

Zwangläufig bewegliche Polyedermodelle - Ausschneidebögen I

von

Otto RÖSCHEL, Graz

In [1] und [2] ist es dem Autor gelungen, Konstruktionsvorschriften für zwangläufig bewegliche Polyedermodelle zu geben, bei denen benachbarte Facetten durch sphärische Doppelscharniergelenke (sphärische 2R-Gelenke) gekoppelt sind. Dabei entstehen sogenannte übergeschlossene kinematische Ketten, die bei allgemeiner Abmessung absolut starr wären, sich bei speziellen Annahmen aber zumindest zwangläufig bewegen lassen. Da es überdies möglich ist, aus stärkerem Zeichenpapier gut haltbare und auch ansprechend bewegliche Modelle herzustellen, sollen hier Ausschneidebögen (mit Herstellungshinweisen) vorgestellt werden.

Bekannt sind ja die ESCHER-Motive auf den Modellen [3], die sich bei Schülern und Studenten großer Beliebtheit erfreuen.

Daß sich die hier vorgestellten Modelle tatsächlich zwangläufig bewegen lassen, möge der Leser in [1] bzw. [2] nachlesen. Dort findet sich auch die allgemeine Konstruktionsvorschrift, mit deren Hilfe sich beliebig viele weitere dieser Modelle herstellen ließen. Aus der Fülle dieser Möglichkeiten soll hier ein Modell mit der groben Struktur eines an zwei Ecken gestutzten Würfels hergestellt werden, das bereits in [2] als Beispiel untersucht wurde.

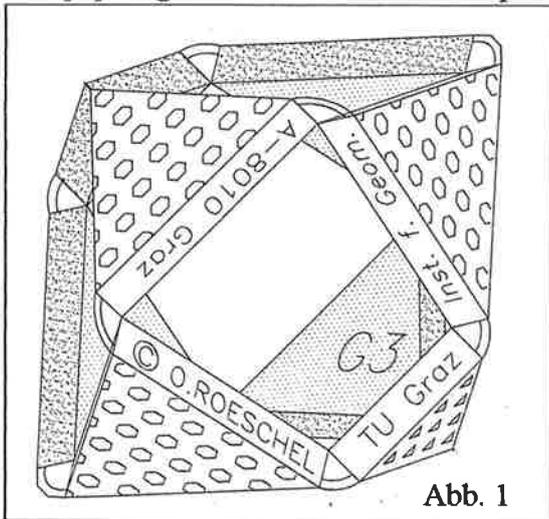


Abb. 1

Abb. 1 zeigt eine axonometrische Ansicht des zu erstellenden Modells. Es besteht aus 8 prismatischen Facetten mit gleiseitigen Dreiecken als Grundflächen. Die 6 großen Facetten sind so wie die beiden kleineren jeweils kongruent. In Abb.1 wurde der besseren Übersicht halber eine gewisse Rasterung vorgenommen, die sich auf den Ausschneidebögen nicht findet. Der "Bastler" möge sich dadurch nicht stören lassen.

Herstellungsanleitung:

1) Den Ausschneidebogen zweckmäßigerweise auf stärkeres Zeichenpapier kopieren (vielleicht auch vergrößern), dann die Einzelteile längs der (dick gezeichneten) äußeren Konturen ausschneiden.

2) Die Kreisbögen (je 3 pro Facette) an den bezeichneten Stellen von außen bis zum Kreismittelpunkt einschneiden (siehe Abbildung 2).

3) Jedes Facettenteilstück längs der dünnen Linien vorsichtig ritzen und zum Prisma biegen, sodaß für die kleineren Facetten etwa die Situation von Abbildung 3 erreicht wird (für die 6 großen stellt sich eine sinngemäß analoge Figur ein). Die Beschriftung bleibt außen. Die Kreisbogenlaschen sind dabei unbedingt ins Äußere des Prismas zu ziehen!

4) Nun die Klebelaschen mit Klebstoff bestreichen und den Deckel der Facette daran festkleben. Dies wird erleichtert, wenn je zwei Kreisbogenlaschen mit gemeinsamer Prismenkante mit einer Wäscheklammer fixiert werden. Die "abstehenden" Kreissektoren werden jedoch noch nicht verklebt! Dabei ist unbedingt darauf zu achten, daß jedes der entstehenden 8 Prismen tatsächlich gerade ist (d.h.: Kantenrichtung orthogonal zur dreieckigen Basis).

