

Zwangläufig bewegliche Polyedermodelle II

Otto Röschel (TU Graz)

Herrn em.o.Univ.-Prof. Dr. G. Strommer zum 75. Geburtstag gewidmet.

AMS Subject Classification: 53 A 17

Keywords: Kinematics, Overconstrained mechanisms.

Abstract. In this paper there is shown how to construct overconstrained mechanisms with systems linked by spherical 2R-links. Given a tetrahedron with faces tangent to a common sphere we cut the vertices of this polyhedron with planes tangent to the sphere. In the faces of this new polyhedron we define plane equiform euclidean motions with common parametrisation and common time-depending scaling factor $f(t)$. The motions in different faces are linked by spherical links. "Blowing up" the tetrahedron with factor $1/f(t)$ then gives an overconstrained kinematic chain consisting of 8 systems linked by spherical 2R-links. It has to be remarked that this procedure may be used to gain a very great variety of overconstrained mechanisms: the given algorithm just has to work on other polyhedra with faces tangent to a common sphere. Further parts of this paper will show that fact.

In [1] ist es gelungen, aus einem Würfel durch Eckenstützen ein zwangläufig bewegliches Polyedermodell mit sphärischen Doppelscharnieren zu konstruieren. Die eckenstützenden Ebenen mußten dabei Tangentialebenen der Inkugel des Würfels sein. Daß dahinter ein allgemeiner Sachverhalt verborgen ist, soll in dieser Arbeit gezeigt werden. Die so gefundenen Resultate werden dann zur Konstruktion von zwangläufig beweglichen (überbestimmten) Polyedermodellen verwendet, die aus (nicht notwendig regulären) Tetraedern hervorgehen. Als Spezialfall stellt sich dabei das bekannte Modell des HEUREKA-Polyeders ein.

1. Wir studieren vorerst ebene äquiforme Zwangläufe $\xi := \varepsilon / \varepsilon^*$ einer Gangebene ε gegenüber einer fest gedachten Rastebene ε^* mit folgenden Eigenschaften: ξ besitze einen globalen Fixpunkt $A^* \in \varepsilon^*$ (bzw. $A \in \varepsilon$) und führe einen gangfesten Punkt $P \neq A$ auf einer A^* nicht enthaltenden Bahngeraden $b^*(P)$. Wenn wir wie üblich komplexe Zahlen zur Beschreibung dieser Zwangläufe verwenden, empfiehlt es sich, in ε und ε^* kartesische Normalkoordinatensysteme $\{0^* = A^*; x^*, y^*\}$ und $\{0 = A; x, y\}$ so einzuführen, daß P in ε den Einheitspunkt der x -Achse bezeichnet, und die beiden Koordinatensysteme für den Ausgangszeitpunkt bei ξ zur Deckung gelangen. Eine Parametrisierung von ξ ist dann etwa durch

$$(1) \quad \xi: \quad \bar{z} := x + iy \quad \rightarrow \quad \bar{z}^*(t, \bar{z}) := \bar{z} (1 + i t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

gegeben. Dabei wurde vorausgesetzt, daß sich der Punkt P für $t = 0$ auf seiner Bahngeraden $b^*(P)$ gerade in jenem dem Zentrum $A^* = 0^*$ nächsten Punkt befindet. Aus (1) ist ersichtlich,

daß der so definierte Zwanglauf ξ alle Punkte $X \in (\varepsilon - A)$ auf Bahngeraden $b^*(X)$ führt. Wir wollen diesen Zwanglauf ξ daher als *linearen ebenen äquiformen Zwanglauf mit globalem Fixpunkt $A^*(A)$* ansprechen.

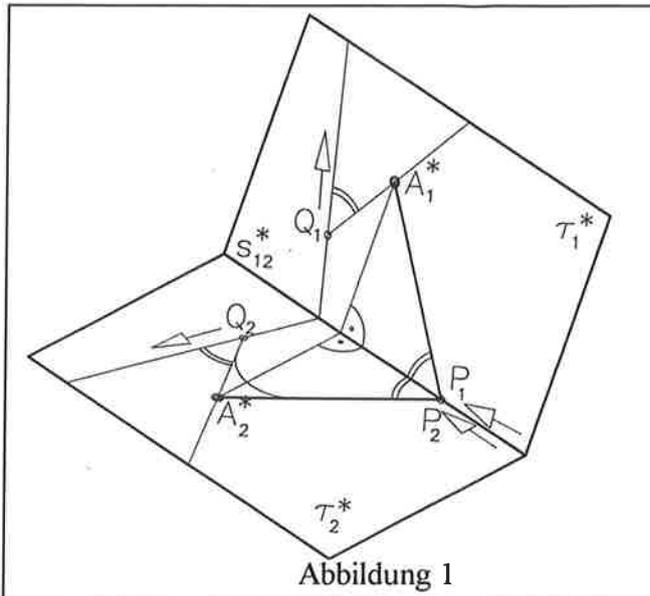


Abbildung 1

2. Nun geben wir im euklidischen Dreiraum eine feste Kugel κ^* (mit Mittelpunkt M^*) sowie zwei *nichtparallele Kugeltangentialebenen* τ_1^*, τ_2^* mit Berührungspunkten A_1^*, A_2^* vor. Die Schnittgerade $\tau_1^* \cap \tau_2^*$ bezeichnen wir mit s_{12}^* und parametrisieren sie mit einem Parameter $t \in \mathbb{R}$ (vgl. Abbildung 1 - die Kugel κ^* ist nicht eingetragen).

