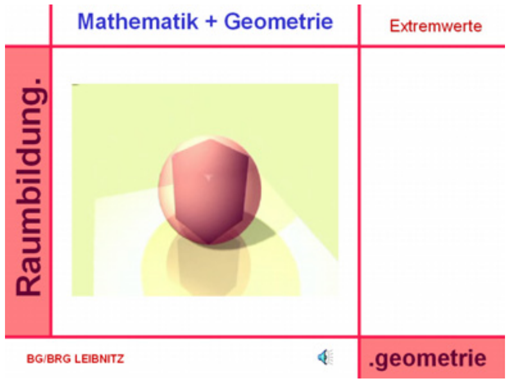
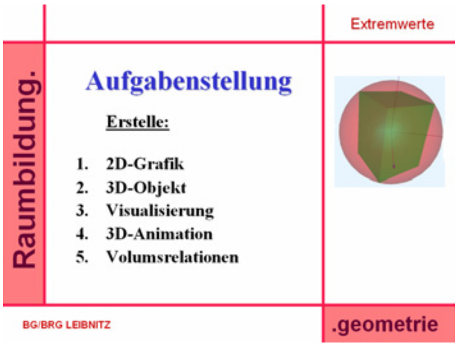
Extremwertanimation

Aufgabenstellung: aus Mathematikbuch:
Reichel, Bd.7, 465a

> Einer Kugel (Radius r) ist das volumsgrößte gerade Prisma einzuschreiben, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Viereck ist. Berechne das Verhältnis der Rauminhalte der beiden Körper.





Ziele:

- Variables Konstruieren,
- Erkennen von geometrischen und mathematischen Zusammenhängen,
- Gestaltung einer Animation, in der mathematische Notwendigkeiten (Nebenbedingung) sichtbar werden,
- Gestaltung einer Animation, in der die Veränderlichkeit einer Größe (Hauptbedingung) sichtbar wird.

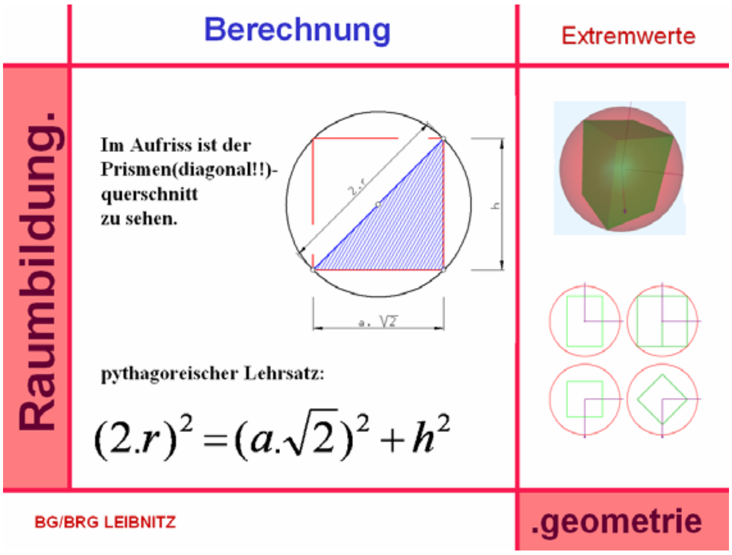
Variablendefinition:

Für die Kugel wählen wir den Radius r.

Das regelmäßige quadratisches Prisma besitze die Basislänge a und die Höhe h. Ein mathematisches Ziel solcher Extremwertaufgaben ist das Erkennen der Abhängigkeiten der beiden Variablen a und h.

Dienlich ist eine Querschnittsskizze, die einen Kugelgroßkreis, ein Prismenquerschnittsrechteck und ein pythagoreisches Dreieck zeigt.

Die größte Schwierigkeit besteht in der Einsicht, dass im Aufriss ein Prismen(diagonal!!)querschnitt zu sehen ist. Damit hat die waagrechte Rechtecksseite nicht die Länge a, sondern $a.\sqrt{2}$ (=Diagonallänge des Basisquadrates).



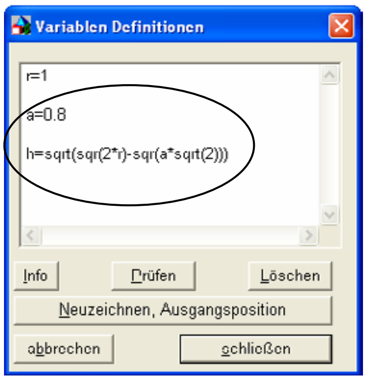
Die Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes ergibt,

$$(2.r)^2 = (a.\sqrt{2})^2 + h^2$$

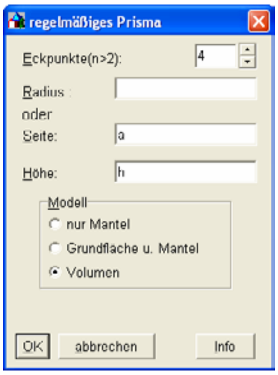
und liefert den Zusammenhang von a, h und r.

