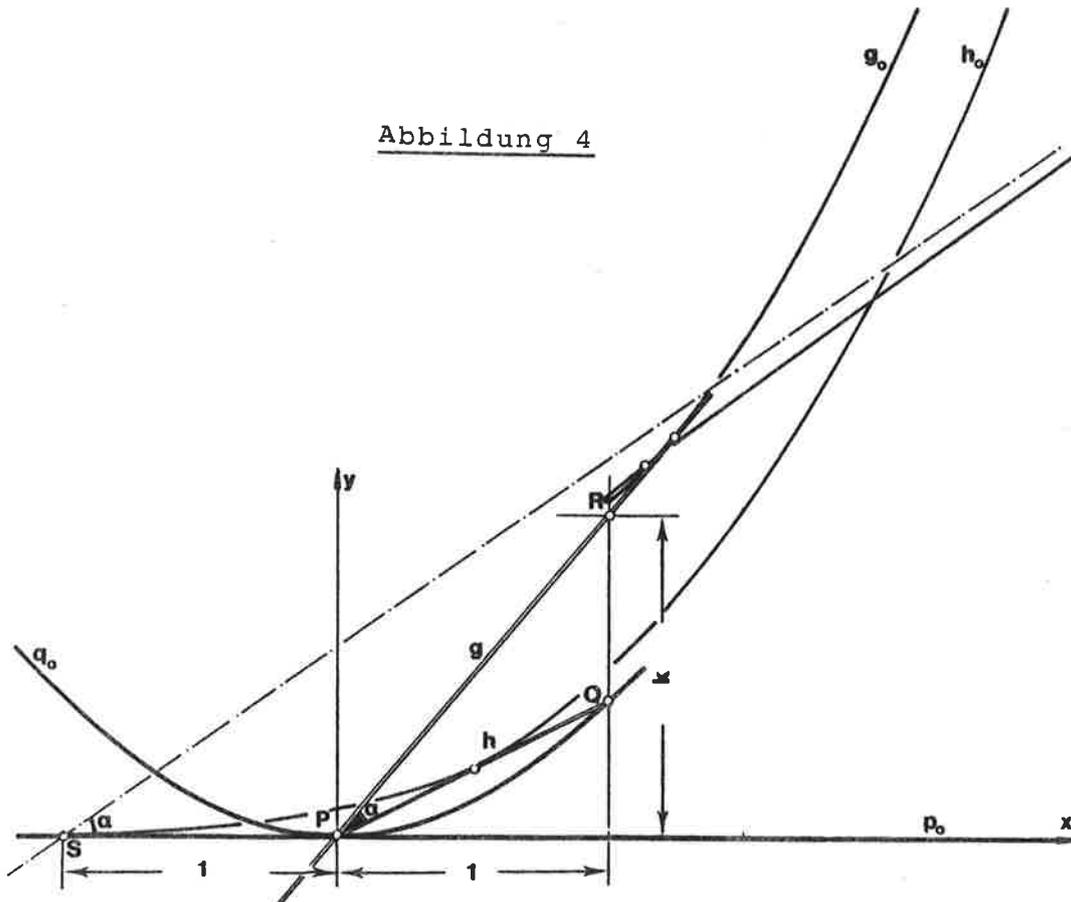
$$x_0 = \frac{d \cdot q}{q - p} \quad (20)$$

Sie ist wie der Wendepol  $W(t)$  für den ganzen Zwanglauf in  $\Sigma$  stationär. Punkte von  $w(t) = w$  beschreiben in  $\Sigma_0$  zueinander parallele Geraden durch den Wendepol  $W(t)$ . Das isotrope Koppelgetriebe kann daher zugleich als *isotropes Schubkurbelgetriebe* aufgefaßt werden.

Satz 4 : Das Koppelgetriebe der isotropen Ebene führt allgemeine Punkte der Gangebene  $\Sigma$  auf isotropen Kreisen. Die Wendegerade und der Wendepol sind für den ganzen Zwanglauf in  $\Sigma$  stationär; Punkte der Wendegeraden werden in  $\Sigma_0$  auf Geraden geführt.