Wir denken uns die beiden Ebenen τ_1^*, τ_2^* als Rastebenen bzw. Gangebene τ_1, τ_2 doppelt ausgeführt und definieren lineare ebene äquiforme Zwangläufe $\xi_i := \tau_i / \tau_i^*$ ($i = 1, 2$) mit globalen Fix-

punkten A_i^* durch Vorgabe der parametrisierten Bahngeraden s_{12}^* für zwei gangfeste Punkte $P_2 \in \tau_2, P_1 \in \tau_1$, die sich für alle $t \in \mathbb{R}$ an *derselben Stelle auf s_{12}^* befinden sollen*. Da es bekanntlich eine Drehung um die Achse s_{12}^* gibt, die (τ_1^*, A_1^*) mit (τ_2^*, A_2^*) zur Deckung bringt, *sind die beiden äquiformen Zwangläufe ξ_1 und ξ_2 euklidisch kongruent* und über die "Schleppbahnen" der Punkte P_1 und P_2 sogar kongruent parametrisiert (vgl. Abbildung 1 - dort sind auch die Bahngeraden je eines weiteren Punktes eingetragen).

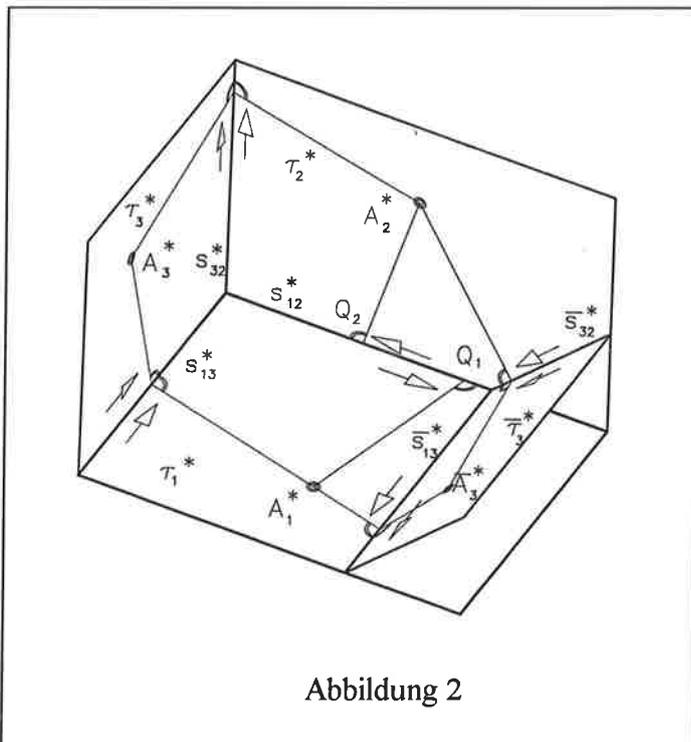


Abbildung 2

In Abbildung 1 erkennen wir sehr schön, daß sich ζ_1 und ζ_2 zu jedem Zeitpunkt t durch Spiegelung an der Symmetrieebene $\sigma_{12}^* := [s_{12}^*, M^*]$ zur Deckung bringen lassen.

3. Hilfsüberlegungen. Für die weiteren Abschnitte benötigen wir folgende Überlegungen:

A) Wir betrachten 3 Tangentialebenen $\tau_1^*, \tau_2^*, \tau_3^*$ der Kugel κ^* mit Berührungspunkten A_i^* ($i = 1, 2, 3$), wobei τ_3^* weder zu τ_1^* noch τ_2^* parallel sei (vgl. Abbildung 2). Geben wir nun in τ_1^* einen linearen äquiformen Zwanglauf ζ_1 mit globalem Fixpunkt A_1^* vor, so läßt sich dieser nach Abschnitt 2 über die Schleppbahn

$s_{13}^* := \tau_1^* \cap \tau_3^*$ eines geeigneten gangfesten Punktes kongruent in die Ebene τ_3^* übertragen - der entstehende Zwanglauf werde mit ζ_3 bezeichnet. Über die Schleppbahn

$s_{32}^* := \tau_3^* \cap \tau_2^*$ kann in τ_2^* analog ein zu ζ_1 kongruenter linearer äquiformer Zwanglauf ζ_2 definiert werden. Dabei ist auf drei Besonderheiten hinzuweisen:

1) Aus Abbildung 2 ist ersichtlich, daß *diese Koppelung der Zwangläufe über die Schleppbahnen zwischen den kongruenten Zwangläufen ζ_1 und ζ_2 nicht möglich ist*: ζ_1 führe den gangfesten Punkt Q_1 auf der Schnittgeraden $s_{12}^* = s_{21}^*$. Auch im Gangsystem des Zwanglaufes ζ_2 gibt es einen Punkt Q_2 , der auf dieser Schnittgeraden geführt wird. Allerdings wird diese Gerade von Q_1 und Q_2 in verschiedener Richtung durchlaufen, was die oben erwähnte Koppelung unmöglich macht (vgl. die Pfeile in Abbildung 2).