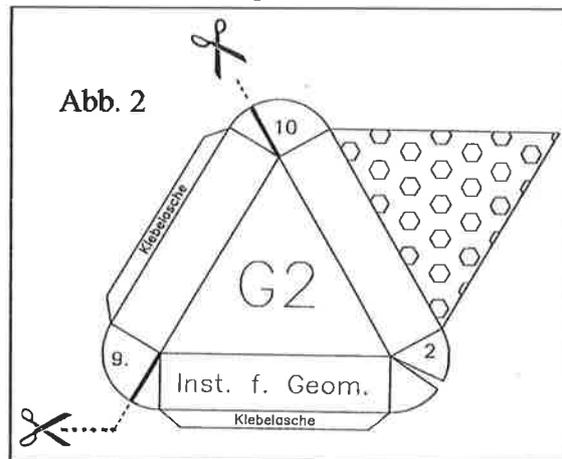


Abb. 2

5) Nach dem Trocknen des Klebers werden die abstehenden Kreissektoren längs der geritzten Drehachsen (= Scharniere in Abbildung 3!) nach außen und wieder zurückgebogen - dies erhöht die Beweglichkeit des fertigen Modells.

6) Nun werden die einzelnen Facetten mittels ihrer abstehenden Laschen (Kreissektoren) aneinandergelinkt (siehe Abbildung 4). Die Gelenke sind auf dem Ausschneidebogen durchnummeriert. Gleichnamige Laschen einer Facette werden mit denen der Nachbarfacette verklebt. Dabei ist darauf zu achten, daß zwischen je zwei großen Dreiecksfacetten (G1 bis G6) der in Abb. 4 angedeutete Winkel 90° , der zwischen kleinen (K1 und K2) und großen (G1 bis G6) hingegen $\arccos(1/\sqrt{3}) \approx 55^\circ$ beträgt. (Jeweils die größere der abstehenden Laschen gibt den richtigen Winkel an). Die Klebestellen werden zweckmäßig bis zum Eintrocknen des Klebers mit Wäscheklammern fixiert. Dabei gelangen die beschrifteten Facettendreiecke ins Innere des entstehenden Modells, bleiben aber durch die entstehenden "Löcher" noch teilweise zu sehen.

7) Nach dem Trocknen des Klebers Klammern vorsichtig lösen, Haltbarkeit des Modells noch einmal testen.

Nun kann der *erste Bewegungsversuch* gestartet werden: Dazu werden zwei benachbarte Facetten gegeneinander verdreht.

Bemerkungen: (vgl. teilweise die Ausführungen in [2])

1) Die Winkel zweier Nachbarfacetten bleiben während des gesamten Bewegungsvorganges konstant (90 bzw. ca. 55°).

2) Gegenüberliegende Facetten bleiben während des Zwanglaufes parallel- ihre Relativzwangläufe sind Schiebungen längs Geraden.

3) Unter den verschiedenen Lagen des Zwanglaufes ist jene am interessantesten, in der die maximale Ausdehnung erreicht wird. Es scheint so, als ob an dieser Stelle zusätzlich zur zwangläufigen Beweglichkeit noch ein zusätzlicher Grad an "Wackeligkeit" auftritt. Dies wurde in [2] nicht untersucht, soll aber unter Umständen in einer Fortsetzung der Arbeiten [1] und [2] studiert werden.

4) Dieses Modell kann auch durch Eckenstützen eines nichtregulären Tetraeders entstehen. Würde der verwendete Algorithmus auf ein reguläres Tetraeder angewendet, könnte ein sogenanntes HEUREKA-Polyeder entstehen, dessen Beweglichkeit unlängst von H. STACHEL in [4] bzw. [5] ausführlich untersucht wurde.

Der Autor plant, weitere Ausschneidebögen dieser Art herzustellen und bittet daher um Rückmeldung, ob die Herstellungshinweise fürs Basteln ausreichen.

Literatur:

[1] Röschel, O.: Zwangläufig bewegliche Polyedermodelle I. Math. Pann. (im Druck).

[2] Röschel, O.: Zwangläufig bewegliche Polyedermodelle II. Stud. Sci. Math. Hung. (im Druck).

[3] Schattschneider, D. und Waker, W.: M.C.Escher Kaleidozyklen. TACO, Berlin 1987.

[4] Stachel, H.: The Heureka Polyhedron. Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 447 - 459 (1991).

[5] Stachel, H.: Zwei bemerkenswerte bewegliche Strukturen. Journal of Geometry 43, 14-29 (1992).