Damit kann dem isotropen Koppelgetriebe (18) durch isotrope Bewegung folgende einfachere Gestalt verliehen werden : P sei Punkt der isotropen Wendegeraden und liege für  $t = 0$  in  $(0/0)$ . Seine Bahnkurve  $p_0$  werde durch  $y = 0$  beschrieben. Q liege für  $t = 0$  im Punkt  $(1/1:(2p))$  ( $p \in \mathbb{R} - 0$ ) und besitze den isotropen Bahnkreis mit der Gleichung  $y = x^2/2p$ .

Abbildung 4



Das ergibt die Normalform des isotropen Koppelgetriebes

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + t \\ y(t) = x_0 \cdot \frac{t \cdot (t+2)}{2p} + y_0 \end{cases} \quad (21)$$

Nun sollen noch die Geradenhüllbahnen dieses Getriebes ermittelt werden : Sei  $g = [P,R]$  eine nichtisotrope Gerade in  $\Sigma$ , die mit der Geraden  $h = [P,Q]$  den Winkel  $\alpha$  einschließt; für  $t = 0$  sei R der Punkt  $(1/k)$  ( $k \in \mathbb{R}$ ) (vergleiche Abbildung 4).

Nach kurzer Rechnung ergibt sich die Hüllbahn  $g_0$  von  $g$  bei (21) zu

$$\begin{cases} x(t) = \frac{3 \cdot (t+1)^2 - 2 \cdot (t+1) + A}{2 \cdot (t+1)} \\ y(t) = \frac{((t+1)^2 + A)^2}{4 \cdot p \cdot (t+1)} \end{cases} \quad (22)$$

mit  $A = 2 \cdot p \cdot \alpha = 2 \cdot p \cdot k - 1$ . Durch Umformung erhält man

$$A(x+1)^4 - 2p(x+1)^3y + 2A^2(x+1)^2 - 18Ap(x+1) + 27p^2y^2 + A^3 = 0 \quad (23)$$

als Gleichung der Hüllkurve  $g_0$ .  $g_0$  ist im allgemeinen eine rationale Kurve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten und einer Spitze: Die Spitze liegt im absoluten Punkt F - die Ferngerade u ist Spitzentangente. Die beiden Doppelpunkte berechnen sich zu

$$\left(-1 \pm \sqrt{3 \cdot A} / \pm \frac{4 \cdot A}{9 \cdot p} \cdot \sqrt{3 \cdot A}\right). \quad (24)$$

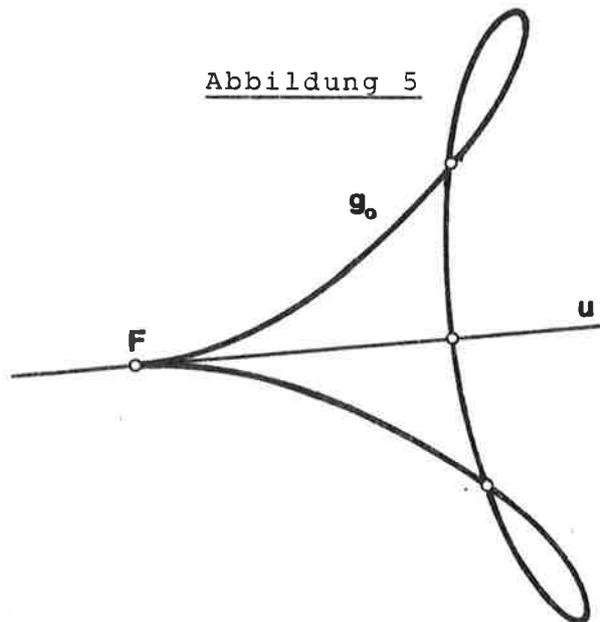


Abbildung 5 zeigt die Situation für  $A > 0$  in projektiver Sicht. Der verbleibende vierte Fernpunkt besitzt die Asymptote

$$y = \frac{A}{2 \cdot p} \cdot (x+1), \quad (25)$$

die mit der Bahngeraden  $p_0$  des Punktes P den Winkel  $\alpha$  einschließt.