2) Überraschend ist der so in τ_2^* definierte Zwanglauf ζ_2 *nicht von der Wahl der zur Übertragung verwendeten Kugeltangentialebene τ_3^* abhängig!* Dies sieht man mit Abbildung 2 wie folgt ein: Wählen wir statt τ_3^* zur Übertragung eine andere (weder zu τ_1^* noch zu τ_2^* parallele) Kugeltangentialebene $\bar{\tau}_3^*$ mit Berührungspunkt \bar{A}_3^* . Der dann über die Schleppbahnen und $\bar{s}_{13}^* := \tau_1^* \cap \bar{\tau}_3^*$ und $\bar{s}_{32}^* := \bar{\tau}_3^* \cap \tau_2^*$ in τ_2^* definierte Zwanglauf $\bar{\zeta}_2$ ist zu ζ_2 kongruent und besitzt denselben globalen Fixpunkt. Auch die Parametrisierungen sind dieselben. Da nach Abbildung 3 auch der Drehsinn von $\bar{\zeta}_2$ mit jenem von ζ_2 übereinstimmt, sind ζ_2 und $\bar{\zeta}_2$ sogar identisch.

3) Wir haben in Abschnitt 2 festgestellt, daß sich die Zwangläufe ζ_1 und ζ_3 bzw. ζ_3 und ζ_2 jeweils durch Spiegelung an den Ebenen $\sigma_{13}^* := [s_{13}^*, M^*]$ bzw. $\sigma_{32}^* := [s_{32}^*, M^*]$ ineinander überführen lassen. *Der Übergang von ζ_1 zu ζ_2 kann daher i.a. als Drehung um die Schnittgerade dieser beiden Symmetrieebenen gewonnen werden.*

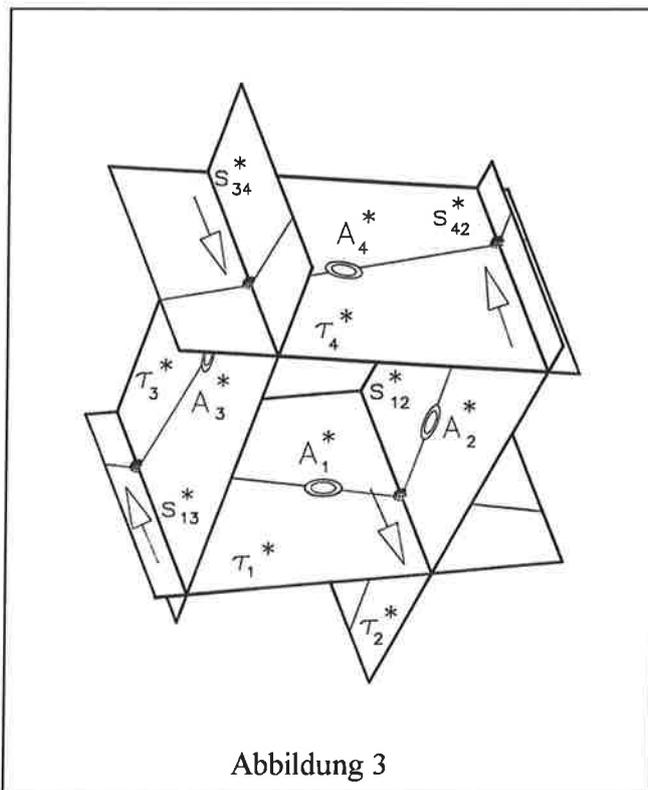


Abbildung 3

B) Gegeben seien zwei verschiedene Tangentialebenen τ_1^*, τ_2^* einer Kugel κ^* (Mitte M^*) mit Berührungspunkten A_i^* ($i = 1, 2$). Nun versuchen wir, einen in τ_1^* vorgelegten linearen äquiformen Zwanglauf ζ_1 mit globalem Fixpunkt A_1^* über zwei Zwischenglieder in Tangentialebenen τ_3^*, τ_4^* der Kugel κ^* (Berührungspunkte A_3^*, A_4^*) wie in Abbildung 3 in die Ebene τ_2^* zu übertragen. Im folgenden sollen die Schnittgeraden $s_{13}^* := \tau_1^* \cap \tau_3^*$, $s_{34}^* := \tau_3^* \cap \tau_4^*$ und $s_{42}^* := \tau_4^* \cap \tau_2^*$ eigentliche Geraden sein. Die Übertragung von ζ_1 in die Ebenen τ_3^*, τ_4^* und τ_2^* soll sukzessiv über die Schleppbahnen s_{13}^*, s_{34}^* und s_{42}^* erfolgen. Die so in τ_3^*, τ_4^* bzw. τ_2^* induzierten linearen

