

DIFFERENTIALGEOMETRIE

JOHANNES WALLNER, INSTITUT FÜR GEOMETRIE DER TU GRAZ
(SKRIPTUM ZUR VORLESUNG IM SOMMERSEMESTER 2010)

INHALTSVERZEICHNIS

1. Kurven und Flächen im Euklidischen Raum	1
1.1. Kurven	1
1.2. Geometrische Invarianten	5
1.3. Teilmannigfaltigkeiten — Flächen im Raum	6
1.4. Der Tangentialvektorraum	8
1.5. Matrizen­gruppen	9
1.6. Differenzierbare Abbildungen von Teilmannigfaltigkeiten	10
1.7. Die innere Metrik einer Teilmannigfaltigkeit	12
1.8. Integration	14
2. Elementare Krümmungstheorie	17
2.1. Die Krümmungsform	17
2.2. Die lokale Gestalt von $(m-1)$ -Flächen im \mathbb{R}^m	19
2.3. Die abtragende Abbildung	20
2.4. Minimalflächen	22
3. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	25
3.1. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	25
3.2. Tangentialvektoren und Abbildungen	26
3.3. Vektorfelder und Integralkurven	27
3.4. Tensorfelder	30
4. Riemannsche Geometrie	33
4.1. Mannigfaltigkeiten mit Riemannscher Metrik	33
4.2. Zusammenhänge und die kovariante Ableitung	34
4.3. Geodätische Parallelverschiebung	36
4.4. Riemannsche Zusammenhänge	38
4.5. Geodätische Linien	40
4.6. Die erste Variation der Energie einer Kurve	43
4.7. Vollständigkeit	44
4.8. Zerlegung der Eins und Integration	46
5. Krümmung in Riemannschen Räumen	49
5.1. Der Riemannsche Krümmungstensor	49
5.2. Wegabhängigkeit der Parallelverschiebung	50
5.3. Die Schnittkrümmung	52
5.4. Jacobi-Felder	53
5.5. Konjugierte Punkte und minimale geodätische Linien	55
5.6. Riemannsche Teilmannigfaltigkeiten	56
5.7. Der Integralsatz von Gauß-Bonnet	60
6. Relativitätstheorie	65
A. Anhang	69
A.1. Geometrie	69
A.2. Analysis	69
A.3. Topologie	72
Literatur	75
Deutsch-Englisches Glossar	77

1. KURVEN UND FLÄCHEN IM EUKLIDISCHEN RAUM

1.1. Kurven.

DEFINITION 1.01. (*Kurve, Schmiegraum, Tangente*) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Abbildung $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Kurve, wenn c eine C^r -Abbildung mit $r \geq 1$ ist. Der affine Unterraum $c(t) + [\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dots, c^{(k)}(t)]$ ist der k -Schmiegraum der Kurve c an der Stelle t . Der 1-Schmiegraum heißt Tangente.

Der k -Schmiegraum ist nur dann definiert, wenn die ersten k Ableitungen existieren. Wir werden später noch oft Begriffe definieren, die eine gewisse offensichtliche Differenzierbarkeit voraussetzen und dies nicht explizit erwähnen.

DEFINITION 1.02. (*Regularität, Wendepunkt*) Eine Kurve c ist regulär, wenn $\dot{c} \neq 0$. c hat einen Wendepunkt dort, wo sie regulär ist, jedoch \dot{c}, \ddot{c} linear abhängig sind.

DEFINITION 1.03. (*Parameterwechsel*) Ist $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $\gamma : I' \rightarrow I$ ein Diffeomorphismus, dann sagt man, dass $c' = c \circ \gamma$ aus c durch Parameterwechsel entsteht.

SATZ 1.04. *Der Schmiegraum einer Kurve zu einem Parameterwert t ist invariant bei Parameterwechseln und bei Anwenden von euklidischen Kongruenztransformationen.*

BEWEIS. Sei $c' = c \circ \gamma$. Aus der Kettenregel $\dot{c}' = \dot{c} \circ \gamma \cdot \dot{\gamma}$, $\ddot{c}' = \dots$ folgt, dass die Ableitung $c'^{(k)}(t)$ eine Linearkombination der ersten k Ableitungen von c an der Stelle $\gamma(t)$ ist. Bezeichnen wir den Schmiegraum von c an der Stelle t mit $S(c, t)$, so folgt daraus $S(c', t) \subseteq S(c, \gamma(t))$. Wegen $c = c' \circ \gamma^{-1}$ gilt auch $S(c, u) \subseteq S(c', \gamma^{-1}(u))$ für alle u . Damit ist $S(c, t)$ invariant gegenüber Parametertransformationen.

Invarianz gegenüber Kongruenzabbildungen folgt aus der Vertauschbarkeit von linearen Abbildungen und Differentiation: Ist $\alpha(x) = Ax + a$ mit einer Matrix A und einem Schiebvektor a , so gilt $(\alpha \circ x)^{(k)} = A \cdot x^{(k)}$, d.h. offenbar ist $S(\alpha \circ c, t) = \alpha(S(c, t))$. \square

DEFINITION 1.05. (*Bogenlänge, Bogenlängenparameter*) Die Bogenlänge der Kurve c im Intervall $[a, b]$ ist definiert durch

$$L_a^b(c) = \int_{[a,b]} \|\dot{c}(t)\| dt.$$

Die Kurve ist nach der Bogenlänge bzw. proportional zur Bogenlänge parametrisiert, wenn $\|\dot{c}\| = 1$ bzw. $\|\dot{c}\| = \text{const.}$

Eine Kurve, die proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist, kann man sich als mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen vorstellen.

SATZ 1.06. *Die Bogenlänge $L_a^b(c)$ einer Kurve c ist invariant bei Parametertransformationen und bei Anwenden von euklidischen Kongruenztransformationen.*

BEWEIS. Sei $c' = c \circ \gamma$. Wir benützen $\text{sgn}(\dot{\gamma}) = \text{const}$.

$$\begin{aligned} L_a^b(c') &= \int_{[a,b]} \|\dot{c}'\| dt = \int_{[a,b]} \|\dot{\gamma}(t)\dot{c}(\gamma(t))\| dt = \int_{[a,b]} \|\dot{c}(\gamma(t))\| |\dot{\gamma}(t)| dt \\ &= \int_{[\gamma(a),\gamma(b)]} \|\dot{c}\| dt = L_{\gamma(a)}^{\gamma(b)}(c). \end{aligned}$$

Um für $\alpha(x) = A \cdot x + a$ die Gleichheit $L(\alpha \circ c) = L(c)$ zu zeigen, verwenden wir $\|(\alpha \circ c)'\| = \|A \cdot \dot{c}\| = \|\dot{c}\|$. \square

SATZ 1.07. Für alle Kurven mit $\dot{c} \neq 0$ gibt es eine Parametertransformation γ , sodass $c \circ \gamma$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

BEWEIS. Wir verwenden als Parametertransformation γ mit

$$\gamma^{-1}(t) = \tilde{\gamma}(t) = \int_{\tau=t_0}^t \|\dot{c}(\tau)\| d\tau.$$

Dann ist $\dot{\tilde{\gamma}}(t) = \|\dot{c}(t)\|$, d.h. $\tilde{\gamma}$ ist Diffeomorphismus und $\dot{\gamma} = \frac{d}{dt}\tilde{\gamma}^{-1} = (\dot{\tilde{\gamma}} \circ \gamma)^{-1} = \|\dot{c} \circ \gamma\|^{-1}$. Zu zeigen ist nun $\|\frac{d}{dt}(c \circ \gamma)\| = \|(\dot{c} \circ \gamma) \cdot \dot{\gamma}\| = 1$. \square

SATZ 1.08. Unter allen stückweise differenzierbaren Kurven, die zwei Punkte $p, q \in \mathbb{R}^n$ verbinden, sind genau die monoton parametrisierten Geraden die kürzesten.

BEWEIS. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $p = 0$ und $q = (d, 0, \dots, 0)$ mit $d > 0$. Sei $c(0) = p$, $c(1) = q$. Dann ist $L_0^1(c) = \int_0^1 ((\dot{c}^1)^2 + \dots + (\dot{c}^n)^2)^{1/2} dt \geq \int_0^1 |\dot{c}^1| dt \geq |\int_0^1 \dot{c}^1| = |c^1(1) - c^1(0)| = d$ mit Gleichheit genau für $\dot{c}^1 \geq 0$ und $\dot{c}^2 = \dots = \dot{c}^n = 0$, d.h. c^1 monoton, und $c^2 = \dots = c^n = \text{const} = 0$. \square

SATZ 1.09. Die Bogenlänge einer Kurve ist gleich dem Supremum der Längen der eingeschriebenen Streckenzüge $L_a^b(c) = \sup \sum \|c(t_{i+1}) - c(t_i)\|$, wobei das Supremum über alle Unterteilungen $a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$ genommen wird (d.h. $L_a^b(c)$ ist die totale Variation von c im Intervall $[a, b]$, vgl. A.27).

BEWEIS. Wir bezeichnen die rechte Seite der Gleichung mit $\tilde{L}_a^b(c)$. Sei $a \leq t \leq b$. Unterteilungen von $[a, t]$ und $[t, b]$ ergeben zusammen eine Unterteilung von $[a, b]$, deshalb gilt $\tilde{L}_a^t(c) + \tilde{L}_t^b(c) \leq \tilde{L}_a^b(c)$ (das Supremum bei L_a^b wird über eine größere Klasse von Unterteilungen genommen). Umgekehrt kann jeder Unterteilung von $[a, b]$ durch Einfügen des zusätzlichen Teilungspunktes t Unterteilungen von $[a, t]$ und $[t, b]$ zugeordnet werden. Das Polygon $c(t_0), c(t_1), \dots$

wird bei diesem Einschub eines zusätzlichen Punktes nicht kürzer. Deshalb gilt $\tilde{L}_a^b(c) \leq \tilde{L}_a^t(c) + \tilde{L}_t^b(c)$, und insgesamt $\tilde{L}_a^t(c) + \tilde{L}_t^b(c) = \tilde{L}_a^b(c)$. Wegen 1.08 ist $L_a^b \geq \tilde{L}_a^b$. Wir zeigen, dass sogar Gleichheit gilt: Aus $\|c(t+h) - c(t)\| \leq \tilde{L}_t^{t+h} \leq L_t^{t+h}$ folgt

$$\left\| \frac{c(t+h) - c(t)}{h} \right\| \leq \frac{\tilde{L}_t^{t+h} - \tilde{L}_t^t}{h} \leq \frac{L_t^{t+h} - L_t^t}{h} \|\dot{c}(t)\|$$

Der Grenzübergang $\lim_{h \rightarrow 0}$ zeigt $\|\dot{c}(t)\| \leq \frac{d}{dt} \tilde{L}_a^t(c) \leq \|\dot{c}(t)\|$, d.h. $\tilde{L}_a^t(c)$ ist differenzierbar und seine Ableitung stimmt überein mit der von $L_a^t(c)$. \square

DEFINITION 1.10. (Begleitbasis) Sind die ersten $n - 1$ Ableitungsvektoren einer Kurve im \mathbb{R}^n linear unabhängig, so entstehen aus ihnen durch Gram-Schmidtsche Orthonormalisierung Vektoren e_1, \dots, e_{n-1} . Der Vektor e_n ist eindeutig bestimmt durch $\langle e_i, e_n \rangle = 0$ für

$1 \leq i \leq n-1$ und $\det(e_1 \dots e_n) = 1$ (d.h. $e_n = e_1 \times \dots \times e_{n-1}$). Die Vektoren $e_1(t), \dots, e_n(t)$ heißen dann die Begleitbasis der Kurve.

Unser Ziel ist es, aus den Ableitungen der Vektoren der Begleitbasis geometrische Größen, die die Kurve bestimmen, herzuleiten. Zuerst sehen wir, dass

$$e_j \in [\dot{c}, \dots, c^{(j)}] \implies \dot{e}_j \in [\dot{c}, \dots, c^{(j+1)}] \subseteq [e_1, \dots, e_{j+1}], \text{ d.h.}$$

$$\dot{e}_i = \sum_{j=1}^n \omega_{ij} e_j \quad \text{mit } \omega_{ij} = 0 \text{ für } j > i + 1.$$

LEMMA 1.11. Die Matrix (ω_{jk}) ist schiefsymmetrisch und besitzt nur Nebendiagonaleinträge. Es ist $\omega_{j,j+1} > 0$ für $j \leq n-2$.

$$(\omega_{jk}) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_{n-1,n} & 0 \end{bmatrix}$$

BEWEIS. Die Begleitbasis ist eine Orthonormalbasis, also ist

$$\langle \dot{e}_i, e_k \rangle = \left\langle \sum \omega_{ij} e_j, e_k \right\rangle = \omega_{ik}.$$

Durch Ableiten von $\langle e_k, e_j \rangle = \text{const.}$ folgt $\langle \dot{e}_k, e_j \rangle + \langle e_k, \dot{e}_j \rangle = 0$, d.h. die schiefe Symmetrie der Matrix (ω_{ij}) . Wegen $\omega_{i,j} = 0$ bei $j > i + 1$ folgt nun die Gestalt der Matrix. Wir zeigen $\omega_{j,j+1} > 0$ für $j < n-1$:

Die Matrix der Koordinatentransformation zwischen den Basen $(\dot{c}, \dots, c^{(j)})$ und (e_1, \dots, e_j) ($j < n$) ist eine obere Dreiecksmatrix mit positiven Einträgen in der Hauptdiagonale (nach Gram-Schmidt), ihre Inverse daher ebenfalls.

Es folgt $e_j = \mu_j c^{(j)} + \dots + \mu_1 \dot{c}$ mit $\mu_j > 0$. Durch Differenzieren erhält man $\dot{e}_j = \mu_j c^{(j+1)} + r$ mit $r \in [\dot{c}, \dots, c^{(j)}]$. Wegen der Gestalt der Trafo-Matrix ist nun $\dot{e}_j = \omega_{j,j+1} e_{j+1} + \dots + \omega_{j,1} e_1$ mit $\omega_{j,j+1} > 0$. \square

DEFINITION 1.12. (Krümmung, Ableitungsgleichungen) Mit $v = \|\dot{c}\|$ heißen die Größen $\kappa_i = \omega_{i+1,i}/v$ die Krümmungen der Kurve c . Die Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{e}_1/v &= & \kappa_1 & e_2 \\ \dot{e}_2/v &= -\kappa_1 & e_1 & + \kappa_2 & e_3 \\ & \vdots & & & \\ \dot{e}_{n-1}/v &= -\kappa_{n-2} & e_{n-2} & + \kappa_{n-1} & e_n \\ \dot{e}_n/v &= -\kappa_{n-1} & e_{n-1} & & \end{aligned} \quad \text{wobei } v = \|\dot{c}\|$$

heißen Ableitungsgleichungen nach J. F. Frenet und J. A. Serret.

LEMMA 1.13. $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-2}, |\kappa_{n-1}|$ sind invariant bei Parametertransformationen und Anwendung von Kongruenztransformationen. Das Vorzeichen von κ_{n-1} ändert sich bei orientierungsumkehrenden euklidischen Kongruenztransformationen, und bei $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$ auch bei Parametertransformation, bei denen die Durchlaufrichtung geändert wird.

SATZ 1.14. (Hauptsatz der lokalen Kurventheorie) Sind $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ reellwertige Funktionen mit $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-2} > 0$, $\kappa_j \in C^{n-1-j}$,

$p \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in I$ und $e_{1,0}, \dots, e_{n,0}$ eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n mit $\det(e_{1,0}, \dots, e_{n,0}) = 1$, dann existiert genau eine Kurve $c : \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit:

- c ist nach der Bogenlänge parametrisiert.
- $c(t_0) = p$, und die Begleitbasis von c bei $t = t_0$ stimmt mit der gegebenen Basis überein.
- $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ sind die Krümmungen von c .

Ändert man die Angabe so, dass die κ_i unverändert bleiben, erhält man eine euklidisch kongruente Kurve (d.h. die Krümmungen einer Kurve als Funktionen der Bogenlänge bilden ein vollständiges Invariantensystem für Kurven im Euklidischen Raum.)

BEWEIS. Setzen wir in den Frenetschen Ableitungsgleichungen $\|\dot{c}\| = 1$, so ergibt dies das lineare Differentialgleichungssystem $\dot{e}_j = \sum \omega_{ij} e_i \implies \exists^1$ Lösung $e_1(t), \dots, e_n(t)$ mit $e_i(t_0) = e_{i,0}$. Wir wollen zeigen, dass diese Lösung die Begleitbasis der gesuchte Kurve c ist.

– $\forall t \langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk}$: Dies gilt bei $t = t_0$, und sowohl die konstanten Funktionen δ_{jk} als auch die Funktionen $\langle e_j, e_k \rangle$ erfüllen die Differentialgleichung $f'_{jk} = \sum_i (\omega_{ij} f_{ik} + \omega_{ik} f_{ij})$ (das sieht man durch Einsetzen in die Frenet-Gleichungen bzw. aus der schiefen Symmetrie der Matrix (ω_{ij})). Deshalb gilt dies für alle t .

– Sei $c(t) = e_0 + \int_{t_0}^t e_1(\tau) d\tau$. Dann ist $\|\dot{c}\|^2 = \langle e_1, e_1 \rangle = \delta_{11} = 1$.

– Die Frenetschen Ableitungsgleichungen von c sind das gegebene Differentialgleichungssystem: Das ist klar nach Konstruktion.

– Die so beschriebene Lösung ist eindeutig, weil die Konstruktion zwangsläufig ist und wegen des Eindeutigkeitsatzes für Lösungen von Differentialgleichungen.

– Für je zwei Angaben gibt es eine euklidische Kongruenztransformation β , die die eine in die andere überführt. Sind c, \bar{c} die Lösungen zu den zwei Angaben, so sind sowohl $\beta(c(t))$ als auch $\bar{c}(t)$ Lösungen für die 2. Angabe. Daher ist $\bar{c}(t) = \beta(c(t))$. \square

BEISPIEL 1.15. (Formeln für Krümmungen) Ist $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve, so setzen wir $v = \|\dot{c}\|$. Es folgt $\dot{c} = ve_1$ und $\ddot{c} = \dot{v}e_1 + v^2\kappa_1e_2$ und weiter

$$\text{area}(\dot{c}, \ddot{c}) = \text{area}(ve_1, \dot{v}e_1 + v^2\kappa_1e_2) = v^3\kappa_1.$$

Dabei bedeutet ‘area(v, w)’ die Fläche des Parallelogramms, das von v und w aufgespannt wird, und bei $n = 2$ sogar genauer die Determinante $\det(v, w)$. Wir haben die Beziehung $\text{area}(v, w + \lambda v) = \text{area}(v, w)$ verwendet. Explizite Formeln für κ_1 sind daher:

$$\mathbb{R}^2 : \kappa_1 = \frac{\det(\dot{c}, \ddot{c})}{\|\dot{c}\|^3}, \quad \mathbb{R}^3 : \kappa_1 = \frac{\|\dot{c} \times \ddot{c}\|}{\|\dot{c}\|^3}, \quad \mathbb{R}^n : \kappa_1 = \frac{\text{area}(\dot{c}, \ddot{c})}{\|\dot{c}\|^3}.$$

Für $n > 2$ liefern die Frenetschen Ableitungsgleichungen weiter

$$\ddot{\ddot{c}} = (*)e_1 + (*)e_2 + v^3\kappa_1(-\kappa_1e_1 + \kappa_2e_3).$$

Wir verwenden die Bezeichnung ‘vol(u, v, w)’ für das (orientierte) Volumen des von den drei Vektoren u, v, w aufgespannten Parallelepipeds. Dann ist

$$\begin{aligned} \text{vol}(\dot{c}, \ddot{c}, \ddot{\ddot{c}}) &= \text{vol}(ve_1, v^2\kappa_1e_2, v^3\kappa_1\kappa_2e_3) = v^6 \left(\frac{\text{area}(\dot{c}, \ddot{c})}{v^3} \right)^2 \kappa_2, \\ \implies \kappa_2 &= \frac{\text{vol}(\dot{c}, \ddot{c}, \ddot{\ddot{c}})}{\text{area}(\dot{c}, \ddot{c})^2}; \quad \text{im } \mathbb{R}^3 : \kappa_2 = \frac{\det(\dot{c}, \ddot{c}, \ddot{\ddot{c}})}{\|\dot{c} \times \ddot{c}\|^2}. \end{aligned}$$

1.2. Geometrische Invarianten. 1.04 und 1.06 sind Aussagen betreffend das Verhalten von Objekten, die einer Kurve zugeordnet sind. Man möchte in der Kurventheorie nur solche Objekte untersuchen, die nicht davon abhängen, wie die Bildmenge $c(I)$ durchlaufen wird und die folglich sich nicht ändern, wenn von einer Kurve c zu $c \circ \gamma$ übergegangen wird. Dabei ist die erstere Invarianzeigenschaft stärker als die letztere. Weiteres möchte man, dass euklidische Kongruenztransformationen solche Objekte invariant lassen (wie z.B. bei der Bogenlänge) oder entsprechend mittransformieren (wie z.B. die Tangente). Im folgenden werden diese beiden Invarianzeigenschaften formalisiert.

DEFINITION 1.16. (*Transformationsgruppe*) Eine Gruppe G wirkt auf einer Menge M als Transformationsgruppe, wenn es einen Homomorphismus von G in die Gruppe der Bijektionen von M gibt. Wir verwenden die folgende Schreibweise: für $g \in G, x \in M$ ist $\tilde{g} : M \rightarrow M$ eine Bijektion. Für $g_1, g_2 \in G$ muss $\widetilde{g_1 g_2} = \tilde{g}_1 \circ \tilde{g}_2$ gelten.

BEISPIEL 1.17. Die Gruppe G der euklidischen Kongruenztransformationen der Form $x \mapsto A \cdot x + b$ mit $b \in \mathbb{R}^n$ und $A \in O_n$ wirkt auf dem affinen Raum \mathbb{R}^n bzw. auf dem linearen Raum \mathbb{R}^n bzw. auf der reellen Zahlengeraden \mathbb{R} in der Form

$$\tilde{g}(x) = A \cdot x + b, \quad \text{bzw.} \quad \tilde{g}(x) = A \cdot x, \quad \text{bzw.} \quad \tilde{g}(x) = \det(A) \cdot x.$$

G wirkt auf jeder Menge in trivialer Weise durch $\tilde{g}(x) = x$.

DEFINITION 1.18. (*geometrische Eigenschaft, Invariante*) Die Gruppe G der euklidischen Kongruenztransformationen operiere auf M als Transformationsgruppe. Wir nehmen an, dass ein Objekt $\mathfrak{B}(c, t_1, t_2, \dots) \in M$ einer Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und Parameterwerten t_1, t_2, \dots zugeordnet wird. \mathfrak{B} ist eine geometrische Eigenschaft bzw. Invariante der Kurve, wenn für jeden Parameterwechsel γ und jedes $g \in G$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}(c, \gamma(u_1), \gamma(u_2), \dots) &= \mathfrak{B}(c \circ \gamma, u_1, u_2, \dots) \\ \mathfrak{B}(g \circ c, t_1, t_2, \dots) &= \tilde{g}(\mathfrak{B}(c, t_1, t_2, \dots)). \end{aligned}$$

BEISPIEL 1.19. Wir betrachten die euklidische Kongruenztransformation $g : x \mapsto A \cdot x + b$. Sei \mathfrak{B} eine einer Kurve c zugeordnete geometrische Eigenschaft. Für bestimmte Typen von \mathfrak{B} versteht sich die Wirkung von G von selbst:

Ist \mathfrak{B} ein Punkt p des euklidischen Raumes, so ist $\mathfrak{B}(g \circ c) = A \cdot p + b$. Ist \mathfrak{B} ein Vektor v des linearen Raumes \mathbb{R}^n , so ist $\mathfrak{B}(g \circ c) = A \cdot v$. Ist \mathfrak{B} ein Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist $\mathfrak{B}(g \circ c) = \det(A) \cdot \lambda$, oder $\mathfrak{B}(g \circ c) = \lambda$.