Da  $g_0$  die isotrope Punktspiegelung

$$\begin{cases} \bar{x} = -x - 2 \\ \bar{y} = -y \end{cases} \quad (26)$$

mit dem Zentrum S  $(-1/0)$  ver trägt, ist S isotropes Symmetriezentrum

von  $g_0$  und von der Wahl von A unabhängig.

Genau für  $A = 0$  ( $g = h$ ) zerfällt (23) in  $p_0$  und die isotrope kubische Parabel  $h_0$

$$y = \frac{2 \cdot (x+1)^3}{27 \cdot p}, \quad (27)$$

die schon K. STRUBECKER in [14, S. 391 ff.] untersucht hat <sup>7)</sup>.

Dieser Zerfall tritt genau dann ein, wenn die Bahnkurve eines Punktes Q von  $g$  die Bahn  $p_0$  des auf  $g$  gelegenen Wendepunktes berührt. (Das ist dann für alle Bahnkurven der Punkte von  $g$  der Fall).

<sup>7)</sup> (23) und (27) hyperoskulieren sich in F.

Satz 5 : Wird beim isotropen Koppelgetriebe  $\Sigma / \Sigma_0$  eine nicht - isotrope Gerade  $g$  von  $\Sigma$  bewegt, so ist ihre Hüllbahn  $g_0$  im allgemeinen eine rationale Kurve vierter Ordnung mit einem isotropen Symmetriezentrum  $S$  auf der Bahngeraden  $p_0$  des auf  $g$  gelegenen Wendepunktes  $P$ . Genau dann, wenn der isotrope Bahnkreis  $q_0$  eines von  $P$  verschiedenen Punktes  $Q$  von  $g$  die Gerade  $p_0$  berührt, zerfällt diese Kurve vierter Ordnung in eine isotrope kubische Parabel und die Gerade  $p_0$ .

#### 4. KRÜMMUNGSKREISE VON BAHNKURVEN

Aus (6) folgt für die Bahnkrümmungen  $\kappa(t, x_0)$  und  $\kappa(t, x_1)$  zweier Punkte  $P(x_0/y_0)$  und  $Q(x_1/y_1)$  von  $\Sigma$  beim isotropen Zwanglauf  $\Sigma / \Sigma_0$  die folgende Formel von EULER - SAVARY in der isotropen Kinematik

$$\kappa(t, x_0) - \kappa(t, x_1) = c''(t) \cdot (x_0 - x_1). \quad (28)$$

Werden nun die Punkte  $P$  und  $Q$  auf ihren momentanen Bahnkrümmungskreisen  $p_0(t)$  und  $q_0(t)$  geführt, so entsteht ein oskulierendes Koppelgetriebe oder ein oskulierendes Kreuzschiebergetriebe, das alle Punkte der Gangebene  $\Sigma$  auf isotropen Kreisen oder auf Geraden führt, die nach (28) Krümmungskreise oder Wendetangenten der Bahnkurven des Ausgangszwanglaufes zum Zeitpunkt  $t$  sind.

Satz 6 : Bezüglich der momentanen Bahnkrümmungen kann jeder isotrope Zwanglauf  $\Sigma / \Sigma_0$  durch ein geeignetes oskulierendes Koppel- oder Kreuzschiebergetriebe ersetzt werden. Beim oskulierenden Ersatzzwanglauf beschreiben die Punkte die momentanen Krümmungskreise der Bahnkurven des Ausgangszwanglaufes.

Nach Satz 5 sind die Geradenhüllbahnen eines solchen oskulierenden Koppelgetriebes im allgemeinen rationale Kurven dritter oder vierter Ordnung. Diese Kurven können auch als Hüllkurven der Bahnkurven von Punkten der betrachteten Geraden beim Koppelgetriebe aufgefaßt werden. Damit gilt

**Satz 7** : Liegt bei einem isotropen Zwangslauf  $\Sigma / \Sigma_0$  momentan ein oskulierendes Koppelgetriebe vor, so umhüllen die Bahnkrümmungskreise der Punkte einer nichtisotropen Geraden von  $\Sigma$  im allgemeinen eine rationale Kurve dritter oder vierter Ordnung, die eine Spitze im absoluten Punkt besitzt ; liegt momentan ein oskulierendes Kreuzschiebergetriebe vor, so entartet diese Hüllkurve zu einem isotropen Kreis.