äquiformen Zwangläufe ζ_3, ζ_4 bzw. ζ_2 besitzen die globalen Fixpunkte A_3^*, A_4^* bzw. A_2^* und sind alle zu ζ_1 kongruent. Wir haben unter A) bemerkt, daß der in τ_4^* induzierte Zwanglauf ζ_4 unabhängig von der Wahl der Übertragungsebene τ_3^* ist (solange wir eine Kugeltangentialebene verwenden). Daher dürfen wir o.B.d.A. τ_3^* parallel zur Schnittgerade

$s_{12}^* := \tau_1^* \cap \tau_2^*$ wählen - sollten τ_1^* und τ_2^* zueinander parallel liegen, verändern wir die Lage von τ_3^* nicht. Analog verfahren wir für die Ebene τ_4^* , sodaß schließlich die Schnittgeraden s_{13}^* , s_{34}^* und s_{42}^* sowie s_{12}^* (falls eigentlich) zueinander parallel liegen. Diese Situation ist in Abbildung 3 dargestellt. Insgesamt gilt dann nach Abschnitt 2: Der Zwanglauf ζ_2 entsteht aus ζ_1 durch fortgesetzte Spiegelung an den Ebenen $\sigma_{13}^* := [s_{13}^*, M^*]$, $\sigma_{34}^* := [s_{34}^*, M^*]$ und $\sigma_{42}^* := [s_{42}^*, M^*]$. Die Spiegelungsebenen gehören einem Büschel an; daher ist die Zusammensetzung dieser drei Spiegelungen insgesamt eine Spiegelung an einer weiteren Ebene σ^* dieses Büschels. Falls τ_1^* und τ_2^* nicht zueinander parallel sind, gilt $\sigma^* = \sigma_{12}^* := [s_{12}^*, M^*]$, andernfalls ist σ^* Mittenebene der parallelen Ebenen τ_1^* und τ_2^* . Abschnitt 2 lehrt dann, daß im Fall nichtparalleler Ebenen τ_1^* und τ_2^* der Zwanglauf ζ_2 auch über die Schleppbahn auf der Schnittgeraden s_{12}^* direkt aus ζ_1 gewonnen werden kann (vgl. Abbildung 3). Sind dagegen τ_1^* und τ_2^* parallel,

so geht ζ_2 durch Schiebung aus ζ_1 hervor - Schiebvektor ist der Vektor $\overrightarrow{A_1^* A_2^*}$.

C) Zuletzt betrachten wir 4 Tangentialebenen τ_1^* , τ_2^* , τ_3^* und τ_5^* der Kugel κ^* mit Berührungspunkten A_i^* ($i = 1, 2, 3, 5$). Dabei sei vorausgesetzt, daß die Tangentialebene τ_5^* mit den Ebenen τ_1^* , τ_2^* , τ_3^* *eigentliche Schnittgeraden* $s_{15}^* = s_{51}^*$, $s_{25}^* = s_{52}^*$, $s_{35}^* = s_{53}^*$ besitzt (vgl. Abbildung 4). Wie unter A) definieren wir in einer dieser Ebenen (etwa in τ_1^*) einen linearen äquiformen Zwanglauf ζ_1 mit globalem Fixpunkt A_1^* durch Vorgabe der geeignet parametrisierten Geraden $s_{15}^* = s_{51}^*$ als Bahn eines gangfesten Punktes P_{15} . Wieder wird dieser