Beispiele für Invarianten sind nach dem obigen die Schmiegräume von Kurven und auch die Bogenlänge.

BEMERKUNG 1.20. Die Krümmung κ_{n-1} ist bei $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$ nach 1.13 keine geometrische Invariante. Man muss hier entweder die Definition erweitern oder sich auf orientierungserhaltende Parameterwechsel und Kongruenztransformationen beschränken. Wir verfolgen das Konzept der geometrischen Invariante nicht in systematischer Weise weiter, es ist aber bei jedem eingeführten Begriff implizit vorhanden.

1.3. Teilmannigfaltigkeiten — Flächen im Raum. Für eine C^r -Abbildung $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$u = (u^1, \dots, u^m) \mapsto (f^1(u), \dots, f^n(u)),$$

die in einer offenen Teilmenge U definiert ist, verwenden wir verschiedene Bezeichnungen für Ableitungen:

$$\frac{\partial^k f}{\partial u^{r_1} \dots \partial u^{r_k}} = \partial_{r_1} \dots \partial_{r_k} f = f_{,r_1 \dots r_k}.$$

Die Matrix, die die 1. partiellen Ableitungen als Spalten enthält, ist die Koordinatenmatrix des Differentials df . Ist $c : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Kurve mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = v$, dann gilt

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ c &= \frac{\partial f}{\partial u^1}(p) \dot{c}^1(0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial u^m}(p) \dot{c}^m(0) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial u^1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial u^m}(p) \right) \cdot v = df_p(v) \end{aligned}$$

Es hängt also der Ableitungsvektor von $f \circ c$ nur vom Ableitungsvektor von c ab, und diese Zuordnung ist durch die lineare Abbildung df_p gegeben. Daraus folgt direkt

SATZ 1.21. (*Kettenregel*) $d(f \circ g) = df \circ dg$, *genauer:*

$$d(f \circ g)_p(v) = df_{g(p)}(dg_p(v)).$$

BEWEIS. Sei c eine Kurve mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = v$. Dann ist

$$\begin{aligned} d(f \circ g)_p(v) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ g) \circ c(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ (g \circ c)(0) \\ &= df_{g(p)} \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g \circ c)(0) \right) = df_{g(p)}(dg_p(v)). \quad \square \end{aligned}$$

DEFINITION 1.22. (*Rang*) Der Rang von f bei p ist definiert als der Rang der linearen Abbildung df .

DEFINITION 1.23. (*Teilmannigfaltigkeit, Karte, lokale Koordinaten*) Die Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Teilmannigfaltigkeit (kurz TMF, synonym: Fläche) der Dimension $m \leq n$, wenn sie sich in einer Umgebung jedes ihrer Punkte diffeomorph in einen m -dimensionalen Unterraum verformen lässt.

Genauer: Für jedes $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein Diffeomorphismus $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, sodass $\varphi(M \cap U) = (\mathbb{R}^m \times 0) \cap \varphi(U)$. Eine solche Abbildung φ heißt Teilmannigfaltigkeits-Karte bzw. lokales Koordinatensystem. Die Differenzierbarkeitsklasse von M ist die ihrer Karten.

FOLGERUNG 1.24. *Die Eigenschaft, eine Teilmannigfaltigkeit zu sein, bleibt bei Diffeomorphismen erhalten.*

BEISPIEL 1.25. Jede offene Teilmenge des \mathbb{R}^n , inklusive \mathbb{R}^n selbst, ist eine n -dimensionale Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n mit $\varphi = \text{id}$ als Karte. Jeder affine Unterraum der Dimension k und jede offene Teilmenge dieses Unterraums ist eine k -dimensionale TMF.

SATZ 1.26. (Rangatz) Hat die C^r -Abbildung $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lokal konstanten Rang, kann sie in eine Projektion deformiert werden: Ist $\text{rg}(df) = r$ lokal um p , so gibt es offene Umgebungen V, W von p , $f(p)$ sowie dort definierte C^r -Diffeomorphismen φ, ψ , sodass $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$.

$$\begin{array}{ccc} y \in U & \xrightarrow{f} & f(y) \in V \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\ (x^1, \dots, x^n) & \xrightarrow{\tilde{f}} & (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0) \end{array}$$

BEWEIS. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $p = f(p) = 0$. Wegen $\text{rg}(df) = r$ hat eine $r \times r$ -Teilmatrix der Matrix (f^j_k) den Rang r . O.B.d.A. sei dies die linke obere Teilmatrix $A := (f^j_k)_{j,k=1}^r$. Wir definieren

$$\varphi(x^1, \dots, x^n) = (f^1(x), \dots, f^r(x), x^{r+1}, \dots, x^n).$$

Dann ist $d\varphi_0 = \begin{pmatrix} A & \star \\ 0 & E \end{pmatrix}$. Offenbar ist $\text{rg}(d\varphi_0) = n$. Also ist φ lokal diffeomorph. Die lokal definierte Abbildung $k = f \circ \varphi^{-1}$ hat die Gestalt

$$\begin{array}{ccc} (f^1(x), \dots, f^r(x), x^{r+1}, \dots, x^n) & \xleftarrow{\varphi} & (x^1, \dots, x^n) \\ \downarrow k & \swarrow f & \\ (f^1(x), \dots, f^m(x)) & & \end{array}$$

D.h. es ist $k(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^r, k^{r+1}(x), \dots, k^m(x))$. Das Differential von k hat die Form $dk_0 = \begin{pmatrix} E_r & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Wegen $\text{rg}(dk) = \text{rg}(df \circ d\varphi^{-1}) = r$ folgt $\text{rg}(C) = 0$, also $C = 0$. Das heißt $\partial k^j / \partial x^i = 0$, also $k^j(x^1, \dots, x^n) = k^j(x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0)$ für $i > r$. Sei ψ lokal im \mathbb{R}^m definiert durch

$$y \mapsto \begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^r \\ y^{r+1} - k^{r+1}(y^1, \dots, y^r, 0, \dots, 0) \\ \vdots \\ y^m - k^m(y^1, \dots, y^r, 0, \dots, 0) \end{bmatrix}.$$

Nach Konstruktion ist $d\psi_0 = \begin{pmatrix} E_r & \star \\ 0 & E_{-0} \end{pmatrix} \implies \psi$ ist lokal diffeomorph. Schließlich berechnen wir

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) &= \psi \circ k(x) = \psi(k^1(x), \dots, k^m(x)) \\ &= \psi \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \\ k^{r+1}(x) \\ \vdots \\ k^m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \\ k^{r+1}(x) - k^{r+1}(x^1, \dots, x^r, 0, \dots) \\ \vdots \\ k^m(x) - k^m(x^1, \dots, x^r, 0, \dots) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

BEMERKUNG 1.27. Wir können durch Verkleinern von V und W stets erreichen, dass φ und ψ surjektiv sind – z.B. dadurch, dass wir eine kleinere Umgebung von p wählen, die diffeomorph zum \mathbb{R}^n ist, wie etwa eine offene Vollkugel.

SATZ 1.28. Das Bild einer Abbildung von konstantem Rang r ist lokal eine r -dimensionale Teilmannigfaltigkeit (d.h. für alle p existiert eine Umgebung $V \ni p$, sodass $f(V)$ Teilmannigfaltigkeit ist).

BEWEIS. Nach dem Rangsatz lässt sich f in eine Projektion deformieren, dabei wird $f(V)$ zu einem Unterraum. \square

FOLGERUNG 1.29. *Eine reguläre Kurve ist lokal eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit. Umgekehrt lässt sich jede 1-dim. TMF lokal als Kurve parametrisieren (kehre Kartenabbildung um).*

SATZ 1.30. *Ist f von konstantem Rang r , so ist $f^{-1}(a)$ eine Teilmannigfaltigkeit der Kodimension r .*

BEWEIS. In jedem Punkt von $f^{-1}(a)$ lässt sich f nach dem Rangsatz lokal in eine Projektion deformieren, dabei geht $f^{-1}(a)$ in einen $(n-r)$ -dimensionalen Unterraum über. \square

FOLGERUNG 1.31. *Ist $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und df_x surjektiv für alle Punkte der Menge $f^{-1}(a)$, so ist letztere eine $(n-m)$ -dim. Teilmannigfaltigkeit.*

BEWEIS. Die Menge U' der x mit $\text{rg}(df_x) = m$ ist offen, weil $\text{rg}(df_x) = m$ durch das Nichtverschwinden einer $m \times m$ -Unterdeterminante von df_x charakterisiert ist. Nun können wir $f|_{U'}$ anstelle von f betrachten und 1.30 anwenden. \square

BEISPIEL 1.32. (*Sphäre*) Die Einheitskugel ist das Urbild von 1 unter der Abbildung $f(x) = \|x\|^2$. Nachdem für einen Punkt x der Sphäre nicht alle Ableitungen von f verschwinden, ist $\text{rg}(df_x) = 1$ und die Sphäre daher eine $(m-1)$ -dim. Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^m .

1.4. **Der Tangentialvektorraum.** Wir erweitern die Differentialrechnung auf Funktionen, die in Teilmannigfaltigkeiten definiert sind. Zu diesem Zweck benötigen wir den Begriff des Tangentialvektors.

DEFINITION 1.33. (*Tangentialvektor, Tangentialvektorraum*) Ein Tangentialvektor an eine Teilmannigfaltigkeit M ist ein Ableitungsvektor einer Kurve $c : I \rightarrow M$. Ist $c(t_0) = p$ and $\dot{c}(t_0) = v$, dann ist (p, v) ein Tangentialvektor an M im Punkt p .

Die Menge der Tangentialvektoren im Punkt p heißt Tangentialvektorraum $T_p M$ in p ; die Vereinigung aller $T_p M$ heißt Tangentialbündel TM .

LEMMA 1.34. *Wird eine Teilmannigfaltigkeit M einem Diffeomorphismus φ unterworfen, so bildet für jeden Punkt $p \in M$ der Vektorraum-Isomorphismus $d\varphi_p$ den Tangentialraum $T_p M$ ab auf $T_{\varphi(p)}\varphi(M)$.*

BEWEIS. Das folgt direkt aus der Definition des Tangentialvektorraumes über Ableitungsvektoren von Kurven in M . \square

FOLGERUNG 1.35. *Ist φ eine Karte, die eine m -Teilmannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ in den Unterraum $\mathbb{R}^m \times 0$ deformiert, so werden mit Hilfe des Vektorraum-Isomorphismus $d\varphi$ Tangentialvektoren von M in Vektoren des $\mathbb{R}^m \times 0$ abgebildet und umgekehrt.*

FOLGERUNG 1.36. *$T_p M$ ist ein m -dimensionaler Vektorraum. Eine m -dim. Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n kann nicht gleichzeitig eine \bar{m} -dim. Teilmannigfaltigkeit mit $m \neq \bar{m}$ sein.*

LEMMA 1.37. *Sind Teilmannigfaltigkeiten als Bild oder Urbild*

$$M = f(U), \quad M' = f^{-1}(a)$$

bei einer Abbildung $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ erzeugt, so gilt für die Tangentialvektorräume, dass

$$T_{f(x)}M = \text{im}(df), \quad T_xM' = \ker(df).$$

BEWEIS. Wir verwenden den Rangsatz, um f mitsamt seinem Bild und Urbild M, M' in eine Projektion $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ und ihre Bild- und Urbildunterräume $\tilde{M} = \psi(M)$, $\tilde{M}' = \varphi(M')$ zu deformieren. Weil \tilde{f} linear ist, gilt trivialerweise

$$\tilde{M} = \text{im}(\tilde{df}), \quad \tilde{M}' = \ker(\tilde{df}).$$

Die Aussage folgt nun direkt aus $\tilde{df} = d\psi \circ df \circ d\varphi^{-1}$. \square

FOLGERUNG 1.38. *Ist M durch die implizite Gleichung $f(x) = a$ gegeben, wobei $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, so hat T_xM den Normalvektor ∇f .*

BEWEIS. Das Differential df hat die Koordinatenmatrix $(f_{,1}, \dots, f_{,m})$ und $\ker(df)$ ist die Ebene deren Normalvektor durch $\nabla f = (f_{,1}, \dots, f_{,m})$ gegeben ist. \square

1.5. **Matrizengruppen.** Die folgende Beispiel zeigt, dass einige bekannte Mengen von Matrizen Teilmannigfaltigkeiten sind.

BEISPIEL 1.39. Die Gruppe GL_n der regulären Matrizen ist eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^{n \times n}$ und daher eine n^2 -dimensionale Teilmannigfaltigkeit.

BEISPIEL 1.40. Betrachte die Matrizengruppen

$$O_n = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A \cdot A^T = E\},$$

$$SO_n = \{A \in O_n \mid \det(A) = 1\} = \{A \in O_n \mid \det(A) > 0\}.$$

Sie sind Teilmannigfaltigkeiten der Dimension $n(n-1)/2$ von $\mathbb{R}^{n \times n}$, denn für die Abbildung $f : GL_n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \mapsto AA^T$ gilt $O_n = f^{-1}(E)$ und

$$\begin{aligned} df_A(V) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(A + tV) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (AA^T + tV^T A + tA^T V + t^2 V^T V) \\ &= V^T A + A^T V = (A^T V)^T + (A^T V). \end{aligned}$$

Offenbar ist df_A eine surjektive lineare Abbildung von $\mathbb{R}^{n \times n}$ in den $n(n+1)/2$ -dim. Unterraum der symmetrischen Matrizen. Es folgt $\text{rg}(df_A) = n(n+1)/2 = \text{const.}$ und $O_n = f^{-1}(E)$ ist damit eine Teilmannigfaltigkeit wie behauptet. SO_n ist eine offene Teilmenge von O_n (bestimmt durch die Ungleichung $\det(A) > 0$), hat also dieselbe Dimension. Die Tangentialvektorräume $T_A O_n$ und $T_A SO_n$ sind gegeben durch $\ker(df_A)$, haben also die implizite Gleichung $V^T A + A^T V = 0$.

DEFINITION 1.41. (*Liegruppe, Liealgebra*) Eine Untergruppe $G \leq GL_n$, die eine Teilmannigfaltigkeit ist, heißt lineare Liegruppe. Der Tangentialvektorraum $\mathfrak{g} = T_E G$ im neutralen Element heißt ihre Lie-Algebra.

BEISPIEL 1.42. Es gilt $\mathfrak{so}_n = \{V \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid V^T + V = 0\}$.

BEMERKUNG 1.43. Man kann zeigen, dass für $A, B \in \mathfrak{g}$ auch $[A, B] := AB - BA \in \mathfrak{g}$.

1.6. Differenzierbare Abbildungen von Teilmannigfaltigkeiten.

Wenn im folgenden von Differenzierbarkeit die Rede ist, ist immer stetige Differenzierbarkeit bis zu einer gewissen Ordnung (also C^r) gemeint.

DEFINITION 1.44. (*lokale Parametrisierung, Karte*) Eine reguläre und injektive Abbildung von $g : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow M$ in eine m -dimensionale Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n heißt lokale Parametrisierung. Dabei heißt Regularität, dass $\text{rg}(r) = m$. Die Umkehrung g^{-1} heißt Karte.

DEFINITION 1.45. (*Koordinatendarstellung*) Sind g_1 und g_2 Parametrisierungen der Teilmannigfaltigkeiten M_1 und M_2 , und ist f eine Abbildung aus M_1 in M_2 , so heißt die lokale definierte Abbildung $\tilde{f} = g_2^{-1} \circ f \circ g_1$ eine Koordinatendarstellung von f .

DEFINITION 1.46. (*differenzierbar, Differential*) Eine Abbildung $f : M_1 \rightarrow M_2$ wie oben heißt differenzierbar (C^k), wenn alle Koordinatendarstellungen diese Eigenschaft haben. Ihr Differential df_p ist definiert durch

$$df_p(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(c(t)), \quad \text{wobei } c : I \rightarrow M_1, \quad c(0) = p, \quad \dot{c}(0) = v.$$

SATZ 1.47. Die Eigenschaft, differenzierbar (oder C^k) zu sein für Abbildungen zwischen Teilmannigfaltigkeiten hängt nicht von der Wahl der Koordinatendarstellung ab. Das Differential ist eine lineare Abbildung und hängt mit Differential einer Koordinatendarstellung $\tilde{f} = g_2^{-1} \circ f \circ g_1$ wie folgt zusammen:

$$df_p : T_p M_1 \rightarrow T_{f(p)} M_2, \quad df = dg_2 \circ \tilde{df} \circ (dg_1)^{-1}.$$

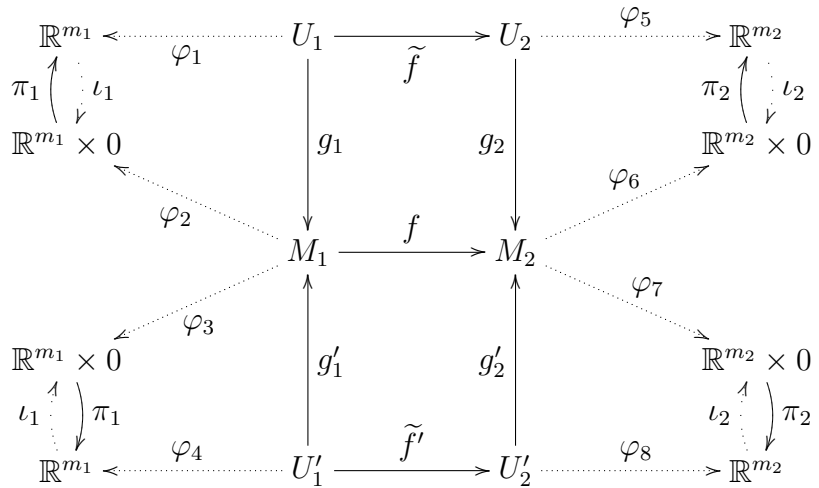
BEWEIS. Angenommen, wir verwenden andere Parametrisierungen g'_1, g'_2 . Wir müssen zeigen, dass die dadurch bestimmte Koordinatendarstellung \tilde{f}' dieselben Eigenschaften hat wie \tilde{f} . Die Abbildungen g_i^{-1} haben als Definitionsmengen keine offenen Teilmengen eines \mathbb{R}^d und sind daher der aus der Analysis bekannten Definition der Differenzierbarkeit nicht zugänglich. Wir verwenden daher den Rangsatz, um die Abbildungen g_i, g'_i mittels lokaler Diffeomorphismen $\varphi_1, \dots, \varphi_8$ in lineare Abbildungen ι_1, ι_2 zu deformieren (siehe Figur). Wir verwenden auch die Projektion π_1 :

$$\begin{aligned} \pi_1(x^1, \dots, x^{n_1}) &= (x^1, \dots, x^{m_1}), \\ \iota_1(x^1, \dots, x^{m_1}) &= (x^1, \dots, x^{m_1}, 0, \dots, 0), \end{aligned}$$

sowie analog für π_2 und ι_2 . Nun können wir den Abbildungen g_i^{-1} über eine Kette von Diffeomorphismen ausweichen. Z.B. ist

$$\tilde{f}' = \varphi_8^{-1} \circ \iota_2 \circ \varphi_7 \circ g_2 \circ \tilde{f} \circ \varphi_1^{-1} \circ \iota_1 \circ \varphi_2 \circ g'_1,$$

d.h. aus $\tilde{f} \in C^k$ folgt $\tilde{f}' \in C^k$. Die Aussage über die Differentiale folgt durch Hinzufügen des Buchstabens d in der obigen Kette: Wir verfolgen eine Kurve $c : \frac{d}{dt}(f \circ c) = (g_2 \circ \tilde{f} \circ \varphi_1^{-1} \circ \iota_1^{-1} \circ \varphi_2 \circ c) = dg_2 \circ \tilde{df} \circ (\star)(\dot{c})$



mit $\star = d\varphi_1^{-1} \circ \text{id} \circ d\varphi_2$. Wegen $dg_1 = d\varphi_1 \circ \pi_1 \circ d\varphi_2^{-1}$ ist $dg_1^{-1} = \star$, denn das Bild von $d\varphi_2(\dot{c})$ ist in $\mathbb{R}^{m_1} \times 0 \subset \mathbb{R}^{m_1}$ enthalten. \square

SATZ 1.48. (Kettenregel) $d(f_1 \circ f_2) = df_1 \circ df_2$.

BEWEIS. Der Beweis ist der gleiche wie für 1.21. \square

SATZ 1.49. Der Begriff der Differenzierbarkeit bzw. k -maligen stetigen Differenzierbarkeit von Abbildungen zwischen Teilmannigfaltigkeiten hat die folgenden Eigenschaften. Es wird vorausgesetzt, dass die Differenzierbarkeitsklasse der beteiligten Mannigfaltigkeiten mindestens so groß ist wie die der beteiligten Abbildungen.

- (a) Die Zusammensetzung von C^k -Abbildungen ist C^k .
- (b) Jede Einbettung $M_1 \subseteq M_2$ ist C^k ; das gilt insbesondere für den Fall $M_2 = \mathbb{R}^n$.
- (c) Ist $M_1 \subseteq M_2$ und ist $f : M_2 \rightarrow M_3$ eine C^k -Abbildung, so auch die Einschränkung $f|_{M_1}$.
- (d) Ist $f : M_1 \rightarrow M_2$ eine C^k -Abbildung und ist M_2 in M_3 enthalten, so ist f auch als Abbildung von M_1 nach M_3 eine C^k -Abbildung.
- (e) Ist $f : M_1 \rightarrow M_3$ eine C^k -Abbildung und liegt $f(M_1)$ in der kleineren Teilmannigfaltigkeit M_2 , so ist f auch als Abbildung von M_1 nach M_2 eine C^k -Abbildung.

BEWEIS. Im folgenden bezeichnen $g_i : U_i \subseteq \mathbb{R}^{m_i} \rightarrow M_i$ lokale C^k -Parametrisierungen für M_i , und φ_i Teilmannigfaltigkeits-Karten, die M_i in den Unterraum $\mathbb{R}^{m_i} \times 0$ deformieren.