Somit

$$h = \sqrt{(2.r)^2 - (a.\sqrt{2})^2}$$



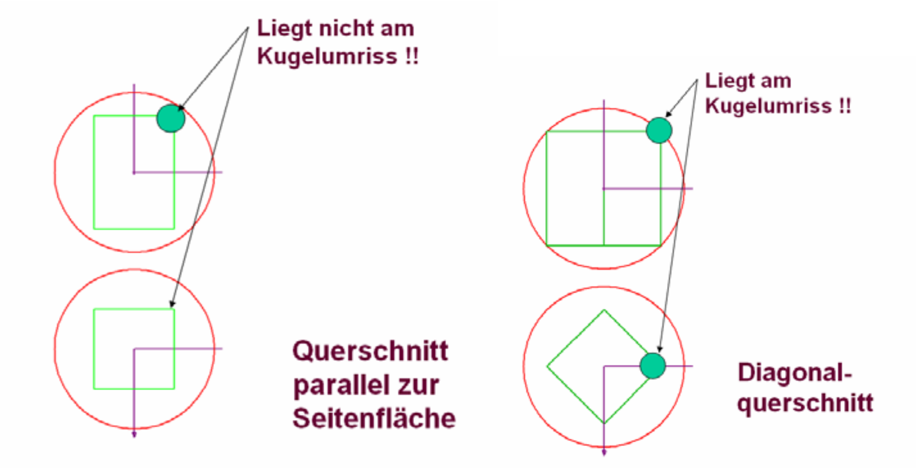
In GAM kann nun die Prismenhöhe h als Variable festgelegt werden: Beachte dabei die Syntax.

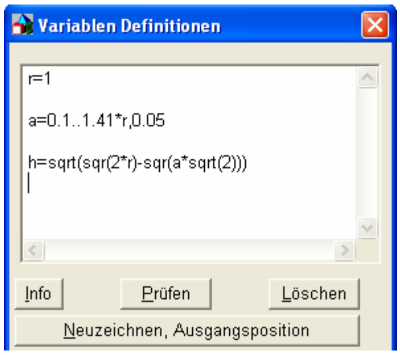


Wir konstruieren nun die Kugel und das regelmäßige quadratisches Prisma. Damit das Prisma der Kugel eingeschrieben ist, muss es noch um die Länge –h/2 in Richtung z verschoben werden.

Um die Einsicht obiger Vorgangsweise zu verstärken, ist eine Animation, in der das konstruierte Prisma um die z-Achse rotiert, sehr hilfreich.

Zur Lösung der Extremwertaufgabe, muss in der Nebenbedingung obiger mathematischer Zusammenhang Berücksichtigung finden, der die Konstruktion mittels GAM erst ermöglicht. Durch Zuziehung des CAD-Programms kann die Richtigkeit (vielleicht aber auch die Unrichtigkeit) eines Ansatzes unmittelbar beobachtet und erkannt werden.





Setzt man die aus der Nebenbedingung gewonnene zweite Variable in die Hauptbedingung (Prismenvolumen) ein, entsteht eine Zuordnung, die das Volumen in Abhängigkeit von der Basislänge a ermittelt. Wir erhalten eine Funktion, die zwei Randextrema, in denen das Volumen Null ist, und das gesuchte Maximum besitzt.

Dieser dynamische Aspekt lässt sich nun mit GAM animieren. Ziel ist das Anwachsen des Prismas von der ersten Extremposition (unendlich dünner „Besenstiel“ von Pol zu Pol) bis zur gesuchten Maximallösung und danach das Absinken zur 2. Extremposition (hauchdünne Scheibe am Kugel-äquator) sichtbar zu machen.

Hiezu wählen wir a als Laufvariable.

Die Variation läuft von a = 0 (= unendlich dünnes Prisma = „Besenstiel“) bis a = $r.\sqrt{2}$ (= unendlich dünnes Prisma = „Verkehrstafel“) und ergibt jeweils ein Prisma, dessen Volumen vom (minimalen) Extremwert 0 anwächst, an einem bestimmten Punkt sein maximales Volumen erreicht und sodann auf den (minimalen) Extremwert 0 wieder herabsinkt.

Da GAM kein Prisma mit der Basisseitenlänge 0 bzw $a = r.\sqrt{2}$ ⇨ Höhe h=0 konstruieren kann, ist zu beachten, dass die exakten Randwerte vermieden werden. Der Intervallbereich für a wird daher mit [0.1,1.41*r] gewählt.