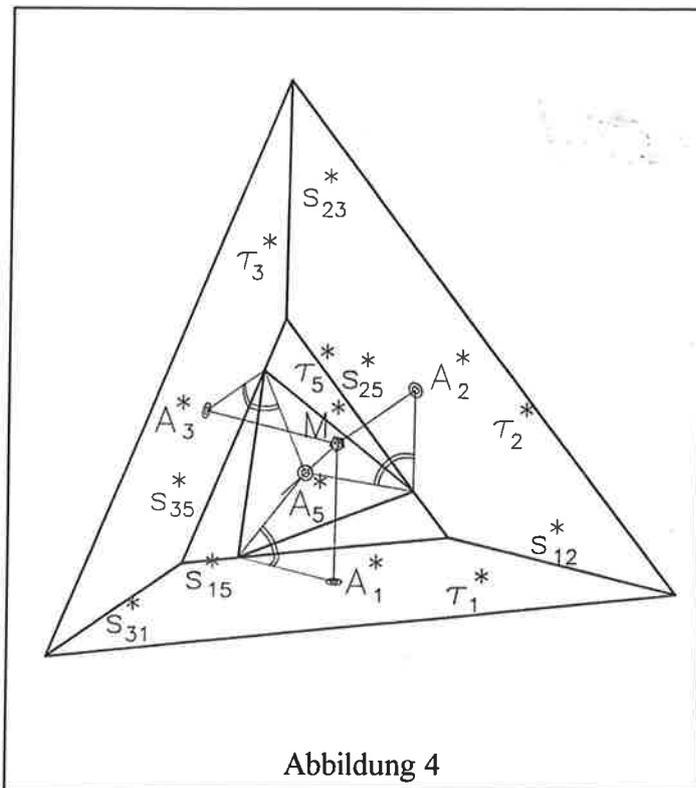


Abbildung 4

Zwanglauf über die "Schleppbahn" auf der Schnittgeraden $s_{15}^* = s_{51}^*$ kongruent in die Ebene τ_5^* übertragen. Über in der Gangebene dieses Zwanglaufes ζ_5 feste Punkte P_{52} und P_{53} , deren Bahnen als Schleppbahnen nach $s_{25}^* = s_{52}^*$ bzw. $s_{35}^* = s_{53}^*$ fallen (die Punkte sind mit Hilfe des Peripheriewinkelsatzes leicht zu ermitteln), definieren wir in den Ebenen τ_2^* und τ_3^* Zwangläufe ζ_2 und ζ_3 mit globalen Fixpunkten A_2^* und A_3^* . So wie für A) läßt sich wieder nachweisen, daß statt der Kugeltangentialebene τ_5^* jede beliebige andere Kugeltangentialebene zur Übertragung verwendet werden könnte, ohne daß sich die resultierenden Zwangläufe ζ_2 und ζ_3 ändern. Dabei ist bloß darauf zu achten, daß die neue Übertragungsebene zu τ_1^* , τ_2^*

und τ_3^* nicht parallel ist.

4. Diese Sachverhalte ermöglichen es, in den 4 Seitenflächen $\tau_1^*, \tau_2^*, \tau_3^*, \tau_4^*$ eines (*nicht notwendig regulären!*) Tetraeders Δ^* mit Hilfe von 4 geeigneten Tangentialebenen $\tau_5^*, \tau_6^*, \tau_7^*, \tau_8^*$ der Inkugel κ^* von Δ^* (auch eine der Ankgeln könnte verwendet werden) kongruente lineare ebene äquiforme Zwangsläufe $\xi_i := \tau_i / \tau_i^*$ ($i = 1..8$) mit globalen Fixpunkten in den Berührungspunkten A_i^* mit der Kugel κ zu definieren (vgl. Abbildung 5):

Die Tangentialebenen $\tau_5^*, \tau_6^*, \tau_7^*, \tau_8^*$ seien so gewählt, daß sie zum Stutzen je einer Ecke des Tetraeders verwendet werden können. Wir verfahren dann wie oben und erhalten eine sich schließende Konfiguration aus 8 kongruenten linearen äquiformen Zwangsläufen, die dann durch Schlepplbahnen gekoppelt sind, wenn sie in einer Tetraederebene und einer der benachbarten zum Stutzen verwendeten Tangentialebenen $\tau_5^*, \tau_6^*, \tau_7^*, \tau_8^*$ ablaufen. Von diesen 8 kongruenten äquiformen Zwangsläufen ξ_i werden die Ecken jeweils gangfester Dreiecke auf den Schnittgeraden der entsprechenden Ebenen geführt, die zu jedem Zeitpunkt $\tau \in \mathbb{R}$ mit einem Eckpunkt in einer Ecke eines Nachbardreieckes zu liegen kommen.