- (a) Seien die Koordinatendarstellungen von $f_1 : M_1 \rightarrow M_2$ und $f_2 : M_2 \rightarrow M_3$ gegeben durch $f_1 = g_2^{-1} f_1 g_1$ und $f_2 = g_3^{-1} f_2 g_2$. Die Verkettung $f_2 \circ f_1$ hat dann die Koordinatendarstellung $g_3^{-1} f_2 f_1 g_1 = g_3^{-1} f_2 g_2 g_2^{-1} f_1 g_1^{-1} = \tilde{f}_2 \tilde{f}_1$.
- (b) Die Abbildung $\varphi_2 \circ g_2$ hat nach dem Satz über die Umkehrfunktion eine C^k -Inverse. Die Koordinatendarstellung \tilde{i} der Einbettungsabbildung ist gegeben durch $g_2^{-1} i g_1 = (\varphi_2 \circ g_2)^{-1} \circ (\varphi_2 \circ g_1)$, ist also C^k .
- (c) Mit $i : M_1 \subseteq M_2$ ist $f|_{M_1} = f \circ i$.
- (d) Mit $i : M_2 \subseteq M_3$ betrachten wir $i \circ f_1$.
- (e) $\varphi_3(M_2)$ ist eine m_2 -dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{m_3} \times 0$, und besitzt eine Teilmannigfaltigkeits-Karte φ'_2 , die sie in den Koordinaten-Unterraum $\mathbb{R}^{m_2} \times 0$ deformiert. Die Koordinatendarstellung von f' lautet $f' = g_2^{-1} f' g_1 = (\varphi'_2 \varphi_3 g_2)^{-1} \varphi'_2 \varphi_3 f g_1$. Die Abbildung $\varphi'_2 \varphi_3 g_2$ hat nach dem Satz über die Umkehrfunktion eine C^k -Inverse, womit die Aussage gezeigt ist. \square

SATZ 1.50. *Satz über die Umkehrfunktion: Ist $f : M \rightarrow N$ differenzierbar (C^k) und df_p bijektiv, so ist f lokal ein Diffeomorphismus, d.h. ist bijektiv und seine Umkehrung ist ebenfalls differenzierbar (C^k).*

SATZ 1.51. *Hat $f : M \rightarrow N$ konstanten Rang r , so ist das Bild von f bzw. das Urbild eines Punktes unter f lokal eine Teilmannigfaltigkeit der Dimension r bzw. eine Teilmannigfaltigkeit der Kodimension r .*

BEWEIS. Die beiden obigen Aussagen betreffen lokale Eigenschaften, die bei Diffeomorphismen invariant sind. Sie bleiben daher bei Anwendung von TMF-Karten unberührt und gelten für Teilmannigfaltigkeiten genauso wie für Abbildungen aus dem \mathbb{R}^m in den \mathbb{R}^n . \square

BEISPIEL 1.52. (*Stereographische Projektion*) Wir betrachten die Einheitskugel $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$. Sie hat die beiden Parametrisierungen $g_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus N$ und $g_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus S$ (stereographische Projektion der Äquatorebene auf die Kugel aus den Nordpol $N = (0, 0, 1)$ bzw. aus dem Südpol $S = (0, 0, -1)$):

$$g_1(x) = \frac{1}{1 + \|x\|^2} \begin{bmatrix} -2x^1 \\ -2x^2 \\ 1 - \|x\|^2 \end{bmatrix}, \quad g_2(u, v) = \begin{bmatrix} -2x^1 \\ -2x^2 \\ \|x\|^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

Wegen $\{\partial_u g_i, \partial_v g_i\}$ für $i = 1, 2$ linear unabhängig sind g_1, g_2 lokale Parametrisierungen. Identifizieren wir $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ mittels $z = x^1 + ix^2$, dann ist g_1 die wohlbekannte Einbettung von \mathbb{C} in die Riemannsche Zahlenkugel. Wir interessieren uns für die Abbildungen

$$g_1^{-1} \circ g_2 = g_2^{-1} \circ g_1 : \mathbb{C} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0, \quad z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}.$$

Sei die Abbildung f aus S^2 in S^2 durch die Koordinatendarstellung bezüglich g_1 (im Urbild) und g_1 (im Bild) wie folgt gegeben:

$$g_1^{-1} \circ f \circ g_1(z) = p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,$$

f hat die besondere Eigenschaft, dass Punkte des Zielgebietes von g_1 wieder auf solche Punkte abgebildet werden. Offenbar ist f beliebig oft differenzierbar. Wir erweitern f zu einer Abbildung von ganz S^2 , indem wir $f(N) = N$ festsetzen. Ist diese Erweiterung von f differenzierbar? Dazu betrachten wir die Koordinatendarstellung von f bzgl. g_2 und g_2 :

$$g_2^{-1} \circ f \circ g_2 = (g_2^{-1} \circ g_1) \circ (g_1^{-1} \circ f \circ g_1) \circ (g_1^{-1} \circ g_2) : \mathbb{C} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0,$$

$$z \mapsto 1/\overline{p(1/\bar{z})} = \frac{z^n}{\bar{a}_0 z^n + \cdots + \bar{a}_{n-1} z + \bar{a}_n} \quad \text{für } z \neq 0.$$

Wegen $N \mapsto N$ gilt für die Koordinatendarstellung auch $0 \mapsto 0$. Nachdem beide Koordinatendarstellungen C^∞ sind, hat f diese ebenfalls Eigenschaft.

1.7. Die innere Metrik einer Teilmannigfaltigkeit.

DEFINITION 1.53. (*innere Metrik, I. Fundamentalform*) Wir verwenden das im euklidischen Raum definierte kanonische Skalarprodukt, um das Skalarprodukt von Vektoren $v, w \in T_p M$ zu bestimmen. Die Einschränkung von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $T_p M \times T_p M$ heißt I. Fundamentalform der Teilmannigfaltigkeit M .

Man kann einen Tangentialvektor als Richtungsableitung interpretieren (siehe die folgende Definition 1.54). In diesem Zusammenhang schreiben wir Tangentialvektoren in der Form $X_p \in T_p M$.

DEFINITION 1.54. (*Richtungsableitung*) Ist $c : I \rightarrow M$ eine Kurve mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = X_p$, und ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, dann ist die Richtungsableitung von f in Richtung X_p gegeben durch

$$X_p f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ c(t)$$

DEFINITION 1.55. (*Vektorfeld*) Ein Vektorfeld auf einer Teilmannigfaltigkeit ist eine Abbildung, die jedem Punkt $p \in M$ einen Tangentialvektor $X_p \in T_p M$ zuordnet.

DEFINITION 1.56. (*Basisfeld, Koeffizienten der Metrik*) Ist g eine lokale Parametrisierung einer Teilmannigfaltigkeit, dann heißen die Vektorfelder

$$\partial_j : p \mapsto \partial_j(p) := \frac{\partial g}{\partial u_j}(p)$$

die dazugehörigen Basisfelder. Die Funktionen

$$g_{jk} = \langle \partial_j, \partial_k \rangle$$

heißen die dazugehörigen Koeffizienten der inneren Metrik bzw. der I. Fundamentalform.¹

DEFINITION 1.57. (*Einsteinsche Summenkonvention*) Kommt in einem Produkt ein Index zweimal vor, einmal oben und einmal unten, so wird über ihn summiert.

BEMERKUNG 1.58. Definition 1.56 definiert die g_{jk} als Funktionen aus M in die reellen Zahlen. Wir werden jedoch genauso g_{jk} als Funktionen des Parameters u ansehen. Haben Tangentialvektoren die Koordinaten $v = \sum_j v^j \partial_j$, $w = \sum_k w^k \partial_k$, so ist $\langle v, w \rangle = \sum_{j,k} v^j w^k \langle \partial_j, \partial_k \rangle = \sum_{j,k} v^j w^k g_{jk}$. Mit Hilfe der Einsteinschen Summenkonvention schreiben wir dies in der Form

$$v = v^j \partial_j, w = w^k \partial_k \implies \langle v, w \rangle = v^j w^k g_{jk}.$$

DEFINITION 1.59. (*Abstand*) Mit $\mathcal{C}_{p,q}$ als der Menge aller stückweise differenzierbaren Kurven $c : [0, 1] \rightarrow M$, die die Punkte p und q verbinden (d.h. mit $c(0) = p$ und $c(1) = q$) ist der Abstand dieser Punkte definiert durch

$$d(p, q) := \inf_{c \in \mathcal{C}_{p,q}} L_0^1(c).$$

LEMMA 1.60. In einer zusammenhängenden Teilmannigfaltigkeit M sind je zwei Punkte p, q durch eine stückweise differenzierbare Kurve verbindbar, es ist $\mathcal{C}_{p,q} \neq \emptyset$, und $d(p, q) < \infty$.

¹Historische Bezeichnungen, die bei Beschränkung auf 2-dim. Flächen $g(u, v)$ im \mathbb{R}^3 noch immer gerne Verwendung finden, sind $E = g_{11}$, $F = g_{12} = g_{21}$, $G = g_{22}$.

BEWEIS. (analog zu A.44) Die Relation „verbindbar“ („ \sim “) ist offenbar eine Äquivalenzrelation. Jeder Punkt $p \in M$ besitzt eine Umgebung diffeomorph zu einer offenen Vollkugel (über eine TMF-Karte), die zur Äquivalenzklasse $[p]_{\sim}$ gehört $\implies [p]_{\sim}$ ist offen. Nachdem jede Äquivalenzklasse das Komplement der Vereinigung der anderen Äquivalenzklassen ist, ist $[p]_{\sim}$ abgeschlossen. Wegen M zusammenhängend ist dann $M = [p]_{\sim}$. \square

LEMMA 1.61. *Zusammenhängende Teilmannigfaltigkeiten sind mit d als Distanz ein metrischer Raum.*

BEWEIS. Wir müssen zeigen: (i) $d(p, q) = 0$ genau für $p = q$, (ii) $d(p, q) = d(q, p)$ und (iii) die Dreiecksungleichung. (i) folgt direkt aus 1.08; (ii) und (iii) sind trivial. \square

DEFINITION 1.62. (*Isometrie, abwickelbar*) Eine Abbildung zwischen Teilmannigfaltigkeiten, die Distanzen unverändert lässt, heißt Isometrie. Gibt es für jeden Punkt aus M eine Umgebung, die isometrisch zum \mathbb{R}^m ist, so heißt M abwickelbar.

BEISPIEL 1.63. Sind $g : U \rightarrow M$, $g' : U \rightarrow N$ lokale Parametrisierungen und stimmen die Koeffizienten g_{jk} und g'_{jk} überein, dann ist $f : g(U) \rightarrow g'(U)$, $p \mapsto g' \circ g^{-1}(p)$ eine Isometrie, denn für jede Kurve $c : I \rightarrow U$ sind die Bogenlängen $L_a^b(g \circ c)$ und $L_a^b(g' \circ c)$ gleich.

Sei z.B. $M = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$, $M' = \mathbb{R}^2$, $U = (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$. Wähle $g(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$ und $g'(u, v) = (u, v)$. Dann ist

$$(g_{jk}) = (g'_{jk}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Damit ist $g^{-1} \circ f = g'$ eine Isometrie, und man kann den Zylinder ohne die Gerade $x = -1$, $y = 0$ isometrisch in die Ebene abbilden.

BEISPIEL 1.64. Es ist manchmal nicht möglich, eine Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n als Ganzes isometrisch in einem \mathbb{R}^m abzubilden — für einen geschlossenen Zylinder ist dies nicht möglich, man müßte ihn dazu aufschneiden. Auch ist es denkbar, dass eine Abbildung von ganz M in \mathbb{R}^m existiert, die zwar lokal isometrisch, aber nicht injektiv und damit nicht isometrisch ist, z.B. für einen Kegel mit einer langen Basiskurve, wo sich die Abwicklung öfter als nur einmal um die Spitze herumwindet.

1.8. Integration.

DEFINITION 1.65. (*Support*) Ist f eine Funktion in einen Vektorraum (insbesondere nach \mathbb{R}), so verwenden wir die Bezeichnung $\text{supp}(f)$ für den Abschluss von $\{x \mid f(x) \neq 0\}$.

Die folgenden Begriffe wie Oberfläche und Volumen werden je nach Dimension anders bezeichnet: „Oberfläche“ weist auf Dimension zwei hin. „Volumen“ kann bei jeder Dimension verwendet werden. Wir werden inkonsistent sein und die Begriffe vermischen.

DEFINITION 1.66. (*Oberflächenintegral*) Sei $g : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow M$ eine Parametrisierung einer Teilmannigfaltigkeit und $f : M \rightarrow V$, wobei

V ein beliebiger Vektorraum (z.B. $V = \mathbb{R}$) ist. Das Integral von f ist mittels der Koordinatendarstellung $\tilde{f} = f \circ g$ wie folgt definiert:

$$\int_M f dO = \int_{u \in U} \tilde{f}(u) \sqrt{\det(g_{jk}(u))} du.$$

Um es uns einfacher zu machen verlangen wir $\text{supp}(f)$ kompakt.

LEMMA 1.67. $\int_M f dO$ ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der Parametrisierung.

BEWEIS. Seien g, g' zwei lokale Parametrisierungen so, dass $\text{supp}(f)$ in beider Zielgebiet enthalten ist. Betrachte die Koordinatendarstellungen \tilde{f}, \tilde{f}' und den Diffeomorphismus $\varphi = g^{-1} \circ g'$. Dann gilt wegen $g' = g \circ \varphi$ und der Kettenregel:

$$\begin{aligned} \partial_i g' &= (\partial_j g \circ \varphi) \partial_i \varphi^j \implies \\ g'_{jk} &= \left\langle (\partial_l \circ \varphi) \partial_j \varphi^l, (\partial_p \circ \varphi) \partial_k \varphi^p \right\rangle = \partial_j \varphi^l \partial_k \varphi^p (g_{lp} \circ \varphi). \end{aligned}$$

Wir interpretieren diese Formel als Matrizenprodukt. Sei $J = (\partial_i \varphi^j)$ die Jacobi-Matrix von φ . Dann ist

$$(g'_{jk}) = J^T (g_{jk} \circ \varphi) J \implies \det(g'_{jk}) = \det(J)^2 \det(g_{jk} \circ \varphi).$$

Wir wenden nun die Substitutionsregel für Integrale an:

$$\begin{aligned} &\int \tilde{f}'(v) \det(g'_{jk}(v))^{1/2} dv \\ &= \int \tilde{f}' \circ \varphi(v) \cdot |\det J(v)| \det(g_{jk} \circ \varphi(v))^{1/2} dv \\ &= \int \tilde{f}(w) \det(g_{jk}(w))^{1/2} dw. \end{aligned} \quad \square$$

In der Definition der Oberflächenintegrals tritt die Wurzel aus der Determinante der metrischen Koeffizienten g_{jk} (das Volumen des von den Vektoren ∂_1, \dots aufgespannten Parallelepipeds, vgl. A.02) als Verzerrungsfaktor auf.

DEFINITION 1.68. (*Volumen*) Sei $g : U \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung. Für eine kompakte Menge $K \subseteq U$ heißt

$$\text{vol}(g(K)) := \int_K \sqrt{\det(g_{jk})} du$$

das Volumen (bei $n = 2$: Oberfläche, bei $n = 1$: Länge) von $g(K) \subseteq M$.

BEISPIEL 1.69. Wir überzeugen uns, dass für Kurven das hier definierte Volumen mit der Bogenlänge übereinstimmt: Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lokale Parametrisierung einer 1-dim. TMF. Es ist $\partial_1 = \dot{c}$, $g_{11} = \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle$, und $\text{vol}(c([a, b])) = \int_{[a, b]} \sqrt{g_{11}} = \left| \int_a^b \|\dot{c}\| dt \right| = L_a^b(c)$.

2. ELEMENTARE KRÜMMUNGSTHEORIE

In diesem Abschnitt führen wir Krümmungen für $(m - 1)$ -dimensionale Flächen im euklidischen Raum \mathbb{R}^m ein. Das wichtigste Hilfsmittel zu diesem Zweck ist sphärische Abbildung und die von ihr abgeleiteten Begriffe.

2.1. Die Krümmungsform.

DEFINITION 2.01. (*sphärische Abbildung*) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^m$ eine $(m - 1)$ -dim. TMF des \mathbb{R}^m und g eine lokale Parametrisierung.

$$n := \frac{\partial_1 \times \partial_2 \times \cdots \times \partial_{m-1}}{\|\partial_1 \times \partial_2 \times \cdots \times \partial_{m-1}\|}.$$

Dabei bilden die Vektoren $\partial_1, \dots, \partial_{m-1}, n$ ein Rechtssystem. $n(p)$ heißt der durch g bestimmte Einheits-Normalvektor von M in p . Die Abbildung $n : M \rightarrow S^{m-1}$ heißt sphärische Abbildung.

DEFINITION 2.02. (*Weingartenabbildung, Shape-Operator*) Sei $n : M \rightarrow S^{m-1}$ ein Einheitsnormalvektorfeld einer Teilmannigfaltigkeit M wie oben. Es gilt

$$T_p M = n^\perp = T_{n(p)} S^{m-1}.$$

Wir identifizieren die zueinander parallelen Tangentialvektorräume an M und S^{m-1} in korrespondierenden Punkten und definieren die Weingartenabbildung durch

$$\sigma_p : T_p M \rightarrow T_p M, v \mapsto -dn(v)$$

DEFINITION 2.03. (*Krümmungsform, II. Fundamentalform*) Die Abbildung

$$h_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}, (v, w) \mapsto \langle \sigma_p(v), w \rangle$$

heißt Krümmungsform oder II. Fundamentalform. Die skalaren Funktionen

$$h_{jk}(p) = h_p(\partial_j, \partial_k) = \langle \sigma_p(\partial_j), \partial_{k,p} \rangle$$

heißen die Koeffizienten der II. Fundamentalform.²

BEMERKUNG 2.04. Das Einheitsnormalvektorfeld n ist von der Parametrisierung abhängig: Ist g' eine andere Parametrisierung und n' das damit verbundene Einheits-Normalvektorfeld, so ist $n' = \pm n$, je nachdem ob $\partial_1, \dots, \partial_{m-1}$ und $\partial'_1, \dots, \partial'_{m-1}$ gleich oder verschieden orientierte Basen von $T_p M$ sind. Bei Wahl des anderen möglichen Normalvektorfeldes $-n$ werden σ_p und h_p mit -1 multipliziert.

BEISPIEL 2.05. Die Koordinatenmatrix der Weingartenabbildung σ_p bezüglich der Basis $\partial_1, \dots, \partial_{n-1}$ in $T_p M$ wird mit h_j^k bezeichnet. Es gilt

$$\sigma(\partial_j) = h_j^k \partial_k, \quad h_{jk} = \langle h_j^l \partial_l, \partial_k \rangle = h_j^l g_{lk} \implies h_j^l = g^{kl} h_{jk}.$$

Dabei ist $(g^{kl}) = (g_{jk})^{-1}$ die zur Matrix (g_{jk}) inverse Matrix. Die Beziehung $(g^{ij}) \cdot (g_{kl}) = E$ wird mittels der Einsteinschen Summenkonvention auch $g^{ij} g_{kl} = \delta_k^i \delta_l^j$ geschrieben, was die oberen Indizes rechtfertigt.

²Historische Bezeichnungen für diese Koeffizienten, die für 2-Flächen im \mathbb{R}^3 noch immer gerne verwendet werden, sind $L = h_{11}$, $M = h_{12} = h_{21}$, $N = h_{22}$.

SATZ 2.06. *Die Krümmungsform ist eine symmetrische Bilinearform.*

BEWEIS. Wir betrachten eine Parametrisierung g und sehen das Normalvektorfeld als vom gleichen Parameter $u \in \mathbb{R}^{m-1}$ abhängig an. Dann können wir die Orthogonalitätsrelation $\langle \partial_j, n \rangle = 0$ nach jedem Parameter u^k ableiten:

$$\begin{aligned} \langle \partial_j g, n \rangle = 0 &\implies \langle \partial_{jk} g, n \rangle + \langle \partial_j g, \partial_k n \rangle = 0 \\ &\implies h_{jk} = -\langle \partial_j n, \partial_k g \rangle = \langle \partial_{jk} g, n \rangle = h_{kj}. \quad \square \end{aligned}$$

FOLGERUNG 2.07. *Nach dem Spektralsatz hat $T_p M$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von σ , und alle Eigenwerte von σ sind reell.*

DEFINITION 2.08. (*Hauptkrümmungen, mittlere Krümmung, Gaußsche Krümmung*) Die $m - 1$ reellen Eigenwerte $\kappa_1, \dots, \kappa_{m-1}$ von σ heißen Hauptkrümmungen von M im Punkt p . Jeder Eigenvektor bestimmt eine Hauptkrümmungsrichtung. Die mittlere und die Gaußsche Krümmung H und K sind definiert durch

$$H = \frac{1}{m-1}(\kappa_1 + \dots + \kappa_{m-1}) = \frac{\text{tr}(\sigma)}{m-1}, \quad K = \kappa_1 \cdots \kappa_{m-1} = \det(\sigma).$$

BEMERKUNG 2.09. Die Hauptkrümmungen und ihr arithmetisches Mittel H sind von der Parametrisierung in derselben Weise abhängig wie m (d.h. bei orientierungsumkehrenden Parametertransformationen wechseln sie ihr Vorzeichen). Als Produkt der Hauptkrümmungen ist die Gaußsche Krümmung bei geradem m von der Parametrisierung in derselben Weise abhängig, bei ungeradem m hingegen unabhängig. Die Hauptkrümmungen, sowie H und K sind somit bis auf ihr Vorzeichen geometrische Eigenschaften der Teilmannigfaltigkeit. Bei m ungerade ist K eine geometrische Eigenschaft.

BEISPIEL 2.10. Man berechnet H und K durch

$$K = \det(h_j^l) = \frac{\det(h_{jk})}{\det(g_{jk})}, \quad H = \frac{1}{m-1} \text{tr}(h_j^l) = \frac{h_1^1 + \dots + h_{m-1}^{m-1}}{m-1}.$$

Bei $m = 3$ ist

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{g_{22}h_{11} - 2g_{12}h_{12} + g_{11}h_{22}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

DEFINITION 2.11. (*Normalkrümmung, geodätische Krümmung*) Ist $c : I \rightarrow M$ eine Kurve mit Begleitbasis (e_1, e_2, \dots) und der 1. Krümmung κ , welche in einer $(m - 1)$ -dimensionalen Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^m verläuft. Die Zerlegung

$$\kappa e_2 = \kappa_n n + \kappa_g m,$$

in einen Anteil orthogonal zur Fläche und einen Anteil tangential zur Fläche ($\|m\| = 1$, $m \in T_{c(t)}M$) definiert die Normalkrümmung κ_n und die geodätische Krümmung κ_g . Es gilt

$$\kappa_g^2 + \kappa_n^2 = \kappa^2.$$

FOLGERUNG 2.12. (*Satz von Meusnier*) Für die Normalkrümmung gilt $\kappa_n = \kappa \cos \varphi$ mit $\varphi = \angle(n, c_2)$.

LEMMA 2.13. *Es gilt $\kappa_n = h(\dot{c}, \dot{c}) / \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle$, d.h. die Normalkrümmung hängt nur von \dot{c} ab.*

BEWEIS. Mit $v = \|\dot{c}\|$ haben wir $\dot{c} = ve_1$ und $\ddot{c} = \dot{v}e_1 + v^2\kappa e_2$ (Frenet). Betrachte das Normalvektorfeld $n \circ c(t)$ längs der Kurve c :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \langle \dot{c}, n \rangle = \langle \ddot{c}, n \rangle + \langle \dot{c}, \frac{d}{dt}(n \circ c) \rangle = \langle \ddot{c}, n \rangle + \langle \dot{c}, dn(\dot{c}) \rangle \\ &= \langle \dot{v}e_1 + v^2\kappa e_2, n \rangle - \langle \dot{c}, \sigma(\dot{c}) \rangle = v^2\kappa_n - h(\dot{c}, \dot{c}). \quad \square \end{aligned}$$

BEMERKUNG 2.14. Bewegt sich ein Massenpunkt innerhalb einer Teilmannigfaltigkeit M , an die er aufgrund irgendwelcher Zwangsbedingungen gebunden ist, so hat er wegen $\kappa_n = h(\dot{c}, \dot{c}) / \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle$ auf die Komponente der Beschleunigung normal zur Fläche nur über seine eigene Geschwindigkeit einen Einfluß. Innerhalb der Newtonschen Mechanik übt M eine Kraft aus, die der Normalbeschleunigung $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle \kappa_n = \ddot{c}^n$ das Gleichgewicht hält. Seine geodätische Krümmung kann das Teilchen unabhängig von seiner Geschwindigkeit selbst bestimmen, die dazu notwendige Kraft muss es selbst aufbringen.