2. Konstruktionsansatz:

Wir verwenden nun die Höhe h als Laufvariable.
(Damit kann die notwendige Ableitungsfunktion leichter behandelt werden!)

Objekte + Animation:

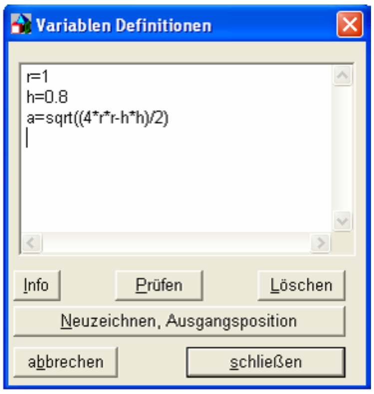
Unter Berücksichtigung des Satzes von Pythagoras ergibt sich die Beziehung:

$$(2.r)^2 = (a.\sqrt{2})^2 + h^2$$

Daraus berechnen wir die Basisseitenlänge a des Prismas:

$$a=\sqrt{\frac{(2.r)^2-h^2}{2}}=\sqrt{\frac{4*r*r-h*h}{2}}$$

Dies geben wir im Variablen Definitionsfenster von GAM (Wurzel = sqrt) ein.

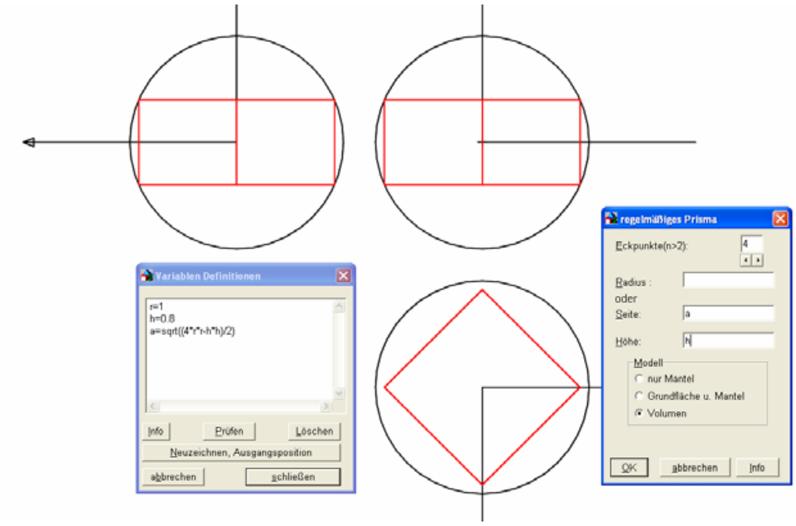


Danach lässt sich das Prisma konstruieren und muss noch um h/2 nach unten verschoben werden.

Durch die Wahl von

h=0.001..2*r*0.999,0.05

(von „beinahe“ 0 bis „beinahe“ 2r) ist eine Animation gestaltbar, in



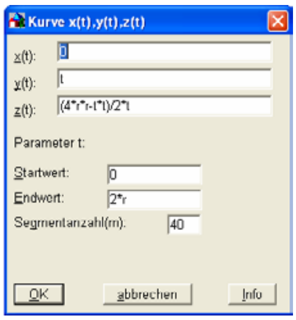
der die Veränderlichkeit des eingeschriebenen Prismas verdeutlicht wird. Ist h=0 erhalten wir eine „hauchdünne“ quadratische Briefmarke mit Seitenlänge $a.\sqrt{2}$ und beim mögliche Maximalwert h=2.r einen „hauchdünnen“ quadratischen Besenstil.
Bei der Eingabe in GAM ist zu berücksichtige, dass diese Randextrema nicht dargestellt werden können, und daher ein kleiner Fehler einzubauen ist.

Funktion:

Die Volumsfunktion des Prismas lautet: $V_{(a,h)}=a^2.h$

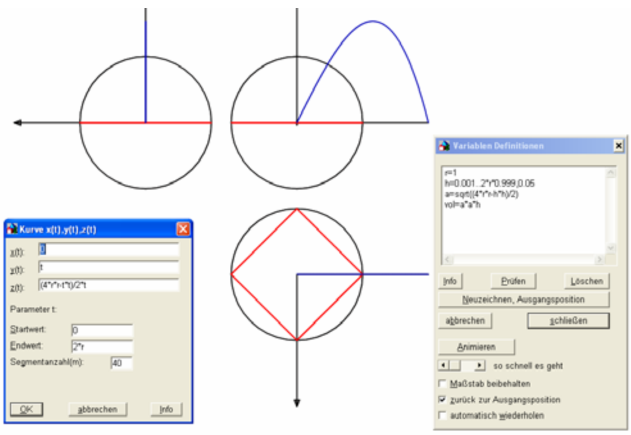
In GAM geben wir im Variablenfenster ein: vol = (4*r*r – h*h)/2 * h

Zum Zeichnen des Funktionsgrafens wird



x(t) = 0 in der [yz]-Ebene
y(t) = t ist der Konstruktionsparameter (immer t) und entspricht der Prismenhöhe h

z(t) = (4*r*r – t*t)/2 * t t = h !