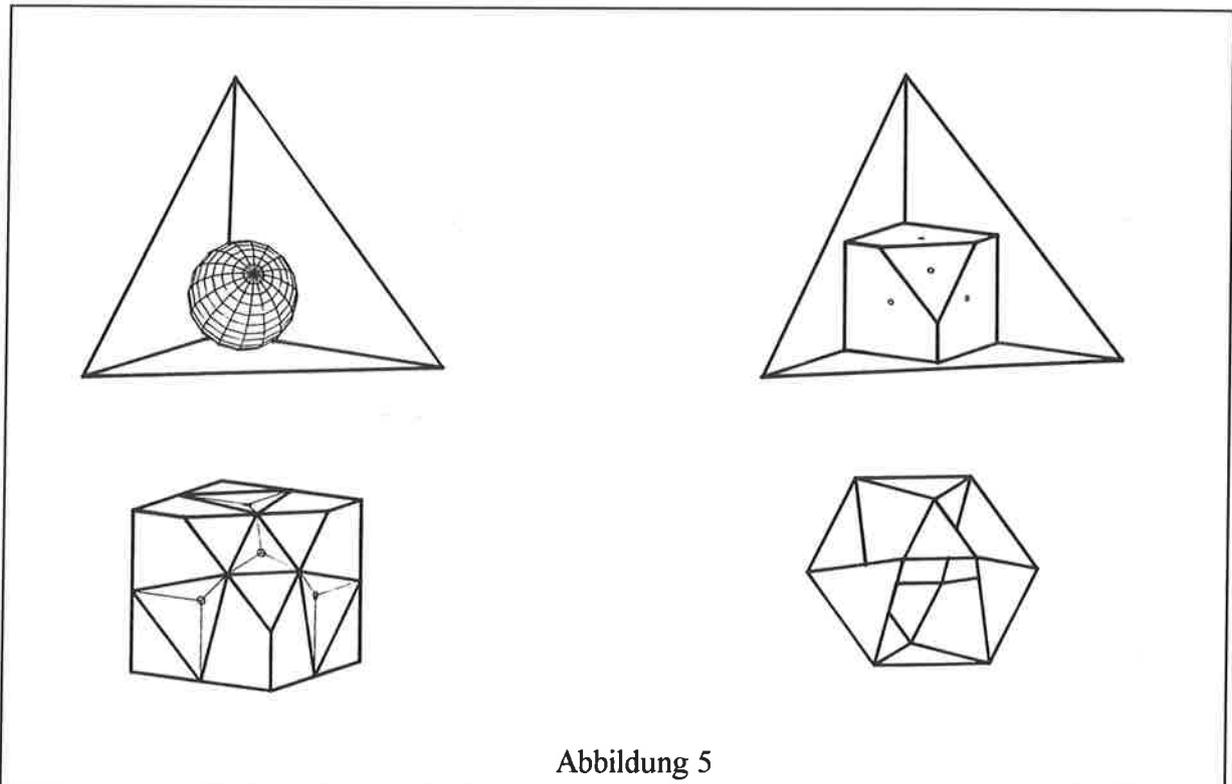


Abbildung 5

Abbildung 5 zeigt die Situation für jenen Zeitpunkt $\tau \in \mathbb{R}$, für den alle Zwangsläufe ξ_i ($i = 1..8$) gleichzeitig eine Momentandrehung besitzen. Dies wäre in (1) für $t=0$ der Fall gewesen. Links oben ist das Ausgangstetraeder samt Inkugel unter der Annahme abgebildet, daß vordere Tetraederfacette weggeschnitten ist. Rechts daneben ist ein durch Eckenstutzen entstehende Restkörper dargestellt. Links unten sind die Lote auf die Schnittkanten aus den Berührungspunkten mit der Inkugel sowie die entstehenden Fußpunktdreiecke eingetragen. Die Figur rechts unten zeigt schließlich ein Rohmodell des dadurch bestimmten übergeschlossenen Mechanismus. Aus den Hilfsüberlegungen von oben ist klar, daß auf den ursprünglichen Tetraederkanten keine Punktkoppelung zwischen den in den benachbarten Tetraederseitenflächen ablaufenden äquiformen Zwangsläufen möglich ist.

Wird nun die gesamte Figur aus dem Mittelpunkt der Kugel κ^* in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ so gestreckt oder gestaucht, daß der Zwangslauf, den τ_1 gegenüber dem Gesamttraum vollführt, zu einem euklidischen wird, so gilt dies für alle unsere Teilzwangsläufe (vgl. die Idee in [I, 15]).

Unsere Figur aus 8 Dreiecken bildet dann einen in der Bewegungsgruppe des E_3 zumindest zwangsläufigen Mechanismus aus 8 starren Dreiecken, die in den Ecken sphärisch miteinander gekoppelt sind. Da die Dreiecksebenen vor Ausüben dieser Streckungen im E_3 fixiert waren, halten sie nun festen Winkel zueinander und lassen sich daher in den Ecken sogar durch sphärische Doppelscharniere (sphärische 2R-Gelenke mit Drehachsen in den Normalen der Dreiecksebenen) koppeln. Der entstehende Mechanismus besteht daher aus 8 Dreiecken und 12 sphärischen 2R-Gelenken. Er besitzt den theoretischen Freiheitsgrad

$$(2) \quad F = 7 \cdot 6 - 12 \cdot 4 = -6$$

und ist daher eine *übergeschlossene kinematische Kette*. Die so entstehenden Beispiele sind im Gegensatz zu den bislang bekannten (auch die in [1] beschriebenen besitzen ja als Grundstruktur noch die des Würfels) i.a. vollkommen frei von regulären Teilsystemen. Die 8 Dreiecke werden i.a. weder kongruent noch ähnlich sein. Auch die Konfiguration ihrer Träger-ebenen ist bis auf ihre Kugeltangentialebene-eigenschaft nur dadurch eingeschränkt, daß noch Schnittdreiecke mit den Nachbartangentialebenen entstehen sollen.

Die so gefundene kinematische (übergeschlossene) Kette ließe sich mit Abbildung 5 durch folgenden Algorithmus (A) aus einem Tetraeder Δ^* (Ebenen $\tau_1^* \dots \tau_4^*$) herstellen:

- A1) Bestimmung der Inkugel κ^* des Tetraeders Δ^* (theoretisch wäre auch die Verwendung einer der Ankugeln möglich) und ihrer Berührungspunkte $A_1^* \dots A_4^*$.
- A2) Eckenstutzen des Tetraeders mittels 4 Tangentialebenen $\tau_5^* \dots \tau_8^*$ der Kugel κ^* und Bestimmung der Berührungspunkte $A_1^* \dots A_8^*$ mit κ^* .
- A3) Konstruktion der Lotfußpunkte auf den neu entstandenen Schnittkanten (\neq Tetraederkanten) aus den Berührungspunkten $A_1^* \dots A_8^*$ und Ermittlung der 8 Fußpunktdreiecke in den Ebenen $\tau_1^* \dots \tau_8^*$.
- A4) Verbindung je zweier benachbarter Dreiecke durch sphärische 2R-Gelenke, wobei der Winkel der Scharnierachsen aus dem Winkel der Dreiecksebenen am eckengestutzten Tetraeder abgelesen werden kann.