2.2. Die lokale Gestalt von $(m-1)$ -Flächen im \mathbb{R}^m .

LEMMA 2.15. *Eine $(m-1)$ -dim. Teilmannigfaltigkeit M des \mathbb{R}^n ist in der Umgebung jedes Punktes $p \in M$ der Graph einer skalaren Funktion $x^m = f(x^1, \dots, x^{m-1})$ darstellbar.*

BEWEIS. Wir wählen ein Koordinatensystem mit $p = 0$ und T_pM als Ebene $x^m = 0$. Die Orthogonalprojektion auf T_pM hat im Punkt p die Ableitung $d\pi = \text{id}$, also Rang $m-1$. Nach 1.50 ist sie lokal Diffeomorphismus und ihre Umkehrung ist eine Parametrisierung der Form $g(x^1, \dots, x^{m-1}) = (x^1, \dots, x^{m-1}, f(x^1, \dots, x^{m-1}))$. \square

Die hier konstruierte Parametrisierung heißt Euler-Parametrisierung.

DEFINITION 2.16. (*Schmiege-Paraboloid*) Ist eine Fläche der Graph einer Funktion $x^m = f(x^1, \dots, x^{m-1})$ mit $f(0) = 0$ und der Ebene $x^m = 0$ als Tangentialebene dort, so heißt der Graph des Taylorpolynoms 2. Ordnung

$$\frac{1}{2} [x^1 \ \dots \ x^{m-1}] \begin{bmatrix} \partial_{11}f & \cdots & \partial_{1,m-1}f \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{m-1,1}f & \cdots & \partial_{m-1,m-1}f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{m-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} f_{,ij} x^i x^j$$

das Schmiegeparaboloid der Fläche.

FOLGERUNG 2.17. *Das Schmiegeparaboloid ist Graph der Krümmungsform. In einem Koordinatensystem aus Krümmungsvektoren hat es die Gleichung*

$$x^m = \frac{1}{2} (\kappa_1(x^1)^2 + \cdots + \kappa_{m-1}(x^{m-1})^2).$$

BEWEIS. Wir verwenden die dazugehörige Euler-Parametrisierung g . Es ergibt sich $n(0) = (0, \dots, 0, 1)$, $g_{jk}(0) = \delta_{jk}$. Weiter ist $h_{jk}(0) = \langle n(0), \partial_{jk}g(0) \rangle = \partial_{jk}f(0)$. Die Koordinatenmatrix der Weingartenabbildung ist gleich $(h_j^k)(0) = (\delta_{jk})^{-1} \cdot (h_{jk}) = (h_{jk})(0) = (\partial_{jk}f)$. Nach Annahme sind die kanonischen Basisvektoren Eigenvektoren dieser Matrix; es folgt also $\partial_{jk}f = \text{diag}(\kappa_1, \dots, \kappa_{m-1})$. \square

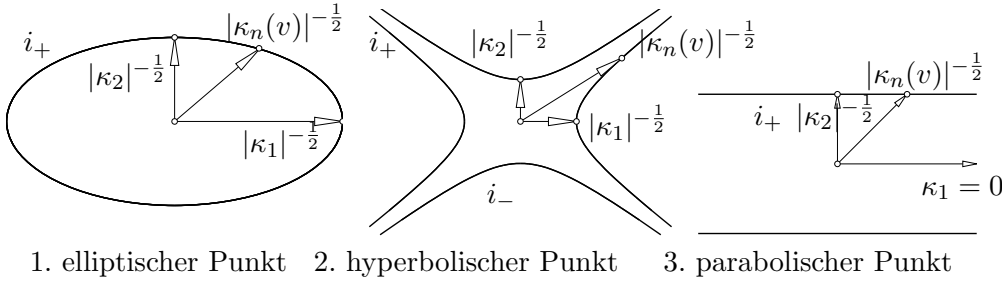


ABBILDUNG 1. Beispiele für Dupinsche Indikatrices

DEFINITION 2.18. (*Dupinsche Indikatrix*) Die Mengen $i_{\pm} \subseteq T_p M$ mit der impliziten Gleichung $h(v, v) = \pm 1$ heißen Dupinsche Indikatrices.

PROP. 2.19. Die Dupinsche Indikatrix hat die folgenden Eigenschaften:

- i_{\pm} ist Schnitt durch das Schmiegeparaboloid mit der Ebene $x^m = \pm 1$.
- i_{\pm} ist das Polardiagramm der Normalkrümmungen zur Potenz $-\frac{1}{2}$:

Für $v \in T_p M$ mit $\|v\| = 1$ liegt $1/\sqrt{\pm h(v, v)} \cdot v$ in i_{\pm} .

BEWEIS. Die erste Aussage ist klar nach 2.17. Die zweite folgt aus der Frage: Bei $\|v\| = 1$, welches λv liegt in i_{\pm} ? Die Antwort ist $\lambda = 1/\sqrt{\pm h(v, v)}$, wovon man sich durch Einsetzen überzeugt. \square

DEFINITION 2.20. für 2-dim. Flächen im \mathbb{R}^3 verwenden wir die Bezeichnung Flachpunkt für $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$. Die restlichen Punkte werden eingeteilt in elliptische/parabolische/hyperbolische Punkte, je nachdem ob $\kappa_1 \kappa_2 > 0$ oder $= 0$ oder < 0 ist.

LEMMA 2.21. Jede kompakte $(m-1)$ -dim. TMF des \mathbb{R}^m besitzt einen elliptischen Punkt wo alle Hauptkrümmungen gleiches Vorzeichen besitzen.

BEWEISIDEE. In den Berührungspunkten der kleinsten umschriebenen Kugel ist das Schmiegeparaboloid nur nach einer Seite hin offen. \square

BEWEIS. $\|x\|$ nimmt ein Maximum $r = \|p\|$ für ein $p \in M$ an, und M liegt innerhalb der Kugel $S : \|x\| = r$. Wir verwenden nun das Koordinatensystem und die Parametrisierung aus 2.16. S hat o.B.d.A. den Mittelpunkt $(0, \dots, 0, r)$. Für die Kurve $c(t) = \bar{g}(t \cdot u) = (tu, f(tu))$ muss $\frac{d^2}{dt^2} f(tu) > 0$ sein, sonst verlässt die Kurve $c(t)$ sofort nach $t = 0$ die Kugel S . Es folgt, dass das Schmiegeparaboloid elliptisch und p ein elliptischer Punkt ist. \square

2.3. Die abtragende Abbildung. Die abtragende Abbildung ist ein wichtiges technisches Hilfsmittel.

DEFINITION 2.22. (*abtragende Abbildung*) Sei M eine $(m-1)$ -dim. Fläche mit Parametrisierung $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ und Einheitsnormalenvektorfeld n . Dann heißen die beiden Abbildungen

$$e : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, (p, t) \mapsto p + tn(p)$$

$$\tilde{e} : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, (u, t) \mapsto g(u) + tn(g(u))$$

die abtragende Abbildung.

Um die Definition des Produktes von Mannigfaltigkeiten zu vermeiden, werden wir, wenn von Differenzierbarkeit u. ä. die Rede ist, immer \tilde{e} und nicht e meinen.

LEMMA 2.23. Die abtragende Abbildung $\tilde{e}(u, \lambda)$ ist regulär genau dann, wenn λ kein Kehrwert einer Hauptkrümmung für den Flächenpunkt $g(u)$ ist.

BEWEIS. Wir berechnen das Differential $d\tilde{e}_{u,\lambda}(v, \mu)$:

$$\begin{aligned} d\tilde{e}_{u,\lambda}(v, \mu) &= \frac{d}{dt}(g(u + tv) + (\lambda + t\mu)(n(g(u + tv))) \\ &= dg(v) + \mu n + \lambda dn \circ dg(v) = (\text{id} + \lambda dn)(dg(v)) + \mu n \end{aligned}$$

Offenbar kann $d\tilde{e}$ einen Tangentialvektor auf 0 abbilden genau dann, wenn $-1/\lambda$ ein Eigenwert von dn ist, was zu zeigen war. \square

LEMMA 2.24. Betrachte die Parametrisierung $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ wie oben. Für eine offene Menge $B \subseteq U$ mit \bar{B} kompakt gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass die abtragende Abbildung auf $B \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ ein Diffeomorphismus ist.

BEWEIS. Wegen $\text{rg}(d_{(u,0)}\tilde{e}) = n$ gibt es für jedes $u \in U$ eine Umgebung der Form $B(u, 2\delta_u) \times (-\varepsilon_u, \varepsilon_u)$ wo \tilde{e} Diffeomorphismus ist. \bar{B} wird von endlich vielen $B(u_i, \delta_{u_i})$ überdeckt, wir können sogar $\delta_{u_i}, \varepsilon_{u_i}$ unabhängig von i erreichen. Zur Injektivität von $\tilde{e}|_{\bar{B} \times (-\varepsilon, \varepsilon)}$: Falls $\tilde{e}(u, t) = \tilde{e}(u', t') \implies g(u) - g(u') = t'n(u') - tn(u)$ (*). Es gibt 2 Fälle: Bei $u = u'$ wäre $(t' - t)n = 0$ und $t = t'$. Bei $u \neq u'$ schließen wir aus (*) dass $\|g(u) - g(u')\| \leq |t'| + |t| \leq 2\varepsilon$. Verkleinere nun ε so, sodass $\|g(u) - g(u')\| \leq 2\varepsilon \implies \|u - u'\| \leq \delta$ (**). Das geht, weil $(g|_{\bar{B}})^{-1}$ gleichmäßig stetig ist. (**). Weil jedes $\tilde{e}|_{B(u_i, 2\delta) \times (-\varepsilon, \varepsilon)}$ injektiv ist, muss $\|u - u'\| \geq \delta$ sein, im Widerspruch zu (**). \implies Injektivität. \square

FOLGERUNG 2.25. Für jede lokal in M definiert Funktion $\alpha : B \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten wir den Graph von α , der durch $e(p, \alpha) = p + \alpha n(p)$ parametrisiert ist. Falls $|\alpha| < \varepsilon$ (Terminologie von oben), so ist der Graph eine Teilmannigfaltigkeit.

DEFINITION 2.26. (Parallellfläche) Der Graph einer konstanten Funktion heißt Parallellfläche.

SATZ 2.27. (Variation der Oberfläche) Betrachte die Graphen von Funktionen $p \mapsto \varepsilon \cdot \varphi(p)$, die auf einer $(m-1)$ -dim. Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^m definiert sind. Wir nehmen an, dass $\bar{B} = \text{supp}(\varphi)$ kompakt ist. Dann gilt für die Oberfläche dieser Graphenfläche, dass

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \text{vol}(g^\varepsilon(\bar{B})) = -(m-1) \int_{\bar{B}} \varphi \cdot H dO$$

BEWEIS. Zur Vorbereitung betrachte $A \in \text{GL}_n$ und $V, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \det(E + tV) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \det \begin{bmatrix} 1 + tv_{11} & \dots & tv_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ tv_{n1} & \dots & 1 + tv_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (1 + t(v_{11} + \dots + v_{nn}) + t^2(\dots)) = \text{tr}(V). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \det(A + tB) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \det(A) \det(E + tA^{-1}B) = \det(A) \text{tr}(A^{-1}B).$$

Nun bestimmen wir die Koeffizienten der 1. Grundform für die Graphenfläche, die durch $g(u) + \varepsilon\varphi(u) \cdot n(g(u))$ parametrisiert wird:

$$\begin{aligned}\partial_j^\varepsilon &= \partial_j + \varepsilon(\partial_j\varphi n + \varphi dn(\partial_j)), \\ g_{jk}^\varepsilon &= \langle \partial_j, \partial_k \rangle - \varepsilon\varphi \langle \partial_j, \sigma(\partial_k) \rangle - \varepsilon\varphi \langle \partial_k, \sigma(\partial_j) \rangle + \varepsilon^2(\dots) \\ &= g_{jk} - 2\varepsilon\varphi h_{jk} + \varepsilon^2(\dots).\end{aligned}$$

Für die bei der Berechnung der Oberfläche benötigte Determinante der Koeffizienten g_{jk} gilt

$$\begin{aligned}\left. \frac{d}{d\varepsilon} \det(g_{jk}^\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} &= -2\varphi \cdot \det(g_{jk}) \cdot \operatorname{tr}((g_{jk})^{-1} \cdot (h_{jk})), \\ \left. \frac{d}{d\varepsilon} \sqrt{\det(g_{jk}^\varepsilon)} \right|_{\varepsilon=0} &= \frac{1}{2\sqrt{\dots}} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \det(g_{jk}^\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = -\varphi \cdot \sqrt{\det(g_{jk})} \cdot \operatorname{tr}(h_j^k).\end{aligned}$$

Nun können wir die Variation der Oberfläche durch ein Oberflächenintegral ausdrücken, in dem $H = \frac{1}{m-1} \operatorname{tr}(h_j^k)$ vorkommt:

$$\left. \frac{dO^\varepsilon}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int \sqrt{\det(g_{jk}^\varepsilon)} \right|_{\varepsilon=0} = - \int (m-1)\varphi \cdot H \, dO. \quad \square$$

2.4. Minimalflächen.

DEFINITION 2.28. (*Minimalfläche*) Eine $(m-1)$ -dim. Fläche im \mathbb{R}^m heißt Minimalfläche, wenn ihre mittlere Krümmung verschwindet.

Für verschiedene Zwecke ist eine erweiterte Definition notwendig (z.B. mehrere TMF mit Rand, die längs ihrer Ränder zusammenhängen), auf die wir hier nicht eingehen wollen. Die obige Definition ist durch 2.27 motiviert, wonach die Minimalflächen bei kleinen Variationen ihre Oberfläche von 1. Ordnung nicht ändern. Jede Fläche, die ein Minimum der Oberfläche bei gegebenem Rand darstellt (Plateausches Problem), muss diese Eigenschaft besitzen.

DEFINITION 2.29. (*konforme Parametrisierung*) Eine Parametrisierung g heißt konform (winkeltreu), wenn die Koeffizientenmatrix der 1. Fundamentalform ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist (d.h. die kanonische Basis im Parametergebiet wird durch dg auf ein Vielfaches einer ON-Basis abgebildet, und dg ist eine Ähnlichkeit).

BEISPIEL 2.30. Die Parametrisierung $g_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$ aus 1.52 ist eine konforme Parametrisierung. Ist M eine Minimalfläche, so ist das Differential dn der spärischen Abbildung $n : M \rightarrow S^2$ eine Ähnlichkeit (denn die Eigenwerte sind $\kappa_1, \kappa_2 = -\kappa_1$, und die Eigenvektoren sind orthogonal zueinander). Sind sie nicht gleich Null, so ist n lokal umkehrbar, und $n^{-1} \circ g_1$ ist eine konforme Parametrisierung einer Minimalfläche.

SATZ 2.31. Jede zweidimensionale C^2 -TMF des \mathbb{R}^3 besitzt lokal eine konforme Parametrisierung [Spivak 1975ff, Vol. IV, pp. 455–500]

LEMMA 2.32. Ist $g : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine konforme Parametrisierung einer Teilmannigfaltigkeit und ist der Definitionsbereich U einfach zusammenhängend, dann gilt:

$$H = 0 \quad \iff \quad g^1, g^2, g^3 \text{ sind analytisch,}$$

d.h. $g^i = \operatorname{Re}(\omega^i)$ mit $\omega^i : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Für jedes analytische $g = \operatorname{Re}(\omega)$ gilt: g ist konform genau dann, wenn $\sum_i \left(\frac{\partial \omega^i}{\partial z}\right)^2 = 0$.

BEWEIS. Wir verwenden die Schreibweise $g_{,u} = \partial_1$, $g_{,v} = \partial_2$. Durch Ableiten der Konformitätsrelation folgt (i) $\langle g_{,u}, g_{,u} \rangle = \langle g_{,v}, g_{,v} \rangle \implies 2\langle g_{,uv}, g_{,u} \rangle = \langle g_{,vv}, g_{,v} \rangle$ und $2\langle g_{,uu}, g_{,u} \rangle = \langle g_{,uv}, g_{,v} \rangle$; sowie (ii) $\langle g_{,u}, g_{,v} \rangle = 0 \implies 2\langle g_{,uv}, g_{,v} \rangle + \langle g_{,u}, g_{,vv} \rangle = 0$ und $2\langle g_{,uu}, g_{,v} \rangle + \langle g_{,u}, g_{,uv} \rangle = 0$, d.h. insgesamt $\langle g_{,uu} + g_{,vv}, g_{,u} \rangle = \langle g_{,uu} + g_{,vv}, g_{,v} \rangle = 0$.

g ist analytisch genau dann, wenn $g_{,uu} + g_{,vv} = 0$, d.h. wenn zusätzlich

zu den obigen beiden Relationen auch $\langle g_{,uu} + g_{,vv}, n \rangle = 0$ gilt. Wegen $g_{jk} = \gamma \delta_{jk}$ ist $H = \operatorname{tr}(h_j^k)/2 = \frac{1}{2\gamma^2} \langle g_{,uu} + g_{,vv}, n \rangle$, was zu zeigen war. Sei nun $\omega^j(u+iv) = g^j(u+iv) + ih^j(u+iv)$. Wir haben $\sum \left(\frac{d\omega^j}{dz}\right)^2 = \sum ((g_{,u}^j)^2 - (g_{,v}^j)^2 + 2ig_{,u}^j g_{,v}^j) = \|g_{,u}\|^2 - \|g_{,v}\|^2 + 2i\langle g_{,u}, g_{,v} \rangle$. Dieser Ausdruck verschwindet genau für konformes g . \square

SATZ 2.33. Eine Minimalfläche lässt sich in der Umgebung eines Punktes p in der Form $\operatorname{Re}(\omega(z))$ mit $\omega = (\omega^1, \omega^2, \omega^3)$, ω^i holomorph sodass $\sum_i \left(\frac{d\omega^i}{dz}\right)^2 = 0$ parametrisieren. Umgekehrt erhält man für jedes solche ω eine Minimalfläche.

BEWEIS. Ist $K(p) \neq 0$, so ist die sphärische Abbildung lokal regulär, und die erste Aussage folgt aus dem obigen Beispiel zusammen mit 2.32. Ist $K(p) = 0$,

so muss man anstelle des Beispiels 2.31 benutzen. Die Umkehrung folgt direkt aus 2.32. \square

Das Plateausche Problem ist für unsere Mittel zu schwierig. Eine Minimalfläche nicht durch eine geschlossene Randkurve, sondern durch einen Flächenstreifen festzulegen, ist leichter:

DEFINITION 2.34. (Björlingsches Problem) Seien $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $n : I \rightarrow S^2$ reell-analytisch. Gesucht ist eine Minimalfläche, die die Kurve $c(t)$ enthält und im Punkt $c(t)$ den Normalvektor $n(t)$ besitzt.

SATZ 2.35. (Lösung des Björlingschen Problems) Seien $c(z)$ und $n(z)$ holomorphe Funktionen, die $c(t)$ und $n(t)$ in ein einfach zusammenhängendes Gebiet $I \times iJ \subseteq \mathbb{C}$ fortsetzen, und sei $u_0 \in I$. Dann hat das Björlingsche Problem die Lösung $\omega(z) = c(z) - i \int_{u_0}^z n(\zeta) \times \dot{c}(\zeta) d\zeta$.

BEWEIS. Wir bezeichnen komplexe Ableitungen mit einem Strich: $\omega' = c' - in \times c'$. Bei $g = \operatorname{Re}(\omega)$ ist $\omega'(u+iv) = g_{,u} + ig_{,v}$. Wir berechnen $\langle \omega', n \rangle = \langle g_{,u}, n \rangle + i\langle g_{,v}, n \rangle$, d.h. $\langle \omega', n \rangle = 0$ ist notwendig und hinreichend dafür, dass n ein Normalvektorfeld der durch g parametrisierten Fläche ist. Für reelles z folgt dies aus $\langle \omega', n \rangle = \langle c' - in \times c', n \rangle = \langle c', n \rangle - i \det(n, c', n) = 0$.

Wir zeigen $g(z) = c(z)$ für reelles z durch $g(z) = g(u+i \cdot 0) = \operatorname{Re}(c(u) + i \int_{u_0}^u n(t) \cdot \dot{c}(t) dt) = \operatorname{Re}(c(u)) = c(u)$.

Noch zu zeigen ist $\langle \omega', \omega' \rangle = 0$. Dies folgt aus $\langle c' - in \times c', c' - in \times c' \rangle = \langle c', c' \rangle - 2i\langle c', n \times c' \rangle - \langle n \times c', n \times c' \rangle = \langle c', c' \rangle - \langle n, n \rangle \langle c', c' \rangle = 0$. Für reelles z ist die holomorphe Funktion $\langle n, n \rangle$ gleich 1, also für alle z gleich 1. Damit verschwindet der obige Ausdruck und $\langle \omega', \omega' \rangle = 0$. \square

3. DIFFERENZIERBARE MANNIGFALTIGKEITEN

Dieses und die folgenden Kapitel sind so geschrieben, dass der Begriff der abstrakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit in Kap. 3.1 definiert wird, der Text ab Kap. 3.3 jedoch so gestaltet ist, dass man jederzeit für ‘Mannigfaltigkeit’ auch ‘Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n ’ einsetzen kann.

3.1. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Bisher betrachteten wir Teilmannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n . Der umgebende Raum stellte uns Ableitungsvektoren, den Tangentialvektorraum, ein Skalarprodukt und Normalvektoren zur Verfügung. Wir wollen nun abstrakte differenzierbare Mannigfaltigkeiten betrachten, die nicht notwendigerweise in einem \mathbb{R}^n eingebettet liegen.

DEFINITION 3.01. (*Klebeabbildungen, Klebedaten*) Seien $\{U_i \mid i \in I\}$ offene Teilmengen des \mathbb{R}^m und $\varphi_{ij} : U_i \rightarrow U_j$ Diffeomorphismen von offenen Teilmengen von U_i auf offenen Teilmengen von U_j mit $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}^{-1}$, $\varphi_{ik} = \varphi_{ij} \circ \varphi_{jk}$ überall dort, wo definiert, und $\varphi_{ii} = \text{id}_{U_i}$. Dann heißen die φ_{ij} Klebeabbildungen, und die Gesamtheit der U_i mit den Klebeabbildungen nennt man Klebe-Daten.

DEFINITION 3.02. (*differenzierbare Mannigfaltigkeit, Karte*) Seien (U_i) , (φ_{ij}) Klebedaten und ‘ \sim ’ die Äquivalenzrelation definiert durch $x \sim y \iff \exists i, j \in I$ mit $x \in U_i$, $y \in U_j$, $\varphi_{ij}(x) = y$. M sei die Menge der Äquivalenzklassen von ‘ \sim ’.

Die natürlichen Abbildungen $\varphi_i : M \rightarrow U_i$ heißen Karten, alle Karten zusammen heißen *Atlas*, und ihre Umkehrungen heißen lokale Parametrisierungen von M . Eine Teilmenge $U \subseteq M$ heißt offen, wenn alle $\varphi_i(U) \subseteq U_i$ offen sind. Die Abbildungen $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ heißen Koordinatenwechsel oder Kartenwechsel.

Die Menge M heißt differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension m , falls die dadurch bestimmte Topologie³ Hausdorffsch und parakompakt ist.

BEMERKUNG 3.03. Die Forderung an die Topologie, parakompakt zu sein, ist jedenfalls dann erfüllt, wenn wir höchstens abzählbar viele Klebeabbildungen verwenden. Diese Eigenschaft wird in dieser Vorlesung nicht verwendet werden und ist äquivalent zur Gültigkeit von 4.65.

BEISPIEL 3.04. Die Forderung an die Topologie, Hausdorffsch zu sein, schließt das ‘verkehrte Zusammenkleben’ der Kartenumgebungen aus: Verkleben wir $U_1 = (0, 2)$ und $U_2 = (4, 6)$ mittels $\varphi_{1,2} : (1, 2) \rightarrow (4, 5)$, $\varphi_{1,2}(x) = x + 3$, so erhalten wir eine differenzierbare Mannigfaltigkeit homöomorph zum Intervall $(0, 3)$.