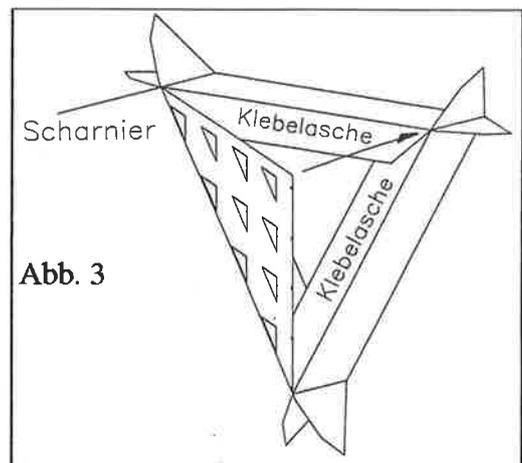


Abb. 3

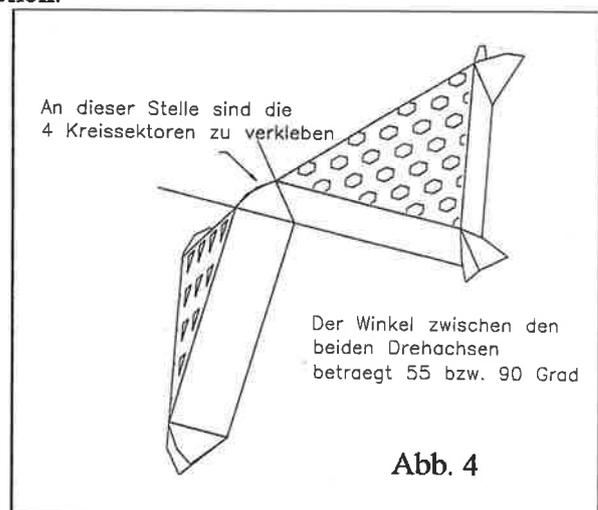
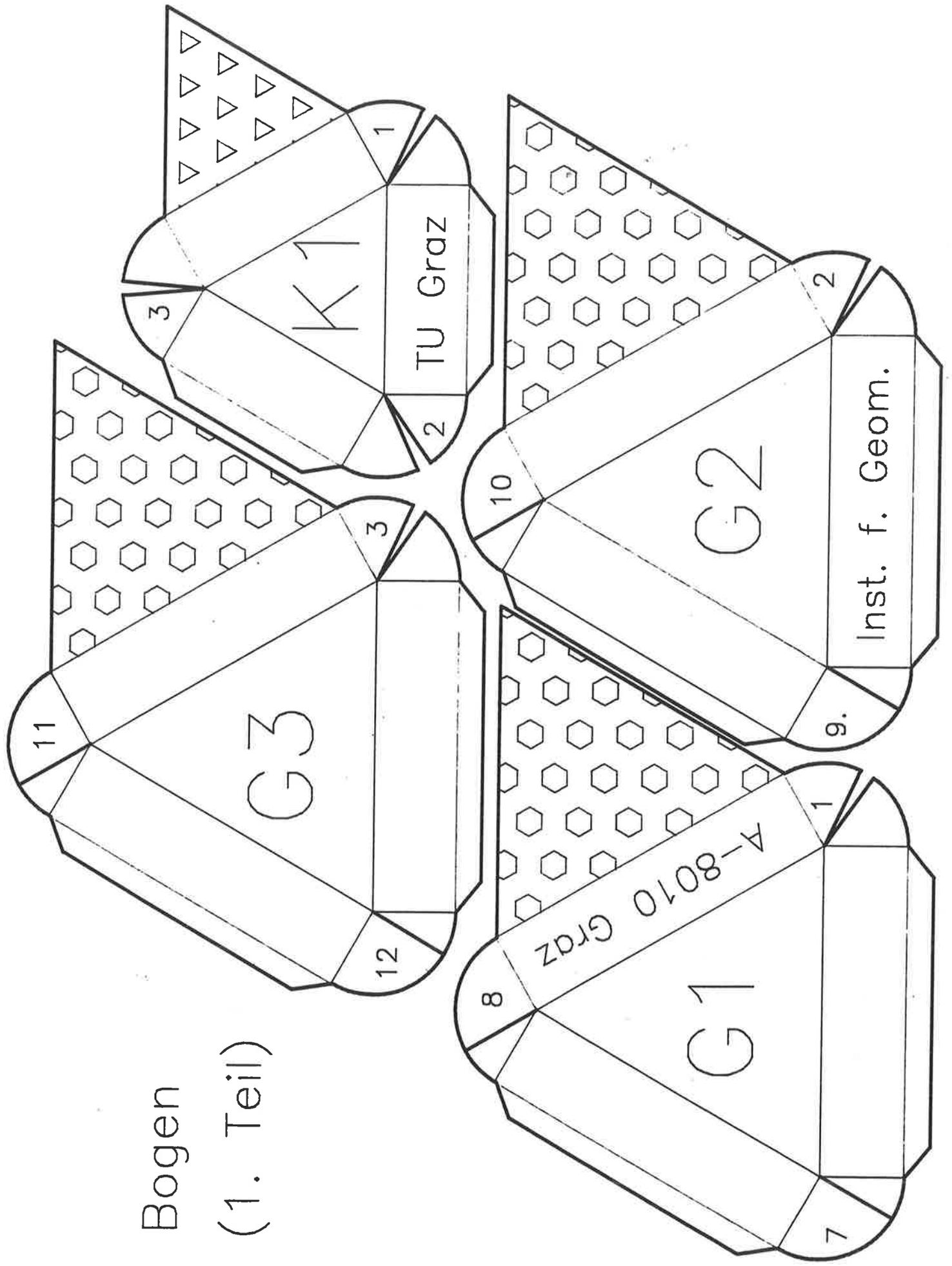


Abb. 4

Bogen
(1. Teil)



Bogen
(2. Teil)