Wir fassen zusammen in folgendem

Satz 1: *Wird ein allgemeines Tetraeder Δ^* mit Hilfe von 4 Tangentialebenen der Inkugel (bzw. einer Ankugel) von Δ^* eckengestutzt, so liefert oben beschriebene Konstruktionsvorschrift (A) einen zumindest zwangsläufig beweglichen übergeschlossenen Mechanismus aus 8 starren Dreiecken und 12 sphärischen 2R-Gelenken.*

Bemerkungen:

- 1) Auch einige übergeschlossene Modelle aus der Arbeit [1] könnte so interpretiert werden, daß dieser allgemeine Algorithmus beim Eckenstutzen des Würfels W^* verwendet wird. Nach dem hier vorgestellten Sachverhalt ist klar, daß statt des Würfels W^* auch eine Konfiguration bestehend aus 6 Tangentialebenen einer gemeinsamen Kugel κ^* für das Ausgangsobjekt verwendet werden könnte. Zum Eckenstutzen lassen sich dann 8 weitere Tangentialebenen dieser Kugel κ^* heranziehen. Obiger Algorithmus führt in diesem Fall auf

übergeschlossene Mechanismen aus 6 starren Vierecken (nicht notwendig kongruent und auch nicht notwendig in paarweise orthogonalen Ebenen!), 8 starren Dreiecken (ebenfalls nicht notwendig kongruent) und 24 sphärischen 2R-Gelenken. Da die Formenvielfalt hier kaum zu überblicken ist, sollen neben die in [1] vorgestellten Beispiele vorerst keine neuen gestellt werden.

2) Ganz allgemein läßt sich der Algorithmus (A) immer dann einsetzen, wenn das Grundobjekt aus Facetten besteht, die eine gemeinsame In- oder Ankugel berühren, und hinsichtlich der Kanten- und Eckenfiguren die grobe Struktur eines regulären Polyeders besitzen.

3) Zusammenhang mit dem HEUREKA-Polyeder: Jedes reguläre Oktaeder kann als geeignet eckengestütztes reguläres Tetraeder Δ^* angesehen werden. Die Seitenflächen von Δ^* sind z.B. so aus den Oktaederseitenflächen auszuwählen, daß sich je zwei nicht in einer Kante des entstehenden Oktaeders schneiden. Wird der Algorithmus (A) für diese Konfiguration nachvollzogen, so entsteht der Mechanismus des HEUREKA-Polyeders.

5. Aus der Fülle der nach Satz 1 konstruierbaren Modelle sei abschließend ein *bemerkenswertes Beispiel* vorgestellt, das überraschend auch als bewegliches Würfelmodell zu deuten wäre: Das Ausgangstetraeder Δ^* bestehe aus Ursprung und den Einheitspunkten auf den Achsen eines kartesischen Normalkoordinatensystems. Zum Eckenstützen verwenden wir jene Tangentialebenen der Inkugel κ^* von Δ^* , die zu den Tetraederebenen parallel sind. Dieses eckengestützte Tetraeder, das auch durch geeignetes Stützen zweier gegenüberliegender Ecken eines Würfels entsteht, zeigt Abbildung 5. Der Restkörper werde mit P^* bezeichnet. Wir verfahren nach Algorithmus (A) und erhalten überraschend in allen Ebenen τ_i ($i = 1 \dots 8$) *gleichseitige Fußpunktdreiecke*. Dies ist wie folgt einzusehen:

a) Das in der geneigten Seitenebene τ_4^* mit der Gleichung $x^* + y^* + z^* = 1$ des Tetraeders Δ^* liegende Dreieck ist gleichseitig mit der Mitte im Berührungspunkt A_4^* mit der Inkugel κ^* . Durch unser Eckenstützen ist auch das am Restkörper P^* in τ_4^* entstehende Dreieck gleichseitig mit Mitte A_4^* . Schritt (A3) des Algorithmus liefert daher in dieser Tetraederseitenebene sicher ein gleichseitiges Dreieck. In der zu τ_4^* parallelen Tangentialebene τ_8^* erzeugt Schritt (A3) auf dem Restkörper P^* ein dazu kongruentes gleichseitiges Dreieck, da P^* wie erwähnt auch durch Eckenstützen eines Würfels mit parallelen Tangentialebenen seiner Inkugel entsteht. Für die restlichen Facetten gehen wir analytisch vor:

b) Die anderen Facetten auf dem Restkörper P^* und ihre Berührungspunkte $A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_5^*, A_6^*, A_7^*$ sind kongruent. Wir untersuchen oBdA. das in der Ebene $\tau_1^* \dots z^* = 0$ entstehende Dreieck: Die Kugel κ^* besitzt den Mittelpunkt $M^* \dots \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{6}, \frac{3 - \sqrt{3}}{6}, \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \right)$, und die zu τ_4^* parallele Tangentialebene τ_8^* die Gleichung $x^* + y^* + z^* = 2 - \sqrt{3}$. Die Tangentialebenen τ_5^* und τ_6^* werden durch $y^* = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$ bzw. $x^* = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$ erfaßt. Die auf den Spuren von τ_8^* , τ_5^* und τ_6^* in der Ebene τ_1^* bezüglich des Kugelberührungspunktes $A_1^* \dots \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3}, \frac{3 - \sqrt{3}}{3}, 0 \right)$ interessanten Lotfußpunkte besitzen der Reihe nach die Koordinaten $\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{6}, \frac{3 - \sqrt{3}}{3}, 0 \right), \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3}, \frac{3 - \sqrt{3}}{6}, 0 \right)$

und $(\frac{2-\sqrt{3}}{2}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}, 0)$. Unschwer läßt sich nachprüfen, daß diese Punkte in τ_1^* ein gleichseitiges Dreieck bestimmen. Wegen der Symmetrie unserer Aufstellung ist damit die Behauptung bewiesen.

Abbildung 6 zeigt eine Ansicht des so entstehenden Mechanismus, bei dem die Facetten als Prismen ausgebildet sind..

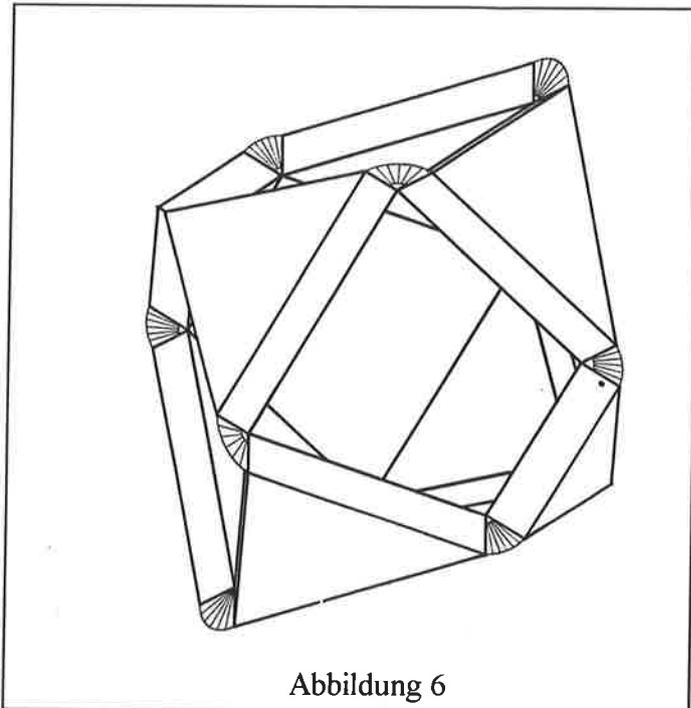


Abbildung 6

Bemerkung: Aus Überlegung B) in Abschnitt 3 folgt, daß bei diesem speziellen Mechanismus *parallelen Facetten reine Schiebungen längs Geraden als Relativzwangläufe bestimmen*: Vor der beschriebenen Streckung aus dem Kugelmittelpunkt M^* laufen in diesen parallelen Ebenen ja schiebungsgleiche lineare äquiforme Zwangläufe ab. Der Schiebvektor dieser Schiebung ist normal zu den Ebenen. Vom Zeitparameter t abhängige Streckungen aus M^* ändern bloß die Länge des Schiebvektors, nicht aber seine Richtung - der Relativzwanglauf ist damit als Schiebung längs Geraden erkannt.

6. Selbstverständlich lassen sich auch die Seiten der durch unser Eckenstützen entstehenden neuen Dreiecke als starre Stäbe zwischen den Tetraederebenen τ_1^* , τ_2^* , τ_3^* , τ_4^* materialisieren, ohne daß dadurch die Beweglichkeit des Mechanismus gestört wird. Diese Stäbe müssen dann sphärisch an den Tetraederebenen angelenkt werden. Es ist bloß darauf zu achten, daß einerseits ausreichend Stäbe zur Verfügung gestellt werden und diese sich während des Bewegungsvorganges nicht stören. Es entstehen so aus dem Ausgangstetraeder zumindest zwangläufig bewegliche übergeschlossene Stabwerke. Dies wäre als Analogie zu den beweglichen Würfelstabwerken [1] anzusehen. Der dort gegebene hohe Grad an Symmetrie muß hier im allgemeinen nicht mehr auftreten. Beispiele für solche Stabwerke sollen in einer eigenen Arbeit dieser Serie angegeben werden.

Literaturverzeichnis

- [1] RÖSCHEL, O.: Zwangläufig bewegliche Polyedermodelle I. Mathematica Pannonica (im Druck).
- [2] RÖSCHEL, O.: Zwangläufig bewegliche Polyedermodelle - Ausschneidebögen I. IBDG (in Vorbereitung).

Anschrift des Verfassers:

Otto RÖSCHEL, Institut für Geometrie, TU Graz, Kopernikusgasse 24, A-8010 GRAZ, AUSTRIA.