Verkleben wir $U_1 = (0, 2)$ und $U_2 = (5, 7)$ mittels $\varphi_{1,2} : (1, 2) \mapsto (6, 7)$, $\varphi_{1,2}(x) = x + 5$, so ist M kein Hausdorff-Raum, weil jede Umgebung von $[1]_{\sim}$ mit jeder Umgebung von $[6]_{\sim}$ einen nichtleeren Durchschnitt besitzt.

³Dass durch diese Definition von ‘offenen Mengen’ tatsächlich eine Topologie bestimmt ist, ist eine leichte Übungsaufgabe.

BEISPIEL 3.05. Ist M eine Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n , so überdecken wir sie durch Kartenumgebungen V_i , mit Karten $\varphi_i : V_i \subseteq M \rightarrow U_i$, die Umkehrungen von lokalen Parametrisierungen sind. Die Abbildungen $\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ ergeben dann Klebedaten. Die Relation ‘ \sim ’ ist nichts anderes als die Gleichheits-Relation für Punkte in M . Die offenen Mengen V_i bzw. U_i sind durch die Abbildungen φ_{ij} aneinandergeklebt. Als differenzierbare Mannigfaltigkeit entsteht M selbst.

3.2. Tangentialvektoren und Abbildungen. Ab jetzt wollen wir auch für m -dimensionale TMF M des \mathbb{R}^n den Begriff einer Karte (außer dort, wo es explizit erwähnt wird) so verstehen, dass durch die Kartenabbildung φ_j eine offene Teilmenge von M auf eine offene Teilmenge U_j des \mathbb{R}^m abgebildet wird. Wir finden solche Karten durch Einschränken der ‘alten’ TMF-Karten auf M , oder durch Umkehren von Parametrisierungen.

DEFINITION 3.06. (*Koordinatendarstellung*) Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Karten $\varphi_j : U_j \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\varphi'_k : U'_k \subseteq N \rightarrow \mathbb{R}^n$. Für die Abbildungen

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad g : \mathbb{R}^k \rightarrow M, \quad h : M \rightarrow N$$

betrachten wir die Koordinatendarstellungen

$$\tilde{f} = \varphi'_k \circ f, \quad \tilde{g} = g \circ \varphi_j^{-1}, \quad \tilde{h} = \varphi'_k \circ h \circ \varphi_j^{-1}$$

Die Abbildungen f, g, h heißen differenzierbar (C^r), wenn ihre Koordinatendarstellungen diese Eigenschaft haben.

SATZ 3.07. *Die Differenzierbarkeit ist wohldefinierter Begriff, d.h. er hängt nicht von der speziellen Wahl der Karten ab. Für Teilmannigfaltigkeiten stimmen die hier definierten Begriffe mit den früher definierten überein.*

DEFINITION 3.08. (*Kurve, Tangentialvektorraum,*) Eine differenzierbare Abbildung $c : I \rightarrow M$ heißt Kurve, ihre Koordinatendarstellung sei mit $\tilde{c} = \varphi \circ c$. Ein Tangentialvektor X_p im Punkt $p \in M$ ist eine Äquivalenzklasse von Kurven mit $c(0) = p$, deren Koordinatendarstellung dieselbe Ableitung besitzen. Wir schreiben

$$X_p = \dot{c}(0) \iff \tilde{X}_p = d\varphi(X_p) = \dot{\tilde{c}}(0).$$

Damit gibt es einen Vektorraum $T_p M = d\varphi^{-1}(\mathbb{R}^m)$ von Tangentialvektoren (Tangentialvektorraum)

DEFINITION 3.09. (*Richtungsableitung*) Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und $X_p = \dot{c}(0) \in T_p M$. Die Richtungsableitung in Richtung X_p ist definiert als

$$X_p(f) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ c = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ c = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \tilde{f} \circ \tilde{c}$$

SATZ 3.10. *Die Richtungsableitung ist wohldefiniert. Es gilt*

$$\begin{aligned} X_p(f + g) &= X_p f + X_p g, & X_p(fg) &= (X_p f)g + f(X_p g) \\ (X_p + Y_p)f &= X_p f + Y_p f, & (\lambda X_p)f &= \lambda(X_p f), \end{aligned}$$

BEWEIS. Das folgt direkt aus den entsprechenden Regeln für Richtungsableitungen im \mathbb{R}^m . \square

DEFINITION 3.11. (*Differential einer Abbildung*) Das Differential df_p einer Abbildung $f : M \rightarrow N$ im Punkt p ist gegeben durch

$$df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N, \quad \frac{d}{dt} c(0) \mapsto \frac{d(f \circ c)}{dt}(0).$$

Das gilt für alle Kurven in M mit $c(0) = p$.

LEMMA 3.12. *Das Differential ist wohldefiniert. Für Karten φ, φ' für M, N gilt*

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{df} & TN \\ d\varphi \downarrow & & \downarrow d\varphi' \\ TU & \xrightarrow{d\tilde{f}} & TU' \end{array}$$

d.h. die Koordinatendarstellung des Differentials ist gleich dem Differential der Koordinatendarstellung.

BEWEIS. Seien φ, φ' Karten für M, N erhalten $d\varphi'(df(v)) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\varphi' \circ f \circ c) =$ und $\tilde{c} = \varphi \circ c$, $\tilde{f} = \varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$. Mit $\frac{d}{dt}|_{t=0}(\tilde{f} \circ \tilde{c}) = d\tilde{f}(\tilde{c}(0))$. Damit ist df wohldefiniert und linear. \square
 $v = \dot{c}(0)$ ist $df(v) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(f \circ c)$. Wir wenden φ' auf diese Gleichung an und

FOLGERUNG 3.13. *'Alle lokalen Aussagen' über differenzierbare Abbildungen $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gelten auch für $f : M \rightarrow N$ (z.B. der Satz über die Umkehrfunktion und der Satz über implizite Funktionen).*

BEMERKUNG 3.14. Die Klebeabbildungen φ_{ij} sind hier immer C^∞ . Wären sie nur C^r (und M damit eine C^r -Mannigfaltigkeit), so wäre die Differenzierbarkeit von Abbildungen aus und nach M nur bis zu C^r sinnvoll definierbar. Abgesehen von der größeren Bequemlichkeit von C^∞ -Mannigfaltigkeiten kann man zeigen, dass es keinen Sinn macht, endliche Differenzierbarkeit zuzulassen — man erhält dieselben Mannigfaltigkeiten, nur mit ungeschickter gewählten Karten. Bei Teil-Mannigfaltigkeiten ist es sinnvoll, endliche Differenzierbarkeiten zuzulassen.

3.3. Vektorfelder und Integralkurven.

DEFINITION 3.15. (*Vektorfeld*) Eine Abbildung $X : p \in M \mapsto X_p \in T_p M$ heißt Vektorfeld. Ist φ eine Karte für M , so heißt $\tilde{X} = d\varphi \circ X \circ \varphi^{-1}$ die Koordinatendarstellung von X . Differenzierbarkeit von X ist über Differenzierbarkeit der Koordinatendarstellung definiert.

BEISPIEL 3.16. Ist φ eine Karte für M , so sind durch φ die Vektorfelder $\partial_1, \dots, \partial_m$ bestimmt, deren Koordinatendarstellung die kanonischen Basisvektoren des \mathbb{R}^m sind. Die Interpretation von Tangentialvektoren als Richtungsableitungen sagt hier für eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und ihre Koordinatendarstellung $\tilde{f} = f \circ \varphi$:

$$(\partial_j f)(p) = \frac{\partial}{\partial u_j} \tilde{f}(\varphi(p))$$

Ein allgemeines Vektorfeld hat die Form

$$X = \sum x^j \partial_j \iff \tilde{X}_p = \begin{bmatrix} x^1(p) \\ \vdots \\ x^m(p) \end{bmatrix}$$

Wir schreiben $X = x^j \partial_j$ und $Xf = x^j \partial_j f$.

DEFINITION 3.17. (*Lie-Klammer*) Sind $X = x^j \partial_j$ und $Y = y^j \partial_j$ Vektorfelder, dann heißt das Vektorfeld

$$[X, Y] := (x^j \partial_j y^k - y^j \partial_j x^k) \partial_k$$

die Lie-Klammer (oder Poisson-Klammer) von X und Y . Man beachte, dass $\partial_i y^k$ die Richtungsableitung der Funktion y^k längs der i -ten Koordinate bedeutet, d.h. $\partial_i y^k = \frac{\partial y^k}{\partial u^i}$.

LEMMA 3.18. *Die Lie-Klammer hat die folgenden Eigenschaften:*

- (1) $[X, Y]f = XYf - YXf$
- (2) $[\partial_i, \partial_j] = 0$
- (3) $[X, Y] = -[Y, X], [X, X] = 0$
- (4) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

(1) sagt der Differentialoperator 2. Ordnung $X \circ Y - Y \circ X$ ist in Wahrheit eine Richtungsableitung längs des Vektorfeldes $[X, Y]$. (2) sagt, die Basisfelder kommutieren. (3) ist Antisymmetrie, und (4) ist die Jacobi-identität.

BEWEIS. (1) zeigt man in lokalen Koordinaten:

$$[X, Y]f = (x^i \partial_i y^k - y^i \partial_i x^k) \partial_k f.$$

$$X(Yf) = X(y^k \partial_k f) = x^k \partial_i (y^k \partial_k f) = x^i \partial_i y^k \partial_k f + x^i y^k \partial_i \partial_k f.$$

$$Y(Xf) = y^i \partial_i x^k \partial_k f + y^i x^k \partial_i \partial_k f.$$

(1) \implies (2) ist der Satz von H. A. Schwarz: $\partial_i \partial_j f - \partial_j \partial_i f = 0$. (1) \implies (3) ist trivial, und (1) \implies (4) folgt durch Einsetzen und Addieren:

$$[X[Y, Z]]f = X[YZ]f - [YZ]Xf = XYZf - XZYf - YZXf + ZYXf.$$

Offenbar ist die Summe $[X[Y, Z]]f + \dots$ gleich 0. \square

DEFINITION 3.19. (*Integralkurve, Fluß*) Eine Kurve c ist Integralkurve des Vektorfeldes X , wenn ihre Ableitungsvektoren ins Vektorfeld gehören, d.h. $\dot{c}(t) = X_{c(t)}$. Ist c Integralkurve mit der Anfangsbedingung $c(0) = X_p$, dann definieren wir $\text{Fl}_X^t(p) = \text{Fl}_X(p, t) := c(t)$. Die Abbildung Fl_X heißt der Fluss des Vektorfeldes.

SATZ 3.20. *Integralkurven sind durch einen Punkt $c(t_0)$ und das Vektorfeld eindeutig bestimmt. Der Fluss ist genauso oft differenzierbar wie das Vektorfeld.*

BEWEIS. Das ist eine andere Formulierung von A.21 über die Lösungen von Differentialgleichungen. \square

LEMMA 3.21. *Ist $c(t)$ Integralkurve, so ist $\tilde{c}(t) := c(t + t_0)$ ebenfalls Integralkurve, falls definiert. Falls definiert, gilt*

$$\text{Fl}_X^s \circ \text{Fl}_X^t(p) = \text{Fl}_X^{s+t}(p),$$

BEWEIS. $(\frac{d}{dt}c)(t + t_0) = (\frac{d}{dt}\tilde{c})(t)$, d.h. auch \tilde{c} erfüllt die Differentialgleichung $\dot{c} = X_{c(t)}$. Damit ist \tilde{c} Integralkurve. Die zweite Aussage ist eine andere Formulierung der ersten. \square

SATZ 3.22. Sind $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ die Koordinatendarstellungen von Vektorfeldern X, Y , so gilt

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = [\widetilde{X}, \widetilde{Y}], \quad \text{Fl}_{\widetilde{X}}^t \circ \varphi = \varphi \circ \text{Fl}_X^t,$$

Für Vektorfelder, $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$, die in einer offenen Menge des \mathbb{R}^m definiert sind, gilt

$$\text{Fl}_{\widetilde{X}}^t \circ \text{Fl}_{\widetilde{Y}}^s(p) - \text{Fl}_{\widetilde{Y}}^s \circ \text{Fl}_{\widetilde{X}}^t(p) = st[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]_p + \dots,$$

und es kommen in der Taylorreihe nur gemischte Glieder vor.

BEWEIS. $X = x^j \partial_j \iff \widetilde{X} = x^j \widetilde{\partial}_j$, wobei $\widetilde{\partial}_1, \dots, \widetilde{\partial}_n$ die kanonischen Basisvektoren im \mathbb{R}^n sind. Damit ist die Definition von $[\cdot, \cdot]$ für X, Y und $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ dieselbe, und der Fluß vertauscht mit der Karte.

Die Taylorreihe von $\text{Fl}_{\widetilde{X}}^t \circ \text{Fl}_{\widetilde{Y}}^s$ wird nun im Koordinatengebiet berechnet, wir schreiben aber nur X, Y anstelle von $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$. O.B.d.A. sei $p = 0$. Sei $\psi(s, t) = \text{Fl}_X^t \circ \text{Fl}_Y^s - \text{Fl}_Y^s \circ \text{Fl}_X^t$, und seien $c(t) = \text{Fl}_X^t(0)$ und $d(s) = \text{Fl}_Y^s(0)$ die von 0 ausgehenden Integralkurven von X und Y . Dann ist $\frac{\partial^r \psi}{\partial s^r}(0, 0) = \frac{d^r}{ds^r} \Big|_{s=0} \psi(0, s) = 0$ für alle r , und analog $\frac{\partial^r \psi}{\partial s^r}(0, 0) = 0$. Damit sind die Koeffizienten $(r, 0)$, $(0, r)$ der Taylorreihe von $\psi(s, t)$ bestimmt. Für den Koeffizienten $(1, 1)$ berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s \partial t}(0, 0) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \text{Fl}_Y^s \circ \text{Fl}_X^t(0) \right) - \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \text{Fl}_X^t \circ \text{Fl}_Y^s(0) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} Y_{\text{Fl}_X^t(0)} - \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} X_{\text{Fl}_Y^s(0)} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} X \circ c - \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} Y \circ d \\ &= \left(\frac{\partial y^1}{\partial u^k} \dot{y}^k - \frac{\partial x^1}{\partial u^k} \dot{c}^k, \dots \right) = (\partial_k y^1 \cdot x^k - \partial_k x^1 \cdot y^k, \dots) = [X, Y]. \quad \square \end{aligned}$$

SATZ 3.23. $[X, Y] = 0 \iff \text{Fl}_X^t \circ \text{Fl}_Y^s = \text{Fl}_Y^s \circ \text{Fl}_X^t$.

BEWEIS. ‘ \Leftarrow ’ folgt aus 3.22. Um die Umkehrung zu zeigen, tun wir folgendes: Sei $x(t) = \text{Fl}_X^t(p)$ die Flußlinie von X durch p . Wir möchten zeigen, dass die Vektorfelder $d_p(\text{Fl}_X^t)(Y_p) := \overline{Y}_{x(t)}$ und $Y_{x(t)}$ längs $x(t)$ gleich sind. Wir rechnen in einem Kartengebiet, und unter der Ableitung eines Vektorfeldes $(c(t); v(t))$ verstehen wir den Vektor dv/dt .

$$\frac{d\overline{Y}_{x(t)}}{dt} \Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} d\text{Fl}_X^t(Y_p) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d\text{Fl}_X^t \circ d\text{Fl}_X^{t_0}(Y_p) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d\text{Fl}_X^t \overline{Y}_{t_0}.$$

d.h. $\overline{Y}_{x(t)}$ erfüllt die Differentialgleichung

$$\frac{d\overline{Y}}{dt} = K_t(\overline{Y}_{x(t)}),$$

mit der von t abhängigen linearen Abbildung $K_t = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (d\text{Fl}_X^t)_{x(t_0)}$. Betrachte nun das Vektorfeld $Y_{x(t)}$ längs der Flußlinie $x(t) = \text{Fl}_X^t(p)$ und leite es ab:

$$\begin{aligned} \frac{dY_{x(t)}}{dt} \Big|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \text{Fl}_Y^s \circ \text{Fl}_X^t(x(t_0)) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \text{Fl}_X^t \circ \text{Fl}_Y^s(x(t_0)) \quad (\text{wegen } [X, Y] = 0) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} d\text{Fl}_X^t(Y_{x(t_0)}) = K_t(Y_{x(t_0)}). \end{aligned}$$

Für die letzte Zeile haben wir $\frac{d}{ds}(f \circ c) = df(\frac{d}{ds}c)$ angewandt, mit $f = \text{Fl}_X^t$ und $c(s) = \text{Fl}_Y^s(x(t_0))$. Wir sehen, dass $\overline{Y}_{x(t)}$ und $Y_{x(t)}$ dieselbe Differentialgleichung erfüllen. Bei $t = 0$ stimmen beide Vektorfelder überein, also sind sie gleich.

Wir haben somit gezeigt, dass $d\text{Fl}_X^t$ das Vektorfeld Y in das Vektorfeld Y überführt. Damit führt Fl_X^t die Integralkurven von Y in Integralkurven von Y über: Ist $c(s)$ die Integralkurve von Y mit $c(0) = p$, so ist $\text{Fl}_X^t \circ c(s)$ die Integralkurve von Y durch $\text{Fl}_X^t(p)$, d.h. $\text{Fl}_X^t \circ \text{Fl}_Y^s(p) = \text{Fl}_Y^s \circ \text{Fl}_X^t(p)$. \square

3.4. Tensorfelder. Wir haben bisher verschiedenen Abbildungen definiert, die Tangentialvektoren als Argumente besitzen (z.B. das Skalarprodukt auf einer Fläche im \mathbb{R}^n , oder das Differential einer Abbildung). Um diese verschiedenen Abbildungen einheitlich behandeln zu können, definieren wir den Begriff des Tensorfeldes auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit.

DEFINITION 3.24. (*Linearform, Multilinearform*) Ist $f : V^n \rightarrow \mathbb{R}$ in jedem Argument linear (d.h. es gilt

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, \lambda x_i + \mu y_i, \dots, x_n) \\ &= \lambda f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \\ &+ \mu f(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n), \end{aligned}$$

so heißt f eine Multilinearform. Die Multilinearformen bilden einen Vektorraum, der mit $\otimes^n V^*$ oder $\mathfrak{Z}_n(V)$ bezeichnet wird.

BEISPIEL 3.25. Der Dualraum von V besteht aus den Linearformen auf V , und es ist $V^* = \mathfrak{Z}_1 V$. Beispiele für Elemente von $\mathfrak{Z}_2 V$ (dem Vektorraum der Bilinearformen) sind die Skalarprodukte.

Ein Vektor $x \in V$ kann als Linearform auf dem Dualraum V^* interpretiert werden: Sein Wert $x(a^*)$ auf einer Linearform a^* ist definiert durch $a^*(x)$. Eine lineare Abbildung $L : V \rightarrow V$ kann als bilineare Abbildung auf dem Produkt $V \times V^*$ interpretiert werden: Ist $x \in V$, $a^* \in V^*$, so ist $L(x, a^*)$ definiert durch $a^*(Lx)$. Das führt zu der folgenden, allgemeineren Definition:

DEFINITION 3.26. (*Tensor*) Eine multilineare Abbildung $V^r \times (V^*)^s \rightarrow \mathbb{R}$ heißt ein Tensor der Stufe (r, s) , oder ein r -fach kovarianter, s -fach kontravarianter Tensor. Der Vektorraum dieser Abbildungen wird mit $\otimes^r(V^*) \otimes \otimes^s V$ oder $\mathfrak{Z}_s^r V$ bezeichnet.

BEISPIEL 3.27. Linearformen, Bilinearformen, Vektoren, und lineare Endomorphismen sind Tensoren der Stufen $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$, und $(1,1)$.

DEFINITION 3.28. (*Tensorprodukt*) Sind g_1, g_2 Tensoren der Stufen (r_1, s_1) und (r_2, s_2) , so ist der Tensor $g_1 \otimes g_2$ der Stufe $(r_1 + r_2, s_1 + s_2)$ definiert durch

$$\begin{aligned} g_1 \otimes g_2(x_1 \dots, y_1 \dots, a_1^* \dots, b_1^* \dots) \\ &= g_1(x_1 \dots, a_1^* \dots) g_2(y_1 \dots, b_1^* \dots). \end{aligned}$$

BEMERKUNG 3.29. (*Basis, Koordinaten*) Sei e_1, \dots, e_n eine Basis in V und e^{1^*}, \dots, e^{n^*} die dazu duale Basis (d.h.

$$e^{i^*}(e_j) = \delta_{ij}.$$

Dann bilden die n^{r+s} Multilinearformen

$$e^{i_1^*} \otimes \dots \otimes e^{i_r^*} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_s}$$

eine Basis von $\mathfrak{Z}_s^r V$. Eine Multilinearform $g \in \mathfrak{Z}_s^r V$ kann man in der Form

$$\sum g_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} e^{i_1^*} \otimes \dots \otimes e^{i_r^*} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_s}$$

schreiben. $g_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s}$ heißen die Koordinaten von g . Man erhält sie durch Auswerten von g auf den Basisvektoren von V und V^* :

$$g_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} = g(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}, e^{j_1^*}, \dots, e^{j_s^*}).$$

Das Auswerten von g auf r Vektoren x_1, \dots, x_r mit Koordinaten $(x_1^{i_1}), \dots, (x_r^{i_r})$ (jeweils $i_k = 1, \dots, n$) und s Linearformen a^{1^*}, \dots, a^{s^*} mit Koordinaten $(a_{j_1}^1), \dots, (a_{j_s}^s)$ (jeweils $j_k = 1, \dots, n$), erfolgt durch

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, a_1^*, \dots) &= \\ &= \sum g_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} \cdot x_1^{i_1} \cdots x_r^{i_r} \cdot a_{j_1}^1 \cdots a_{j_s}^s. \end{aligned}$$

Beim Rechnen mit Tensoren verwenden wir die Einsteinsche Summenkonvention: Es wird über jeden Index, der zweimal, einmal oben und einmal unten, vorkommt, von 1 bis n summiert. In der obigen Summe könnte man das Summenzeichen also auch weglassen.

Die Koordinaten eines Produkts sind offenbar gleich den Produkten der einzelnen Koordinaten: Haben $g, h, g \otimes h$ die Koordinaten $g_{\dots}, h_{\dots}, k_{\dots}$, so ist

$$k_{i_1, \dots, i_{r_1+r_2}}^{j_1, \dots, j_{s_1+s_2}} = g_{i_1, \dots, i_{r_1}}^{j_1, \dots, j_{s_1}} h_{i_{r_1+1}, \dots, i_{r_2}}^{j_{s_1+1}, \dots, j_{s_2}}.$$

DEFINITION 3.30. (*symmetrische Tensoren, alternierende Tensoren*) Eine Multilinearform $g \in \mathfrak{Z}_r(V)$ ist symmetrisch, wenn ihr Wert nicht von der Reihenfolge der Argumente abhängt. Sie ist alternierend, wenn für eine Permutation $\sigma : \{1, \dots, r\} \rightarrow \{1, \dots, r\}$ gilt

$$\begin{aligned} g(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) \\ &= \text{sgn}(\sigma) \cdot g(v_1, \dots, v_r). \end{aligned}$$

DEFINITION 3.31. (*Alternante, Keilprodukt*) Für Multilinearformen g, g_1, \dots, v_r ist die Alternante $\mathcal{A}(g)$ definiert durch

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(g)(v_1, \dots, v_r) \\ = \sum_{\sigma \in S_r} \operatorname{sgn}(\sigma) g(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}). \end{aligned}$$

Das Keilprodukt ist definiert durch

$$g_1 \wedge \dots \wedge g_r = \mathcal{A}(g_1 \otimes \dots \otimes g_r).$$

DEFINITION 3.32. (*Tensorfeld, Koordinaten für Tensoren*) Wir betrachten eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M und eine Abbildung g , die jedem $p \in M$ ein Element $g_p \in \mathfrak{Z}_s^r(T_p M)$ zuweist.