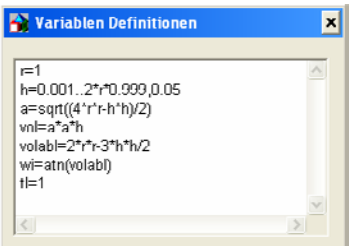
mit Startwert 0 und dem Endwert 2*r (maximale Höhe) gesetzt.

Tangente samt Animation:

Um den dynamischen Ansatz der Aufgabenstellung zu verdeutlichen konstruieren wir die Tangente an die Kurve und lassen diese danach an der Kurve entlang laufen.

Konstruktionsablauf:

- Tangente als Strecke
- Drehung der Tangente um den Steigungswinkel
- Positionierung der Tangente auf der Kurve



Volumsfunktion: $V(h)=\dfrac{(4.r^2-h^2)}{2}\,.\,h = 2.r^2.h - \dfrac{h^3}{2}$

Ableitungsfunktion: $V'(h)=2.r^2-\dfrac{3.h^2}{2}$

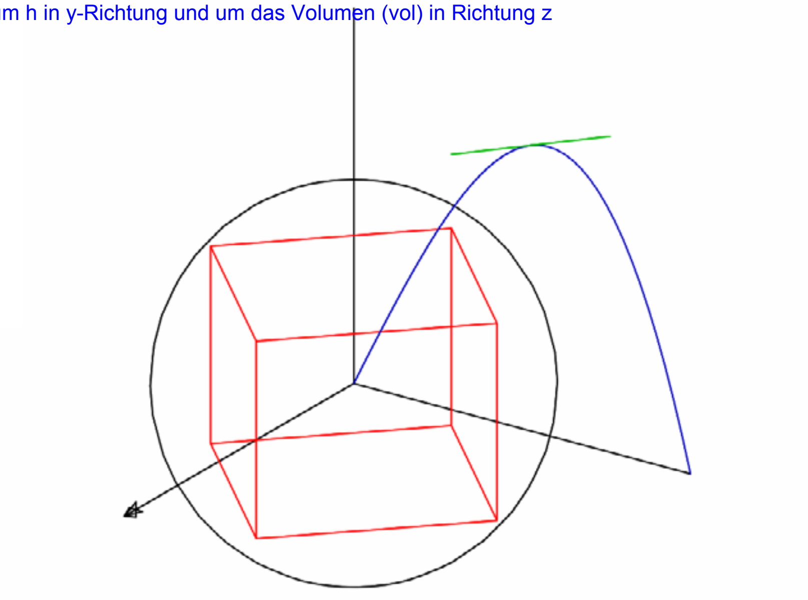
GAM volabl = 2*r*r – 3*h*h/2

volabl = Steigung = k = Tangens(Neigungswinkel zur x-Achse)

Neigungswinkel wi = atn(volabl) Arcustangens

tl….Tangentenlänge als Variable

STRECKE grün
DEF(0,-tl/2,0,0,tl/2,0) Tangente als Strecke auf der y-Achse symmetrisch zum Ursprung
D(wi,0,0) Drehung der Strecke um die x-Achse um den Winkel wi
T(0,h,vol) Verschiebung um h in y-Richtung und um das Volumen (vol) in Richtung z



Das gesuchte Verhältnis ist:

$v = a^2 \cdot h$

Nebenbedingung = pythagoreischer Lehrsatz

$(2 \cdot r)^2 = (a \cdot \sqrt{2})^2 + h^2$

$a^2 = \dfrac{4 \cdot r^2 - h^2}{2}$

Volumensfunktion:

$v = \dfrac{4 \cdot r^2 - h^2}{2} \cdot h$

1. Ableitung

$dV/dh = \dfrac{4 \cdot r^2 - 3 \cdot h^2}{2} = 0$

$h = -\dfrac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot r}{3} \vee h = \dfrac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot r}{3}$

$\dfrac{8 \cdot \sqrt{3} \cdot r^3}{9}$

V(maximal)=8 · √3 · r^3/9

$$V_{Kugel} : V_{Prisma} = \sqrt{3}.\pi : 2$$