#### LITERATUR

- [1] BRAUNER, H.: Kreisgeometrie in der isotropen Ebene. Mh. Math. 69, 105 - 128 (1965).
- [2] FLADT, K.: Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven. Akad. Verlagsgesellschaft, Frankfurt/ Main (1962).
- [3] GRÜNER, S.: Zur Differentialgeometrie der isotropen Möbius - ebene. Dissertation, Stuttgart (1970).
- [4] LANG, J.: Zur isotropen Dreiecksgeometrie und zum Appolonischen Berührproblem in der isotropen Ebene. Berichte der math. - stat. Sektion Graz (in Vorbereitung).
- [5] LENSE, J.: Analytische projektive Geometrie. R. Oldenbourg, München - Wien (1965).
- [6] Макарова, Н. М.: О Геометрии Галилея - Ньютона, Ученые Записки Орехово - Зуевского пед. Института 1 (1), 83 - 95 (1955).
- [7] Макарова, Н. М.: Геометрия Галилея - Ньютона. II, Движения и преобразования подобия, Ученые Записки Орехово-Зуевского пед. Института 7 (2), 5 - 27 (1957).
- [8] Макарова, Н. М.: Геометрия Галилея - Ньютона. III, Элементы теории циклов, Ученые Записки Орехово - Зуевского пед. Института 7 (2), 29 - 59 (1957).
- [9] Макарова, Н. М.: К Теории циклов параболческой Геометрии на плоскости, Сибирский математический журнал 2 (1), 131 - 144 (1961).
- [10] MÜLLER, H. R.: Die Formel von Euler - Savary in der affinen Kinematik. Archiv d. Math. 10, 71 - 80 (1959).
- [11] SACHS, H.: Ein isotropes Analogon zu einem Satz von Abrahams und einige Grenzwertformeln. Archiv d. Math. 23, 661 - 668 (1972).
- [12] STRUBECKER, K.: Über die Lieschen Abbildungen der Linien - elemente der Ebene auf die Punkte des Raumes. Mh. Math. 42, 309 - 376 (1935).

- [13] STRUBECKER, K.: Äquiforme Geometrie der isotropen Ebene. Archiv d. Math. 3, 145 - 153 (1952).
- [14] STRUBECKER, K.: Geometrie in einer isotropen Ebene. Math. Nat. Unterr. 15, 297 - 306, 343 - 351, 385 - 394 (1962/63).
- [15] TÖLKE, J.: Affine Kinematik der Ebene. Dissertation, Karlsruhe (1967).
- [16] TÖLKE, J.: Projektive kinematische Geometrie. Berichte d. math. - stat. Sektion Graz, 39, 1 - 50 (1975).
- [17] TÖLKE, J.: Eine kennzeichnende Eigenschaft der isotropen Bewegungen. Anz. d. Österr. Akad. Wiss. N<sup>o</sup> 7, 165 - 168 (1978).
- [18] TÖLKE, J.: Zu den affinen Zwangsläufen, bei denen sich die Punkte eines Kegelschnitts auf Geraden bewegen. Studia Sci. Math. Hung. 15, 151 - 156 (1980).
- [19] TÖLKE, J.: Isotrope Kegelschnittsbewegungen. Journal of Geometry 13/1, 31 - 48 (1979).
- [20] WUNDERLICH, W.: Ebene Kinematik. Bibliogr. Institut, Mannheim (1970).
- [21] ЯГЛОМ, И. М.: Принцип Относительности Галилея и Неевклидова Геометрия. Москва (1969).

Montanuniversität Leoben  
 Institut für Math. u. Angew. Geom.  
 Franz - Josef - Straße 18  
 A - 8700 Leoben