Eine Karte $\varphi : M \rightarrow U$ definiert Basisfelder $\partial_1, \dots, \partial_n$. Sei (dx^1, \dots, dx^n) die zu $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ duale Basis im zu $T_p M$ dualen Vektorraum. Durch Auswerten von g_p auf ∂_i und dx^j erhält man die Koordinatenfunktionen

$$g_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} : M \rightarrow \mathbb{R}$$

von g . g ist differenzierbar, wenn alle Koordinatenfunktionen es sind. In diesem Fall heißt g ein (r, s) -Tensorfeld in M . g kann als Linearkombination $g = \sum g_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_r} \otimes \partial_{j_1} \otimes \dots \otimes \partial_{j_s}$ geschrieben werden.

DEFINITION 3.33. (*Tensorbündel*) Die Vereinigung aller $\mathfrak{Z}_s^r(T_p M)$ heißt das (r, s) -Tensorbündel $\mathfrak{Z}_s^r M$ über M .

BEISPIEL 3.34. Die Abbildung $p \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ ist ein $(2, 0)$ -Tensorfeld auf einer Fläche im \mathbb{R}^n . Die Koordinaten von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sind $g_{ij} = \langle \partial_1, \partial_2 \rangle$.

Ein Vektorfeld V ist ein $(0, 1)$ -Tensorfeld. Sind v^j die Koordinaten von V , so ist $V = v^j \partial_j$. Für die Koordinatenfunktionen v^j gilt $v^j = V(dx^j)$.

SATZ 3.35. (*Koordinatenwechsel*) Seien φ, φ' Karten und sei $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi = \varphi \circ (\varphi')^{-1}$. Sei $(x_j^i(p))$ die Matrix der partiellen Ableitungen von ψ im Punkt $\varphi'(p)$, und $x_i^{j'}(p)$ die Matrix der partiellen Ableitungen von ψ^{-1} im Punkt $\varphi(p)$. Seien $g_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s}$ und $g_{i'_1, \dots, i'_r}^{j'_1, \dots, j'_s}$ Koordinaten eines Tensorfeldes g bezüglich der Karten φ, φ' . Dann ist

$$\begin{aligned} g_{i'_1, \dots, i'_r}^{j'_1, \dots, j'_s}(p) \\ = x_{i'_1}^{j'_1} \dots x_{i'_r}^{j'_r} \cdot x_{j'_1}^{j_1} \dots x_{j'_s}^{j_s} g_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s}(p). \end{aligned}$$

BEISPIEL 3.36. Ist $V = v^j \partial_j = v^{j'} \partial_{j'}$ ein Vektorfeld mit seinen zwei Koordinatendarstellungen bezüglich der Karten φ, φ' , so ist $v^{j'} = x_j^{j'} v^j$. Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle = g_{jk} dx^j \otimes dx^k = g_{j'k'} dx^{j'} \otimes dx^{k'}$, so ist $g_{j'k'} = g_{jk} x_j^{j'} x_k^{k'}$ (vgl. den Beweis zu 1.67).

4. RIEMANNSCHE GEOMETRIE

4.1. Mannigfaltigkeiten mit Riemannscher Metrik. In diesem Kapitel ist M , falls nicht anders erwähnt, eine m -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

DEFINITION 4.01. (*Riemannscher Raum, Skalarprodukt*) Ist in jedem Tangentialvektorraum von M ein positiv definites Skalarprodukt gegeben, sodass die Funktionen $g_{jk} : M \rightarrow \mathbb{R}$, $p \mapsto \langle \partial_j, \partial_k \rangle$ ($r > 0$) sind, so heißt $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Riemannscher Raum, und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt Riemannsche Metrik.

BEMERKUNG 4.02. Man betrachtet mitunter (siehe Kap. 6) auch nicht positiv definite symmetrische Bilinearformen, welche zu den Pseudo-Riemannschen Räumen, und schiefsymmetrische Bilinearformen, die zu symplektischen Räumen führen.

BEISPIEL 4.03. Die folgenden sind Beispiele von Riemannschen Räumen:

- Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine TMF und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt des \mathbb{R}^n , so macht die Einschränkung von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf TM die Teilmannigfaltigkeit M zu einem Riemannschen Raum. Ist $g : U \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung, dann sind die Funktionen

$$g_{jk} := \langle \partial_j, \partial_k \rangle = \left\langle \frac{\partial g}{\partial u^j}, \frac{\partial g}{\partial u^k} \right\rangle$$

die Koeffizientenfunktionen der Riemannschen Metrik bezüglich der Karte g^{-1} .

- Ist M eine differenzierbare (Teil-)mannigfaltigkeit, parametrisiert durch $g : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$, und sind $g_{jk} : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen so, dass $(g_{jk}(p))$ für alle $p \in U$ eine positiv definite symmetrische Matrix ist, dann macht die Definition

$$\langle \partial_j, \partial_k \rangle := g_{jk}, \text{ d.h. } \langle v^j \partial_j, w^k \partial_k \rangle_p = v^j w^k g_{jk}(p)$$

$(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ zu einem Riemannschen Raum.

- Ist $f : M \rightarrow M'$ eine reguläre Abbildung und $(M', \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Riemannscher Raum, so ist $\langle v, w \rangle := \langle df(v), df(w) \rangle$ eine Riemannsche Metrik auf M ('Pullback' von $\langle \cdot, \cdot \rangle$).

- Ein mechanisches System hänge von n Parametern ab, und die Menge seiner Zustände sei als eine n -dimensionale differenzierbare MF modelliert. Für eine lokale Parametrisierung mit Koordinaten u^1, \dots, u^n sei die kinetische Energie eine quadratische Form in den Ableitungen der Parameter: $T(u^1, \dots, u^n, \dot{u}^1, \dots, \dot{u}^n) = g_{jk}(u^1, \dots, u^n) \dot{u}^j \dot{u}^k$. Dann ist $\langle v, v \rangle := T(v)$, $\langle v, w \rangle := \frac{1}{2}(T(v+w) - T(v) - T(w))$ eine Riemannsche Metrik in M .

DEFINITION 4.04. (*Bogenlänge, Energie*) Ist $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Riemannscher Raum und $c : I \rightarrow M$ eine Kurve, dann sind

$$L_a^b := \int_{[a,b]} \sqrt{\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle} dt \quad \text{und} \quad E_a^b := \int_{[a,b]} \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle dt$$

die Bogenlänge und die Energie von c im Intervall $[a, b]$.

BEMERKUNG 4.05. Die Bogenlänge ist invariant unter Parametertransformationen (vgl. 1.06), die Energie nicht.

LEMMA 4.06. $L_a^b(c)^2 \leq |b - a| \cdot E_a^b(c)$ mit genau für $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = \text{const}$.

BEWEIS. Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung in einem Vektorraum V mit positiv definitem Skalarprodukt lautet $\langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle$ mit Gleichheit genau für v, w linear abhängig. Wir setzen $V = C[a, b]$, $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$, $v = 1$, $w = \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle$. Daraus folgt direkt die Behauptung. \square

SATZ 4.07. *Angenommen, es gibt eine kürzeste Verbindung c der Punkte p, q in der Klasse $\mathcal{C}_{p,q}$ der stückweise differenzierbaren Kurven mit $c(a) = p$ und $c(b) = q$ (d.h. ein Minimum von L_a^b). Dann ist o.B.d.A. $\|\dot{c}\| = \text{const}$, und ein solches c ist auch Minimum von E_a^b . Unter denselben Voraussetzungen ist jedes Minimum c' von E_a^b auch ein Minimum von L_a^b , und $\|\dot{c}'\| = \text{const}$.⁴*

Für den Beweis siehe S. 46

4.2. Zusammenhänge und die kovariante Ableitung. Wir wollen uns nun mit der Frage beschäftigen, in welcher Beziehung die Vektoren in den einzelnen Tangentialräumen einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit zueinander stehen. Wir möchten z.B. gerne die Änderung eines Vektorfeldes längs einer Kurve messen. Im euklidischen Raum steht für solche Zwecke die gewöhnliche Ableitung zur Verfügung. In der Differentialgeometrie wird stattdessen der Begriff des Zusammenhangs eingeführt, der es erlaubt, Vektorfelder abzuleiten.

DEFINITION 4.08. (*affiner Zusammenhang*) Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung, die zwei (C^r -) Vektorfeldern X, Y ein neues (C^{r-1} -) Vektorfeld $\nabla_X Y$ zuordnet, heißt affiner Zusammenhang in M , falls gilt:

- $\nabla_X Y$ ist additiv in X und in Y
- $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$ für $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.
- $\nabla_X (fY) = Xf \cdot Y + f \cdot \nabla_X Y$ (Produktregel)

BEMERKUNG 4.09. (*Christoffelsymbole*) Sei $\varphi : M \rightarrow U$ eine Karte und seien $\partial_1, \dots, \partial_n$ die dazugehörigen Basisfelder. Wir schreiben $\nabla_j := \nabla_{\partial_j}$. Dann ist

$$\nabla_j \partial_k = \Gamma_{jk}^l \partial_l.$$

Die Funktionen $\Gamma_{jk}^l : M \rightarrow \mathbb{R}$ heißen die Koeffizienten oder Christoffelsymbole des Zusammenhangs ∇ . In Koordinaten wird $\nabla_X Y$ wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} X &= x^j \partial_j, \quad Y = y^k \partial_k \\ \implies \nabla_X Y &= x^j \nabla_j (y^k \partial_k) = (x^j \partial_j y^l + x^j y^k \Gamma_{jk}^l) \partial_l, \end{aligned}$$

d.h. in den Wert von $\nabla_X Y$ in einem Punkt p geht von X nur der Wert in p ein.⁵

⁴Zur Existenz von kürzesten Verbindungen siehe 4.58. Der Schluß, dass jedes Minimum von E_a^b auch ein Minimum von L_a^b gilt auch ohne die Voraussetzung der Existenz einer kürzesten Verbindung

⁵ ∇ ist kein Tensorfeld, weil von Y nicht nur Werte, sondern auch Ableitungen eingehen.

DEFINITION 4.10. (*kovariante Ableitung*) Für ein Vektorfeld Y heißt

$$\nabla_{X_p} Y := (\nabla_X Y)_p$$

kovariante Ableitung von Y nach X_p . Ist $V(t) = v^j(t)\partial_j(c(t))$ ein Vektorfeld entlang einer Kurve $c(t)$ (d.h. $c : I \rightarrow M$ mit $V(t) \in T_{c(t)}M$ für alle $t \in I$) mit $\dot{c} = x^k\partial_k$, dann sei

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}V &= \left(\frac{dv^l}{dt} + v^k x^j \Gamma_{jk}^l \right) \partial_l, \text{ genauer} \\ \frac{D}{dt}V &= \sum_l \left(\frac{dv^l}{dt} + \sum_{k,j} v^k x^j \cdot (\Gamma_{jk}^l \circ c) \right) (\partial_l \circ c). \end{aligned}$$

Wir nennen $\frac{D}{dt}V$ die kovariante Ableitung des Vektorfelds $V(t)$ längs der Kurve c .

BEMERKUNG 4.11. Ist das Vektorfeld $V(t)$ längs der Kurve c durch Einschränken eines in der Mannigfaltigkeit definierten Vektorfeldes \tilde{V} gegeben (d.h. $V(t) = \tilde{V}_{c(t)}$), so gilt offenbar

$$\frac{D}{dt}V = \nabla_{\dot{c}(t)} \tilde{V}.$$

So ein Vektorfeld muss nicht existieren, z.B. wenn die Kurve c nicht injektiv ist.

FOLGERUNG 4.12.

$$\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{D}{dt}V + \frac{D}{dt}W, \quad \frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{D}{dt}V.$$

LEMMA 4.13. Jede beliebige Wahl der Christoffelsymbole Γ_{jk}^l definiert mittels $\nabla_X Y = (x^j\partial_j y^l + x^j y^k \cdot \Gamma_{jk}^l)\partial_l$ einen affinen Zusammenhang.

BEWEIS. Man sieht sofort $\nabla_{\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2} Y$ Skalare $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$. Zur Produktregel: $= \lambda_1 \nabla_{X_1} Y + \lambda_2 \nabla_{X_2} Y$ und $\nabla_X(\mu_1 Y_1 + \mu_2 Y_2) = \mu_1 \nabla_X Y_1 + \mu_2 \nabla_X Y_2$ für beliebige Funktionen $\lambda_1, \lambda_2 : M \rightarrow \mathbb{R}$ und $\nabla_X(fY) = (x^j\partial_j(f) y^k + x^j f \partial_j y^k + x^j f y^k \Gamma_{jk}^l)\partial_l = Xf Y + f \nabla_X Y$. \square

LEMMA 4.14. Ist $V(t)$ ein Vektorfeld längs einer konstanten Kurve $c(t) = \text{const} = p$, so stimmt $\frac{D}{dt}V$ überein mit der gewöhnlichen Ableitung von $V(t)$ im Vektorraum $T_p M$.

BEWEIS. Mit $V = v^l(\partial_l)_p$ gilt wegen $x^k = 0$ nun $\frac{D}{dt}V = \dot{v}^l \partial_l$. \square

BEISPIEL 4.15. (*flacher Zusammenhang*) Ist M offene Teilmenge des \mathbb{R}^n und verwenden wir die identische Funktion als lokale Parametrisierung, so wird durch $\Gamma_{jk}^l = \text{const.} = 0$, der flache Zusammenhang definiert. Dann ist $\frac{D}{dt}V = \frac{d}{dt}V$.

BEISPIEL 4.16. (*induzierter Zusammenhang*) Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine TMF, $p \in M$, so ist $v \in T_p \mathbb{R}^n$ zerlegbar in einen Tangential- und einen Normalanteil: $v = v^{\text{tang}} + v^{\text{norm}}$ mit $v^{\text{tang}} \in T_p M$ und $v^{\text{norm}} \perp T_p M$. Wir möchten gerne einen Zusammenhang definieren, für den die kovariante Ableitung gleich dem Tangentialanteil der gewöhnlichen Ableitung von $V(t)$ im umgebenden \mathbb{R}^m ist:

$$\frac{D}{dt}V = \left(\frac{dV}{dt} \right)^{\text{tang}} \in T_{c(t)}M.$$

Wir berechnen die Koeffizienten Γ_{jk}^l bezüglich einer lokalen Parametrisierung $g : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow M$:

$$\nabla_j \partial_k = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^j \partial u^k} \right)^{\text{tang}} = \Gamma_{jk}^l \partial_l,$$

Der durch diese Koeffizienten definierte Zusammenhang ∇ heißt der vom \mathbb{R}^n in der TMF induzierte Zusammenhang. Wir verifizieren, dass tatsächlich obige Gleichung gilt. Sei $c : I \rightarrow M$ mit $\dot{c} = x^k \partial_k \circ c$ und $V = v^l \partial_l \circ c$. Dann ist

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} V \right)^{\text{tang}} &= \left(\dot{v}^l \partial_l \circ c + v^k \frac{d}{dt} (\partial_k \circ c) \right)^{\text{tang}} \\ &= \dot{v}^l (\partial_l \circ c) + v^k \left(x^j \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \partial_k \right) \circ c \right)^{\text{tang}} \\ &= \dot{v}^l (\partial_l \circ c) + v^k x^j (\Gamma_{jk}^l \circ c) (\partial_l \circ c) = \frac{D}{dt} V \end{aligned}$$

DEFINITION 4.17. (*symmetrischer Zusammenhang*) Der Zusammenhang ∇ heißt symmetrisch, wenn $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.

LEMMA 4.18. *Ein Zusammenhang ist genau dann symmetrisch, wenn für seine Koeffizientenfunktionen gilt $\Gamma_{jk}^l = \Gamma_{kj}^l$.*

BEWEIS. Sei ∇ symmetrisch. Dann gilt $[\partial_j, \partial_k] = 0$, also $\nabla_j \partial_k = \nabla_k \partial_j$. Umgekehrt berechnen wir $\nabla_X Y - \nabla_Y X = (x^j \partial_j y^l + x^j y^k \Gamma_{jk}^l) \partial_l - (y^j \partial_j x^l + y^j x^k \Gamma_{jk}^l) \partial_l = [X, Y]$ (wobei die Terme mit den Γ_{jk}^l einander aufgrund der Symmetrie wegheben). \square

LEMMA 4.19. *Der induzierte Zusammenhang ist symmetrisch.*

BEWEIS. Ist $g : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung, so ist

$$\nabla_j \partial_k = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^j \partial u^k} \right)^{\text{tang}} = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^k \partial u^j} \right)^{\text{tang}} = \nabla_k \partial_j \Rightarrow \Gamma_{jk}^l = \Gamma_{kj}^l \quad \square$$

LEMMA 4.20. *Ist ∇ symmetrisch, dann gilt für jede C^2 -Abbildung $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M$, $(u, v) \mapsto f(u, v)$:*

$$\frac{D}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) = \frac{D}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right).$$

BEWEIS. Sei $\varphi : M \rightarrow U$ eine Karte, $\partial_1, \dots, \partial_n$ Basisfelder und $\tilde{f} = \varphi \circ f$ die Koordinatendarstellung von φ . Dann hat $\frac{\partial f}{\partial u}$ die Koordinaten $(\frac{\partial \tilde{f}^1}{\partial u}, \dots, \frac{\partial \tilde{f}^n}{\partial u})$, und es gilt:

$$\frac{D}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial u} = \left(\frac{\partial^2 \tilde{f}^l}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \tilde{f}^j}{\partial u} \frac{\partial \tilde{f}^k}{\partial v} \Gamma_{jk}^l \right) \partial_l = \frac{D}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v}. \quad \square$$

4.3. Geodätische Parallelverschiebung.

DEFINITION 4.21. (*Parallelverschiebung*) Ist V ein stetiges Vektorfeld längs einer stückweise stetig differenzierbaren Kurve c mit $\frac{D}{dt} V = 0$ für jedes stetig differenzierbare Segment von c , dann heißt V Parallelfeld längs c .

BEMERKUNG 4.22. Anschaulich bedeutet $\frac{D}{dt}V = 0$, dass sich der Vektor $V(t)$ für den Beobachter an der Stelle $c(t)$ auf der Fläche ‘nicht ändert’. Ist ∇ der induzierte Zusammenhang, dann heißt $\frac{D}{dt}V = 0$, dass der Tangentialanteil von $\frac{d}{dt}V$ verschwindet, d.h. die Änderung von V senkrecht auf die Fläche steht.

SATZ 4.23. Ist $p \in M$, $V_p \in T_pM$, $c : I \rightarrow M$ mit $c(0) = p$, so existiert genau ein Vektorfeld $V(t)$ längs c mit $V(0) = V_p$, das ein Parallelfeld ist.

BEWEIS. Es genügt, die Behauptung für alle C^1 -Segmente von c zu beweisen, die vollständig in einer Koordinatenumgebung liegen. Der allgemeine Fall folgt dann durch mehrmaliges Anwenden des Spezialfalles. In Koordinaten gilt:

$$V(t) \text{ ist Parallelfeld} \iff \frac{d}{dt}v^l + \Gamma_{jk}^l x^j v^k = 0.$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung für $V(t)$ und hat bei gegebenem Anfangswert $V(0)$ eine eindeutige Lösung für alle t . \square

DEFINITION 4.24. (*geodätische Parallelverschiebung*) Sei $V_p \in T_pM$ und $c : I \rightarrow M$ eine Kurve mit $c(a) = p$. Es existiert ein eindeutiges Parallelfeld $V(t)$ längs c mit $V(a) = V_p$. Die Abbildung

$$\text{Pt}_a^b(c) : T_{c(a)}M \rightarrow T_{c(b)}M \quad V(a) \mapsto V(b)$$

heißt geodätische Parallelverschiebung bzw. Paralleltransport von a nach b längs c .

LEMMA 4.25. $\text{Pt}_u^b(c)$ ist ein linearer Vektorraumisomorphismus mit den folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \text{Pt}_v^w(c) \circ \text{Pt}_u^v(c) &= \text{Pt}_u^w(c) \\ \text{Pt}_v^u \circ \text{Pt}_u^v(c) &= \text{Pt}_u^u(c) = \text{id}. \end{aligned}$$

BEWEIS. Die Lösung einer linearen Differentialgleichung hängt linear von den Anfangswerten ab, was die Linearität von Pt_u^v für eine Kurve zeigt, die innerhalb einer Koordinatenumgebung liegt. Durch Iteration erreicht man so beliebige Punkte $c(t)$. Die Aussage über die Verkettung ist klar aus der Definition. \square

LEMMA 4.26. Der Paralleltransport längs einer Kurve ist unabhängig von Parametertransformationen, d.h. $\text{Pt}_a^b(c \circ \gamma) = \text{Pt}_{\gamma(a)}^{\gamma(b)}(c)$.

BEWEIS. Mit $\dot{c} = x^j \partial_j$ gilt $\frac{DV}{dt} = \left(\frac{dv^l}{dt} + x^j v^k \Gamma_{jk}^l \circ c\right) \partial_l$, $\frac{DV \circ \gamma}{dt} = \left(\frac{dv^l \circ \gamma}{dt} \dot{\gamma} + (x^j \circ \gamma) \cdot \dot{\gamma} \cdot v^k \cdot (\Gamma_{jk}^l \circ c \circ \gamma)\right) \partial_l$. Diese beiden Gleichungen ergeben

$$\dot{\gamma}(u) \frac{DV}{dt} \Big|_{t=\gamma(u)} = \frac{D(V \circ \gamma)}{du}.$$

Wegen $\dot{\gamma} \neq 0$ ist nun $DV/dt = 0$ äquivalent zu $D(V \circ \gamma)/du = 0$. \square

Es gibt noch einen weiteren, direkten, Zusammenhang zwischen geodätischer Parallelverschiebung und der kovarianten Ableitung:

LEMMA 4.27. Ist $X(t)$ ein Vektorfeld längs der Kurve $c(t)$, so ist

$$\frac{DX}{dt}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\text{Pt}_t^0(c) X(t) - X(0) \right)$$

BEWEIS. Sei E_1, \dots, E_n eine Basis von $T_{c(0)}M$ und $E_1(t), \dots, E_n(t)$ die durch geodätische Parallelverschiebung entstehenden Basis von $T_{c(t)}M$. Sei ferner $X(t) = x^i(t)E_i(t)$. Pt_t^0 ist eine lineare Abbildung, also ist $\text{Pt}_t^0(c)(X(t)) = x^i(t)E_i(0)$. Wir leiten ab:

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}X &= \dot{x}^i(t)E_i + x^i(t) \underbrace{\frac{D}{dt}E_i}_{=0} \\ \implies \frac{D}{dt}X(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x^i(t) - x^i(0)}{t} E_i(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{Pt}_t^0(c)X(t) - X(0)}{t}. \quad \square \end{aligned}$$

DEFINITION 4.28. (*Holonomiegruppe*) Sei \mathcal{C}_p^M die Menge aller stückweise glatten Kurven $c : [0, 1] \rightarrow M$ mit $c(0) = c(1) = p$. Sei \mathcal{U}_p das System der offenen Umgebungen von p . Dann heißen

$$H_p := \{\text{Pt}_0^1(c) \mid c \in \mathcal{C}_p^M\} \quad \text{und} \quad H_p^\infty := \bigcap_{U \in \mathcal{U}_p} \{\text{Pt}_0^1(c) \mid c \in \mathcal{C}_p^U\}$$

die Holonomiegruppe bzw. die lokale Holonomiegruppe von p .

SATZ 4.29. Sind $p, q \in M$ und ist $c : [0, 1] \rightarrow M$ eine stückweise glatte Kurve mit $c(0) = p$ und $c(1) = q$, so ist $H_p = \text{Pt}_0^1(c)^{-1} \circ H_q \circ \text{Pt}_0^1(c)$, d.h. die Holonomiegruppen von Punkten derselben Zusammenhangskomponente von M sind zueinander konjugiert.

BEWEIS. Sei $\bar{c} \in \mathcal{C}_q^M$. Dann ist $c + \bar{c} + c^{-1} \in \mathcal{C}_p^M$, wobei $c + \bar{c} + c^{-1}$ den Weg symbolisiert, der entsteht, wenn man zuerst c von p nach q durchläuft, dann den Weg \bar{c} , und anschließend auf c durch Umkehrung des Weges von q nach p zurückläuft, und abschließend noch eine Parametertransformation durchführt, sodass der entstehende Weg in $[0, 1]$ definiert ist. Ebenso folgt aus $\tilde{c} \in H_p$, dass $c^{-1} + \tilde{c} + c \in H_q$. \square

4.4. **Riemannsche Zusammenhänge.** Man möchte gerne, dass der Paralleltransport von Vektoren längs einer Kurve in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit Längen und Winkel nicht ändert:

DEFINITION 4.30. (*Riemannscher Zusammenhang*) ∇ heißt Riemannscher Zusammenhang, wenn der Paralleltransport längs einer Kurve eine isometrische lineare Abbildung ist, dass also für alle $c : I \rightarrow M$ und für alle $v \in T_{c(a)}M$ gilt, dass $\|\text{Pt}_a^b(c)v\| = \|v\|$.

LEMMA 4.31. Die folgenden vier Aussagen sind äquivalent:

- (1) ∇ ist ein Riemannscher Zusammenhang
- (2) $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$ (Produktregel).
- (3) $\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \langle \frac{D}{dt}V, W \rangle + \langle V, \frac{D}{dt}W \rangle$ für alle Vektorfelder $V(t), W(t)$ längs derselben Kurve (Produktregel).
- (4) Für eine Parametrisierung gilt $\partial_k g_{jl} = \Gamma_{kj}^i g_{il} + \Gamma_{kl}^i g_{ji}$.

BEWEIS. (1) \implies (3): Sei $E_{1,p}, \dots, E_{n,p}$ eine Orthonormalbasis in $T_p M$ für $c(0) = p$ und $E_i(t)$ ein Parallelfeld längs c mit $E_i(0) = E_{i,p}$. Dann ist $E_1(t), \dots, E_n(t)$ eine Orthonormalbasis in $T_{c(t)}M$. Wir setzen $V = v^j E_j$, $W = w^j E_j$ und berechnen $\langle V, W \rangle = \langle v^j E_j, w^j E_j \rangle = \sum_{j=1}^n v^j w^j$. Dann

ist

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}V &= \dot{v}^j E_j + v^j \frac{D}{dt}E_j \quad \text{analog} \quad \frac{D}{dt}W = \dot{w}^j E_j, \quad \implies \\ \frac{d}{dt}\langle V, W \rangle &= \sum_{j=1}^n (\dot{v}^j w^j + v^j \dot{w}^j) = \left\langle \frac{D}{dt}V, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{D}{dt}W \right\rangle \end{aligned}$$

(3) \implies (1) Sei V ein Parallelfeld längs einer Kurve. Zu zeigen ist, dass $\|V\|$ konstant ist — dann ist Pt_0^t eine Isometrie: $\frac{d}{dt}\langle V, V \rangle = \left\langle \frac{D}{dt}V, V \right\rangle + \left\langle V, \frac{D}{dt}V \right\rangle = \langle 0, V \rangle + \langle V, 0 \rangle = 0$.

(3) \iff (4): Wir schreiben $\dot{c} = \sum_j x^j \partial_j \circ c$, $V = \sum_j v^j \partial_j \circ c$, $W = \sum_j w^j \partial_j \circ c$ und setzen in beide Seiten von (3) ein:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle V, W \rangle &= \frac{d}{dt}(v^j w^l g_{jl} \circ c) \\ &= (\dot{v}^j w^l + v^j \dot{w}^l) g_{jl} \circ c + v^j w^l x^k (\partial_k g_{jl}) \circ c \\ \left\langle \frac{D}{dt}V, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{D}{dt}W \right\rangle &= (v^i + v^j x^k \Gamma_{kj}^i \circ c) w^l g_{il} \circ c \\ &\quad + (\dot{w}^i + w^l x^k \Gamma_{kl}^i \circ c) v^j g_{ji} \circ c \end{aligned}$$

Offenbar ist (4) notwendig und hinreichend für die allgemeine Gültigkeit von (3).

(3) \implies (2): Um (2) für einen beliebigen Punkt p nachzuweisen, wählen eine Kurve c mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = X_p$. Dann geht (2) in (3) über.

(2) \implies (4): Wir setzen $X = \partial_k, Y = \partial_j, Z = \partial_l$ und erhalten $\partial_k g_{jl} = \langle \Gamma_{kj}^i \partial_i, \partial_l \rangle + \langle \partial_j, \Gamma_{kl}^i \partial_i \rangle = \Gamma_{kj}^i g_{il} + \Gamma_{kl}^i g_{ji}$. \square

LEMMA 4.32. *Der induzierte Zusammenhang in einer Teilmannigfaltigkeit ist ein Riemannscher Zusammenhang.*

BEWEIS. Sei $c : I \rightarrow M$ eine Kurve und V ein Parallelfeld längs c , d.h. $(\frac{d}{dt}V)^{\text{tang}} = 0$. Z.z. ist $\langle V, V \rangle = \text{const}$. Wir berechnen also $\frac{d}{dt}\langle V, V \rangle = 2\langle V, \frac{d}{dt}V \rangle = 2\langle V, (\frac{d}{dt}V)^{\text{tang}} \rangle = 0$. \square

SATZ 4.33. *(Der Levi-Civita-Zusammenhang) In einem Riemannschen Raum existiert genau ein symmetrischer Riemannscher Zusammenhang.*

BEWEIS. Wir verwenden Koordinaten bezüglich einer Karte und berechnen ähnlich zu (2) \implies (4) im Beweis von 4.31:

$$\begin{aligned} \partial_i g_{jk} &= \partial_i \langle \partial_j, \partial_k \rangle = \langle \underline{\nabla}_i \partial_j, \partial_k \rangle + \langle \partial_j, \underline{\nabla}_i \partial_k \rangle, \\ \partial_j \langle \partial_k, \partial_i \rangle &= \langle \underline{\nabla}_j \partial_k, \partial_i \rangle + \langle \partial_k, \underline{\nabla}_j \partial_i \rangle, \\ \partial_k \langle \partial_i, \partial_j \rangle &= \langle \underline{\nabla}_k \partial_i, \partial_j \rangle + \langle \partial_i, \underline{\nabla}_k \partial_j \rangle. \end{aligned}$$

Man beachte, dass die unterstrichenen Ausdrücke gleich sind. Wir erhalten

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(\partial_i \langle \partial_j, \partial_k \rangle + \partial_j \langle \partial_k, \partial_i \rangle - \partial_k \langle \partial_i, \partial_j \rangle) \\ &= \langle \underline{\nabla}_i \partial_j, \partial_k \rangle = \langle \Gamma_{ij}^l \partial_l, \partial_k \rangle = \Gamma_{ij}^l g_{lk} \\ \implies \Gamma_{ij}^l &= g^{lk} \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}). \end{aligned}$$

D.h. die Koeffizienten Γ_{jk}^l von ∇ sind durch die Koeffizienten g_{jk} der Metrik bestimmt. Umgekehrt können wir die obige Formel zur Definition eines Zusammenhanges ∇ benützen. Die Symmetrie von ∇ folgt aus

$\Gamma_{jk}^l = \Gamma_{kj}^l$. Die Relation (4) von 4.31 folgt direkt aus der Definition der Γ_{jk}^l , d.h. ∇ ist Riemannsch. \square

BEMERKUNG 4.34. (*geodätische Krümmung*) Für den induzierten Zusammenhang einer $(n-1)$ -dimensionalen TMF $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine Kurve $c : I \rightarrow M$ haben wir mit $v = \|\dot{c}\|$, $e_1 = \dot{c}/v$, $\dot{e}_1 = v\kappa_1 e_2 = v(\kappa_n n + \kappa_g m)$, $m \in T_p M$ mit $\|m\| = 1$:

$$\frac{D}{dt}c_1 = v\kappa_g m, \quad \left\| \frac{D}{dt}c_1 \right\| = v\kappa_g.$$

DEFINITION 4.35. (*geodätische Krümmung*) In einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist die geodätische Krümmung einer Kurve $c : I \rightarrow M$ definiert durch

$$\kappa_g := \left\| \frac{D}{dt}c_1 \right\| / \|\dot{c}\|.$$

BEMERKUNG 4.36. Der induzierte Zusammenhang $\frac{D}{dt}V = \left(\frac{d}{dt}V\right)^{\text{tang}}$ ist nach dem Satz von Levi-Civita durch die Metrik allein bestimmt. Alle Größen, die sich durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und ∇ darstellen lassen, sind nur von der Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ abhängig.

Insbesondere ist die geodätische Krümmung κ_g einer Kurve eine solche ‘Größe der inneren Geometrie’, was aus der früheren Definition nicht ersichtlich war.

4.5. Geodätische Linien. Wir betrachten ab jetzt nur mehr Riemannsche und symmetrische Zusammenhänge.

DEFINITION 4.37. (*geodätische Linien*) Eine Kurve c mit $\frac{D}{dt}\dot{c} = 0$ heißt geodätische Linie.

FOLGERUNG 4.38. Für eine geodätische Linie gilt $\|\dot{c}\| = \text{const.}$, denn das Tangential-Vektorfeld von c ist ein Parallelfeld längs c . Weiters ist $\kappa_g = 0$.

FOLGERUNG 4.39. Die Koordinatendarstellung $\tilde{c}(t)$ einer geodätischen Linie erfüllt die Differentialgleichung

$$\tilde{c} = (x^1(t), \dots, x^n(t)) \implies \ddot{x}^l + \Gamma_{jk}^l \dot{x}^j \dot{x}^k = 0 \quad (l = 1, \dots, n)$$

Umparametrisieren einer geodätischen Linie mittels $\bar{c}(t) = c(\lambda t)$ erzeugt wieder eine geodätische Linie.

BEWEIS. Wir setzen $\check{c} = (\dot{x}^1, \dots)$. Die Koordinatendarstellung der kovarianten Ableitung von \dot{c} lautet

$$(\ddot{x}^l + \Gamma_{jk}^l \dot{x}^j \dot{x}^k) \partial_l.$$

Daraus folgt die erste Aussage. Die zweite folgt direkt aus der Tatsache, dass die Koordinatendarstellung $(\bar{x}^1, \dots) = (x^1(\lambda t), \dots)$ von \bar{c} ebenfalls die Gleichung erfüllen. \square

LEMMA 4.40. Für jedes $p \in M$ existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Umgebung U von p , sodass für $q \in U$, $\|v\| < \varepsilon$ und $|t| < 2$ die geodätische Linie $c(t)$ mit $c(0) = q$ und $\dot{c}(0) = v$ definiert ist.

BEWEIS. Aus Satz A.21 folgt, dass es δ_1 , δ_2 , und eine offene Umgebung U von q gibt, sodass die geodätische Linie $c_1(t)$ mit Startwerten (q, v_1) mit $q \in U, \|v_1\| < \delta_1$ im Intervall $(-\delta_2, \delta_2)$ definiert ist. Wählen wir nun $\varepsilon < \delta_1 \delta_2 / 2$, so ist nach dem 1. Ergebnis die geodätische Linie $c_2(t)$ mit Startwerten (q, v) mit $\|v\| < \varepsilon$ im Intervall $(-2, 2)$ definiert, denn mit $v = v' \delta_2$ gilt $c_2(t) = c_1(\delta_2 t)$. \square

DEFINITION 4.41. (*Exponentialabbildung*) Die Abbildung \exp_p aus $T_p M$ in M ordnet einem Tangentialvektor v den Punkt $c(1)$ der geodätischen Linie c mit $c(0) = p, \dot{c}(0) = v$ zu, sofern diese geodätische Linie im Intervall $[0, t]$ definiert ist.

FOLGERUNG 4.42. Für die geodätische Linie $c(t)$ mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = v$ gilt $c(t) = \exp_p(tv)$.

Für jedes $p \in M$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $\exp_p(v)$ für $\|v\| < \varepsilon$ sicher definiert ist.

LEMMA 4.43. Lokal um $(p, 0)$ ist \exp_p ein Diffeomorphismus aus $T_p M$ nach M . Identifizieren wir $T_p M$ mit seinem Tangentialvektorraum bei 0, so ist das Differential der Exponentialabbildung bei 0 die Identität:

$$(d \exp_p)_0 : T_p M \rightarrow T_p M; \quad (d \exp_p)_0(v) = v.$$

BEWEIS. Wir greifen auf die Definition von ‘Differential’ zurück. Um $(d \exp_p)_0(v)$ zu bestimmen, wählen wir eine Kurve $d(t)$ in $T_p M$ mit $d(0) = 0$ und $\dot{d}(0) = v$ (z.B. $d(t) = tv$) und leiten die Bildkurve $\exp_p(d(t)) = \exp_p(tv)$ bei $t = 0$ ab. Jene ist genau die geodätische Linie $c(t)$ mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = v$, also ist

$$(d \exp_p)_0(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp_p(tv) = v.$$

Demnach ist $(d \exp_p)_0 = \text{id}_{T_p M}$, und nach dem Satz über die Umkehrfunktion ist \exp_p lokal um 0 ein Diffeomorphismus. \square

SATZ 4.44. Für alle $x \in M$ existiert eine Umgebung $U \subseteq M$ mit $x \in U$, so dass je zwei Punkte $p, q \in U$ durch eine geodätische Linie $c(t)$ mit $c(0) = p, c(1) = q$ verbunden werden können, und so, dass die Anfangswerte $c(0)$ und $\dot{c}(0)$ in differenzierbarer Weise von den Randwerten $c(0) = p, c(1) = q$ abhängen.

BEWEIS. Wir betrachten die Abbildung $F : TM \rightarrow M \times M, (p, v) \mapsto (p, \exp_p(v))$, d.h. die Abbildung ‘Anfangswerte \mapsto Randwerte’ einer geodätischen Linie.

Zu zeigen ist, dass F^{-1} existiert und differenzierbar ist. Wir verwenden eine Karte φ :

$$\begin{array}{ccc} (p, v) & \xrightarrow{F} & (p, \exp_p(v)) \\ d\varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \times \varphi \\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\tilde{F}} & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \end{array}$$

und bestimmen die Matrizen von $d\tilde{F}_{(p,0)}$ (mit der Notation $\widetilde{\exp}_p = \varphi \circ \exp_p \circ d\varphi_p^{-1}$):

$$\begin{aligned} d\tilde{F}_{(0,0)} &= \begin{bmatrix} \text{id}_{\mathbb{R}^n} & 0 \\ \text{id}_{\mathbb{R}^n} & (d\widetilde{\exp}_p)_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \text{id}_{\mathbb{R}^n} & 0 \\ \text{id}_{\mathbb{R}^n} & \text{id}_{\mathbb{R}^n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Demnach ist \tilde{F} ein lokaler Diffeomorphismus und es existiert ein $\tilde{W} \subseteq \mathbb{R}^n$, sodass $\tilde{W} \times \tilde{W}$ eine offene Umgebung von $\varphi \times \varphi(F(x, 0))$ und \tilde{F}^{-1} in $\tilde{W} \times \tilde{W}$ ein Diffeomorphismus ist. Setze dann $U = \varphi^{-1}(\tilde{W})$. \square

DEFINITION 4.45. (*geodätische Sphäre*) Die Menge $\exp_p(r S^{n-1})$ heißt geodätische Sphäre vom Radius r um den Punkt p .

SATZ 4.46. (*Lemma von Gauß*) Die geodätischen Sphären sind für alle Radien orthogonal zu den vom Mittelpunkt ausgehenden geodätischen Linien.

BEWEIS. Sei $v(t) \in T_p M$, mit $\|v(t)\| = 1$, d.h. $v(t)$ ist eine Kurve in der Einheitssphäre $S^{n-1} \subseteq T_p M$. Sei $f(r, t) = \exp_p(r v(t))$. Die Kurven $t = \text{const}$ sind geodätische Linien, also ist $\frac{D}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial r} = 0$. Weiters hat der Ableitungsvektor der radialen geodätischen Linien konstanten Betrag:

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r} \right\rangle = 1 \implies \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r} \right\rangle = 0$$

Zu zeigen ist das Verschwinden von $\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle$. Wir zeigen vorerst nur dass dieser Wert unabhängig von r ist:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{D}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{D}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = 0$$

Bei $r = 0$ können wir das gesuchte Skalarprodukt auswerten:

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \Big|_{r=0} = 0$$

wegen $f(0, t) = p = \text{const}$. \square

LEMMA 4.47. Sei $c(t) = \exp_p(r(t)v(t))$ mit $\|v(t)\| = 1$ und $r(t) > 0$, d.h. c ist eine Kurve mit 'geodätischen Polarkoordinaten' $r(t)$, $v(t)$. In einer Umgebung von p gilt

$$L_a^b(c) \geq |r(b) - r(a)|$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $v(t) = \text{const}$. und $r(t)$ monoton (d.h. die Kurve ist bis auf Umparametrisieren eine geodätische Linie).

BEWEIS. Sei $f(r, t) = \exp_p(r \cdot v(t))$. Dann gilt

$$c(t) = f(r(t), t), \quad \dot{c}(t) = \dot{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r} \right\rangle = 1.$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned} L_a^b(c) &= \int_a^b \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle^{\frac{1}{2}} dt = \int_a^b |\dot{r}| \left(\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ &\geq \int_a^b |\dot{r}| dt \geq \left| \int_a^b \dot{r} dt \right| = |r(b) - r(a)|, \end{aligned}$$

wobei Gleichheit genau dann auftritt, wenn $\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = 0$ und \dot{r} keinen Vorzeichenwechsel besitzt, d.h. genau dann, wenn $v(t) = \text{const}$ und $r(t)$ monoton wachsend ist. \square

BEMERKUNG 4.48. Der obige Satz gilt offenbar auch für stückweise stetig differenzierbare r, v .

SATZ 4.49. Für alle $p \in M$ existiert eine Umgebung $W \subseteq M$, so dass es für alle $q, r \in W$ eine eindeutige kürzeste Verbindung gibt. Diese ist eine von q, r in differenzierbarer Weise abhängige geodätische Linie.

BEWEIS. Wir betrachten eine Umgebung \overline{W} von p , wo nach 4.44 für alle $q, r \in \overline{W}$ die geodätische Linie $\exp_q(tv)$ mit $v = \exp_q^{-1}(r)$ in differenzierbarer Art und Weise von q und r abhängt.

Wähle nun eine Umgebung $W \subseteq \overline{W}$ so klein, dass ein δ existiert, so dass $\exp_q(v)$ für $\|v\| < \delta$ sicher definiert ist, und dass $W \subseteq \exp_p(\{v \in T_p M \mid \|v\| < \delta/2\})$. Nach Konstruktion ist die Entfernung jedes Punktes von W bis $p \leq \delta/2$, d.h. die Entfernung von je 2 Punkten in W ist $< \delta$.

Jede von q ausgehende Kurve hat anfangs die Form $c(t) = \exp_q(\rho(t)v(t))$ (zumindest solange $\rho(t) < \delta$). Dann ist nach 4.47 $L_0^t(c) \geq |\rho(t)|$ solange $\rho(t) < \delta$, ansonsten $L_0^t(c) \geq \delta$, denn jede Kurve muss anfangs die \exp_q -Bilder der konzentrischen Kugeln $\rho \cdot S^{n-1}$ in $T_q M$ überqueren.

Nachdem je 2 Punkte q, r von W durch eine Kurve der Länge $< \delta$ verbunden werden können, diese Kurven daher ganz von der obigen Form sind, kann man wieder 4.47 anwenden: Die kürzeste Verbindung von p nach q ist die oben erwähnte radiale geodätische Linie, und man hat $d(p, q) = \|\exp_q^{-1}(r)\|$. \square

SATZ 4.50. *Gibt es eine kürzeste Verbindung von zwei Punkten $p, q \in M$ in der Klasse der stückweise differenzierbaren Kurven, so ist diese (i) glatt und (ii) eine geodätische Linie.*

BEWEIS. Eine solche kürzeste Verbindung muss zwischen je zwei ihrer Punkte die kürzeste Verbindung sein. Nach 4.49 ist sie zwischen 2 genügend nahen Punkten differenzierbar und eine geodätische Linie. \square

BEMERKUNG 4.51. "Lange" geodätische Linien müssen keine kürzesten Verbindungen sein. Vgl. 5.27.

4.6. Die erste Variation der Energie einer Kurve.

DEFINITION 4.52. (*erste Variation der Energie, kritischer Punkt*) Sei c_u eine differenzierbare Schar von stückweise stetig differenzierbaren Kurven, die alle im gemeinsamen Intervall $[0, 1]$ definiert sind und durch die Punkte $c_u(0) = p$, $c_u(1) = q$ gehen. Dann heißt

$$\left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} E_0^1(c_u)$$

die erste Variation der Energie der Schar c_u . c ist kritischer Punkt des Funktionals E , wenn für alle Variationen c_u mit $c_0 = c$ die erste Variation der Energie verschwindet.

LEMMA 4.53. *Für eine stückweise C^2 -Kurve $c : [0, 1] \rightarrow M$ seien $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$ die Stellen, wo c nicht C^2 ist. Dann bezeichnen wir mit $\dot{c}^+(t_i)$ und $\dot{c}^-(t_i)$ den links- und den rechtsseitigen Grenzwert von \dot{c} . Sei c_u eine Schar, die c fortsetzt, mit dem Variationsvektorfeld*

$$V(t) = \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} c_u(t)$$

Dann gilt

$$\frac{1}{2} \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} E_0^1(c_u) = - \int_0^1 \left\langle V, \frac{D}{dt} \dot{c} \right\rangle dt - \sum_{i=1}^n \left\langle V(t_i), \dot{c}^+(t_i) - \dot{c}^-(t_i) \right\rangle.$$

BEWEIS. Differentiation von $E = \int \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle dt$ ergibt $\frac{dE}{du} = \int \frac{\partial}{\partial u} \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle dt$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle &= 2 \left\langle \frac{D}{\partial u} \frac{\partial c_u}{\partial t}, \frac{\partial c_u}{\partial t} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial c_u}{\partial u}, \frac{\partial c_u}{\partial t} \right\rangle \\ \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial c_u}{\partial u}, \frac{\partial c_u}{\partial t} \right\rangle &= \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial c_u}{\partial u}, \frac{\partial c_u}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial c_u}{\partial u}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial c_u}{\partial t} \right\rangle \\ \implies \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\partial}{\partial u} \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle dt &= \left\langle \frac{\partial c_u}{\partial u}, \frac{\partial c_u}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t_i, u=0}^{t_{i+1}} - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\partial c_u}{\partial u}, \frac{D}{dt} \dot{c} \right\rangle \Big|_{u=0} dt. \end{aligned}$$

Summation über $i = 0, \dots, n-1$ liefert die Behauptung. \square

SATZ 4.54. *Die kritischen Punkte für das Energiefunktional in der Klasse der stückweise C^2 -Kurven, die zwei Punkte miteinander verbinden, sind genau die geodätischen Linien (d.h. sie erfüllen die Gleichung $\frac{D}{dt} \dot{c} = 0$ und sich durchwegs C^2).*

BEWEIS. Sei c eine stückweise C^2 -Kurve, die p mit q verbindet. Für jedes beliebige Variationsvektorfeld V lässt sich eine dazugehörige Schar finden, z.B. durch $c_u(t) = \exp_{c(t)}(u \cdot V(t))$. Für geodätische Linien verschwindet die Variation der Energie, wie direkt aus 4.53 folgt.

Sei umgekehrt c ein kritischer Punkt des Energiefunktionals und seien $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$ die Stellen, wo c nicht C^2 ist. Wir müssen zeigen, dass $D\dot{c}/dt = 0$ gilt. Wähle zu diesem Zweck eine nichtnegative Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit Nullstellen genau in den Punkten t_i und setze $V = f \cdot D\dot{c}/dt$. Wir erhalten

$$\frac{dE}{du} \Big|_{u=0} = - \int_0^1 f(t) \left\langle \frac{D}{dt} \dot{c}, \frac{D}{dt} \dot{c} \right\rangle dt = 0 \implies \frac{D}{dt} \dot{c} = 0.$$

Um zu zeigen, dass \dot{c} keine Sprungstellen aufweist, wähle V so, dass an den Stellen t_i die Gleichung $V = \dot{c}^+ - \dot{c}^-$ gilt, ansonsten beliebig. Wir erhalten

$$\frac{dE}{du} \Big|_{u=0} = - \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle \dot{c}^+(t_i) - \dot{c}^-(t_{i+1}), \dot{c}^+(t_i) - \dot{c}^-(t_{i+1}) \right\rangle = 0$$

Es folgt $\dot{c}^+ = \dot{c}^-$ überall. Nachdem geodätische Linien durch Wert und Ableitungsvektor an 1 Stelle eindeutig bestimmt sind ist c eine durchgehende geodätische Linie. \square

4.7. Vollständigkeit.

LEMMA 4.55. *Wir verwenden die Definition des Abstandes $d(p, q)$ von zwei Punkten in 1.59 auch für Riemmansche Mannigfaltigkeiten M . Falls M zusammenhängend ist, ist (M, d) ein metrischer Raum.*

BEWEIS. Symmetrie und die Dreiecksungleichung sind klar. Die Implikation $d(p, q) \implies p = q$ folgt aus 4.47, denn alle Kurven von p nach q müssen die kleinen geodätischen Sphären um p durchqueren. \square

LEMMA 4.56. *Die Topologie von M stimmt der von der Metrik induzierten überein.*

BEWEIS. Wir überdecken M durch Karten \exp_p für alle $p \in M$. Eine Basis der Topologie von M sind alle φ_i -Urbilder von $B(0, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\varepsilon < \varepsilon_p^0$. Eine Basis der metrischen Topologie sind alle $B(p, \varepsilon) \subseteq M$ im Sinne der Metrik für $\varepsilon < \varepsilon_p^1$. Wegen 4.47 sind diese Mengen für geeignet gewählte $\varepsilon_p^0 = \varepsilon_p^1$ dieselben. \square

DEFINITION 4.57. (*geodätisch vollständig*) (M, d) heißt geodätisch vollständig, falls jede geodätische Linie beliebig weit fortsetzbar ist (dann ist insbesondere \exp_p für alle $v \in T_p M$ definiert).

Wir kommen nun zu einem grundlegenden Satz betreffend die Vollständigkeit von Riemannschen Räumen. Seine Aussage ist die Äquivalenz von drei Eigenschaften eines Riemannschen Raumes $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, von denen sich eine auf M als metrischen Raum, die zweite auf Riemannsche Geometrie, und die dritte auf die Topologie von M bezieht.

SATZ 4.58. (*Satz von Hopf und Rinow*) Sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Riemannscher Raum mit der oben definierten Metrik d . Von den folgenden vier Eigenschaften

- (i) (M, d) ist ein vollständiger metrischer Raum
- (ii) $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist geodätisch vollständig
- (iii) M hat die Heine-Borel-Eigenschaft
- (iv) Je zwei Punkte $p, q \in M$ können durch eine minimale geodätische Linie verbunden werden

sind (i)–(iii) äquivalent und implizieren (iv).

BEWEIS. (ii) \implies (iv): Betrachte eine kleine geodätische Sphäre

$$S = \exp_p(\rho S^{n-1})$$

um p , und sei r der Punkt von S mit minimalem Abstand von q . Dann ist

$$\begin{aligned} R := d(p, q) &= \rho + d(S, q) = \rho + d(r, q) \\ \implies d(r, q) &= R - \rho. \end{aligned}$$

Sei $r = c(\rho)$ mit $c(t) = \exp(tv)$ (wobei $\|v\| = 1$), und $I = \{t \mid d(c(t), q) = R - t\}$. I ist abgeschlossen und $\rho \in I$. Sei $t_0 = \max I$, $p' = c(t_0)$. Wir wollen $t_0 = R$ zeigen, denn dann ist $d(c(t_0), q) = R - R = 0$ und $c(t_0) = q$, d.h. es existiert eine geodätische Linie, die p mit q verbindet, und deren Bogenlänge gleich $d(p, q)$ ist. Jedenfalls ist

$$d(p', q) = R - t_0.$$

Im Falle $t_0 < R$ seien S', ρ', r' analog zu S, ρ, r definiert, und es ist $d(p', r') = \rho'$, $d(r', q) = (R - t_0) - \rho'$ analog zu oben, und weiters ist

$$d(p, r') \leq d(p, p') + \rho' \leq t_0 + \rho'.$$

Aus $d(p, r') < t_0 + \rho'$ würde folgen, dass

$$\begin{aligned} d(p, q) &\leq d(p, r') + d(r', q) \\ &< t_0 + \rho' + R - t_0 - \rho' = R, \end{aligned}$$

d.h. es ist sogar

$$d(p, r') = t_0 + \rho'.$$

Eine Kurve der Länge $t_0 + \rho'$, die p mit r' verbindet, ist die gebrochene geodätische Linie von p über p' nach r' . Wegen 4.50 ist diese Kurve (weil kürzeste

Verbindung) eine nicht gebrochene geodätische Linie, d.h. $c(t_0 + \rho') = r'$ und $t_0 + \rho' \in I$. Das ist ein Widerspruch zu $t_0 = \max(I)$.

(i) \implies (ii): Sei $c(t)$ Geodätische und $t_0 = \sup\{t \mid c(t) \text{ definiert}\}$. Wir wollen aus $t_0 < \infty$ einen Widerspruch herleiten. Bei $t_0 < \infty$ ist $x_j := c(t_0 - 2^{-j})$ Cauchyfolge mit Limes x . Wähle eine Umgebung von x wo die geodätischen Linien die kürzesten Verbindungen sind, und $\exp_p(v)$ für $\|v\| < \delta$ jedenfalls definiert ist. Für ein x_j mit $d(x_j, x) < \delta/2$ stimmt die kürzeste Verbindung zwischen x_j und x_{j+1} mit $c(t_0 - 2^{-j} + t) = \exp_{x_j}(t \cdot v)$ überein, was jedoch auch für $t > \delta/2$ definiert ist, d.h. $c(t)$ ist auch für $t > t_0$ definiert.

(ii) \implies (iii): Sei $B \subseteq M$ beschränkt und abgeschlossen. Es existieren R, p mit $d(p, x) \leq R$ für alle $x \in B$. (ii) \implies (iv) wurde bereits gezeigt, also existieren geodätische Linien der Länge $< R$ von p nach x , d.h. $B \subseteq \exp_p(\{v \mid \|v\| \leq R\})$. Abg. Vollkugeln sind kompakt, deren stetige Bilder ebenfalls, desgleichen abgeschlossene Teilmengen von kompakten Mengen. D.h. B ist kompakt.

(iii) \implies (i): Sei x_j Cauchyfolge, und sei $|x_j - x_k| < \varepsilon$ für alle $j, k \geq n_0$. Dann ist $\{x_j \mid j \geq n_0\}$ in der kompakten Menge $\{x \mid d(x, x_{n_0}) \leq \varepsilon\}$ enthalten und hat dort nach A.50 einen Häufungspunkt, der wegen A.26 der Limes der Folge x_j ist. \square

BEISPIEL 4.59. Ist M kompakt, oder $M \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, so erfüllt M die Bedingung (iii) des Satzes von Hopf und Rinow. Dann lassen sich je zwei Punkte durch eine minimale geodätische Linie miteinander verbinden. Z.B. hat jede Fläche im \mathbb{R}^n , die durch eine implizite Gleichung $f(x) = \text{const.}$ definiert ist, diese Eigenschaft.

BEWEIS VON 4.07. Wir setzen $\Delta := |b - a|$. Nach 4.50 sind kürzeste Verbindungen glatte geodätische Linien, o.B.d.A. mit $\|\dot{c}\| = \text{const.}$ Sei $L(c) \leq L(c')$ für alle c' . Dann ist $E(c) = \frac{1}{\Delta}L(c)^2 \leq \frac{1}{\Delta}L(c')^2 \leq E(c')$. Es folgt, dass c Minimum von E_a^b ist. Jedes andere Minimum c' von E_a^b hat notwendigerweise $L(c)^2 \leq L(c')^2 \leq \Delta E(c') = \Delta E(c) = L(c)^2$, d.h. $L(c) = L(c')$ und auch c' ist kürzeste Verbindung mit $\|\dot{c}'\| = \text{const.}$ \square

4.8. Zerlegung der Eins und Integration.

DEFINITION 4.60. (*Integral*) Sei φ eine Karte für einen Riemannschen Raum M und g_{jk} die dazugehörigen Koeffizienten der Metrik. Hat die Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ Support im Definitionsbereich der Karte, so definieren wir das Integral

$$\int_M f dO := \int_{\varphi(U)} \tilde{f} \sqrt{\det(g_{jk})} du^1 \dots du^n.$$

mit Hilfe der Koordinatendarstellung $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$ von f .

LEMMA 4.61. $\int_M f dO$ ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Karte.

Der Beweis ist analog zu dem Beweis von 1.67.

DEFINITION 4.62. (*Zerlegung der Eins*) Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von M und sind $(f_j)_{j \in J}$ Funktionen $f_j : M \rightarrow \mathbb{R}$, dann heißt (f_j) eine Zerlegung der Eins zu dieser Überdeckung, wenn gilt:

- (1) $f_j \geq 0$ in M , $\forall j \exists i : \text{supp}(f_j) \subseteq U_i$, und $\text{supp}(f_j)$ ist kompakt;
- (2) jedes $p \in M$ besitzt eine Umgebung W , in der nur endlich viele f_j nicht verschwinden;
- (3) $\sum f_j = 1$.

DEFINITION 4.63. (*Integral*) Ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und ist $(f_j)_{j \in J}$ eine zu einer Überdeckung aus Kartenumgebungen gehörige Zerlegung der Eins, so ist

$$\int_M f dO := \sum_{j \in J} \int f \cdot f_j dO.$$

LEMMA 4.64. Diese Definition ist von der Auswahl der f_j unabhängig.

BEWEIS. Seien f_j und \tilde{f}_k Zerlegungen der Eins ($j \in J$, $k \in K$), so ist $\sum_j \int f f_j = \sum_{j,k} \int f f_j \tilde{f}_k = \sum_k \int f \tilde{f}_k$. \square

Der folgende Satz gilt genau dann, wenn M parakompakt ist, d.h. insbesondere für Teilmannigfaltigkeiten. Für kompaktes M ist der Beweis nicht schwierig.

SATZ 4.65. Für jedes M und alle offenen Überdeckungen gibt es eine dazugehörige C^∞ -Zerlegung $(f_j)_{j \in J}$ der Eins ($r = 1, \dots, \infty$). Ist M kompakt, so ist J endlich.

BEWEIS. Für den allgemeinen Fall siehe [Bröcker and Jänich 1973]. Für kompaktes M argumentieren wir wie folgt: Sei $\alpha(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $\alpha(x) = e^{-1/x^2}$ sonst. Sei $\beta(x) = \alpha(x)/(\alpha(x) + \alpha(1-x))$, und $\gamma(x) = \beta(2-x)$. Dann ist $\gamma(x) = 1$ für $x \leq 1$, $0 < \gamma(x) < 1$ für $1 < x < 2$, und $\gamma(x) = 1$ für $x \geq 2$. α , β und γ sind C^∞ .

Wir bezeichnen mit B die offene Einheits-Vollkugel im \mathbb{R}^n . Für alle $x \in M$

gibt es Umgebungen U_x, V_x und eine Karte φ_x , sodass $\varphi_x(x) = 0$, $\varphi_x(V_x) = 3B$, $\varphi_x(U_x) = B$, und so, dass V_x in einer der Mengen der gegebenen Überdeckung enthalten ist. Sei $\tilde{f}_x(y) = \gamma(\|\varphi_x(y)\|)$ innerhalb von V_x und $\tilde{f}_x(y) = 0$ sonst. Dann ist \tilde{f}_x in ganz M definiert und C^∞ .

Endlich viele U_{x_j} überdecken M . Sei $\tilde{f} = \sum \tilde{f}_{x_j}$ und $f_j = \tilde{f}_{x_j}/\tilde{f}$. Dann ist $\{f_j\}$ eine zur gegebenen Überdeckung gehörige C^∞ -Zerlegung der Eins. \square

Daraus folgt ohne Mühe eine schwächere Version des Einbettungssatzes von [Whitney 1944]:

SATZ 4.66. *Ist M kompakt, so existiert eine Einbettung $g : M \rightarrow \mathbb{R}^m$, d.h. eine reguläre injektive Abbildung so, dass M und $g(M)$ homöomorph sind.*

BEWEIS. Mit den Bezeichnungen aus 4.65, nur mit Indizes $1, \dots, r$ anstelle von x_1, \dots, x_r wird durch

$$g(x) = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1(x)\varphi_1(x) \\ \vdots \\ \tilde{f}_r(x)\varphi_r(x) \\ \tilde{f}_1(x) \\ \vdots \\ \tilde{f}_r(x) \end{bmatrix}.$$

die Abbildung $g : M \rightarrow \mathbb{R}^{nr+r}$ definiert. g ist regulär, denn das j -te Koordinaten- n -tupel von g für sich genommen ist in U_j regulär.

g ist injektiv, denn aus $\tilde{f}_j(x) = \tilde{f}_j(x') = 1$ folgt $x, x' \in U_j$, und dort ist φ_j injektiv.

Nachdem M kompakt ist, folgt aus Injektivität und Stetigkeit von g , dass $g^{-1}|_{g(M)}$ stetig ist, also ist g ein Homöomorphismus. \square

5. KRÜMMUNG IN RIEMANNSCHEN RÄUMEN

5.1. Der Riemannsche Krümmungstensor.

DEFINITION 5.01. (*Riemannscher Krümmungstensor*) Sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und seien X, Y, Z Vektorfelder auf M . Dann heißt die Abbildung R , definiert durch

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z,$$

der Riemannsche Krümmungstensor. Er weist X, Y, Z das Vektorfeld $R(X, Y)Z$ zu.

Diese Definition sieht zunächst recht unanschaulich aus. $R(X, Y)$ ist offenbar ein Differentialoperator 2. Ordnung für Vektorfelder Z . Wir werden jedoch zeigen, dass R trilinear ist und $(R(X, Y)Z)_p$ nur von X_p, Y_p, Z_p abhängt (d.h. dass R ein Tensorfeld ist).

Später werden wir einige geometrische Interpretationen von R kennenlernen. Es wird sich z.B. herausstellen, dass für eine 2-Fläche im \mathbb{R}^3 $R(X, Y)Z = K \cdot \det(X, Y) \cdot Z^\perp$ gilt.

LEMMA 5.02. Für Funktionen $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ gilt $R(fX_1 + gX_2, Y)Z = fR(X_1, Y)Z + gR(X_2, Y)Z$, und analog für Y und Z , und $(R(X, Y)Z)_p$ hängt nur von X_p, Y_p, Z_p ab.

LEMMA 5.03. Für Vektorfelder X, Y und Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ gilt $[fX, Y] = f[X, Y] - (Yf)X$

BEWEIS. $[fX, Y]g = (fX)(Yg) - Y((fX)g) = fXYg - (Yf)(Xg) - f(YXg)$. \square

BEWEIS. (von 5.02) Die Additivität folgt direkt aus der Definition. Wir berechnen

$$\begin{aligned} R(fX, Y)Z &= \nabla_Y \nabla_{fX} Z - \nabla_{fX} \nabla_Y Z + \nabla_{[fX, Y]} Z \\ &= \nabla_Y (f \nabla_X Z) - f \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{f[X, Y] - (Yf)X} Z \\ &= (Yf) \nabla_X Z + f \nabla_Y \nabla_X Z - f \nabla_X \nabla_Y Z + f \nabla_{[X, Y]} Z - (Yf) \nabla_X Z \\ &= fR(X, Y)Z. \end{aligned}$$

Analog zeigt man $R(X, gY)Z = gR(X, Y)Z$.

$$\begin{aligned} R(X, Y)(hZ) &= \nabla_Y \nabla_X (hZ) - \nabla_X \nabla_Y (hZ) + \nabla_{[X, Y]} (hZ) \\ &= \nabla_Y (XhZ - h \nabla_X Z) - [\dots] + [X, Y]hZ + h \nabla_{[X, Y]} Z \\ &= YXhZ + Xh \nabla_Y Z - Yh \nabla_Y \nabla_X Z - h \nabla_Y \nabla_X Z - [\dots] + (") \\ &= hR(X, Y)Z. \end{aligned}$$

In einem lokalen Koordinatensystem mit der Karte $\varphi : M \rightarrow U$ seien $X = x^i \partial_i$, $Y = y^j \partial_j$ und $Z = z^k \partial_k$. Wir setzen $R(\partial_i, \partial_j) \partial_k = R_{ijk}^l \partial_l$ und erhalten

$$R(X, Y)Z = x^i y^j z^k R(\partial_i, \partial_j) \partial_k = x^i y^j z^k R_{ijk}^l \partial_l. \quad \square$$

DEFINITION 5.04. (*Koeffizienten des Krümmungstensors*) Ist φ eine Karte, so heißen die dazugehörigen Funktionen R_{ijk}^l die Koeffizienten des Riemannschen Krümmungstensors bezüglich φ .

BEISPIEL 5.05. Wir berechnen die Koeffizienten des Krümmungstensors des Levi-Civita-Zusammenhangs:

$$\begin{aligned} R_{ijk}^l \partial_l &= R(\partial_i, \partial_j) \partial_k = \nabla_j \nabla_i \partial_k - \nabla_i \nabla_j \partial_k = \nabla_j (\Gamma_{ik}^r \partial_r) - \nabla_i (\Gamma_{jk}^r \partial_r) \\ &= (\partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^l - \partial_i \Gamma_{jk}^l - \Gamma_{ir}^l \Gamma_{ij}^r) \partial_l. \end{aligned}$$

Ist ∇ der induzierte Zusammenhang in einer Teilmannigfaltigkeit, und g eine lokale Parametrisierung, dann sind die dazugehörigen Koeffizienten R_{ijk}^l gegeben durch

$$R_{ijk}^l \partial_l = \left(\frac{\partial}{\partial_j} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^i \partial u^k} \right)^{\text{tang}} - \frac{\partial}{\partial_i} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^j \partial u^k} \right)^{\text{tang}} \right)^{\text{tang}}.$$

5.2. Wegabhängigkeit der Parallelverschiebung. Verschiebt man einen Vektor auf einer Fläche bzw. in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit parallel, so erhält man für zwei verschiedene Wege zwei verschiedene Resultate. Diese Wegabhängigkeit der geodätischen Parallelverschiebung spiegelt gerade die Krümmung der Fläche bzw. Riemannschen Mannigfaltigkeit wieder.

LEMMA 5.06. *Für ein Vektorfeld $Z(u, t)$ längs $f(u, t)$ gilt*

$$\frac{D}{dt} \frac{D}{du} Z - \frac{D}{du} \frac{D}{dt} Z = R \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) X.$$

LEMMA 5.07. *Sind $N \subseteq M$ Mannigfaltigkeiten, $p \in N$, und ist X ein in N definiertes Vektorfeld, so gibt es lokal um p ein in M definiertes Vektorfeld \tilde{X} , das X fortsetzt.*

BEWEIS. Ist $M = \mathbb{R}^m$, N der Unterraum $x^{n+1} = \dots = x^m = 0$, und hat das Vektorfeld die Gestalt $X = X(x^1, \dots, x^n)$, so löst $\tilde{X}(x^1, \dots, x^m) = X(x^1, \dots, x^n)$ das Problem. Der allgemeine Fall kann durch einen Diffeomorphismus auf diesen speziellen Fall zurückgeführt werden (nach Definition von "TMF"). \square

BEWEIS VON 5.06. Ist f regulär und sein Bild daher lokal eine 2-dimensionale Teilmannigfaltigkeit, so kann man $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial t}$, und Z nach 5.07 zu Vektorfeldern X, Y, Z in M fortsetzen. Für eine skalare Funktion g mit $\tilde{g}(u, v) = g(f(u, v))$ gilt dann $Xg = \partial \tilde{g} / \partial u$ und $Yg = \partial \tilde{g} / \partial v$. Nach dem Satz von Schwarz gilt $[X, Y]g = 0$ in den Punkten $f(u, v)$, und die Definition von R liefert das Resultat. Wenn f nicht regulär ist, muss man eine längere Rechnung durchführen [do Carmo 1992, p. 98f]. \square

SATZ 5.08. *Sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ eine reguläre Abbildung mit*

$$f(0, 0) = p, \quad \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = X_p, \quad \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = Y_p.$$

Wir bezeichnen mit $\text{Pt}_{u, v_0}^{u', v_0}$ die geodätische Parallelverschiebung längs der u -Linie von (u, v_0) bis (u', v_0) und mit $\text{Pt}_{u_0, v}^{u_0, v'}$ die geodätische Parallelverschiebung längs der v -Linie von (u_0, v) bis (u_0, v') . Dann ist

$$R(X_p, Y_p)Z_p = \lim_{s, t \rightarrow 0} \frac{1}{st} (\text{Pt}_{0, s}^{0, 0} \text{Pt}_{t, s}^{0, s} \text{Pt}_{t, 0}^{t, s} \text{Pt}_{0, 0}^{t, 0} Z_p - Z_p)$$

BEWEIS. Sei $Z(s, t)$ ein beliebiges Vektorfeld, das $Z_p = Z(0, 0)$ fortsetzt. Nach 4.27 ist

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} Z &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left(\text{Pt}_{0,s}^{0,0} \frac{D}{\partial u} Z(0, s) - \frac{D}{\partial u} Z(0, 0) \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left[\text{Pt}_{0,s}^{0,0} \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\text{Pt}_{t,s}^{0,s} Z(t, s) - Z(0, s)) \right) - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\text{Pt}_{t,0}^{0,0} Z(t, 0) - Z(0, 0)) \right] \\ &= \lim_{s,t \rightarrow 0} \frac{1}{st} (\text{Pt}_{0,s}^{0,0} \text{Pt}_{t,s}^{0,s} Z(t, s) - \text{Pt}_{0,s}^{0,0} Z(0, s) - \text{Pt}_{t,0}^{0,0} Z(t, 0) + Z(0, 0)); \end{aligned}$$

Analog gilt

$$\frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} Z = \lim_{s,t \rightarrow 0} \frac{1}{st} (\text{Pt}_{t,0}^{0,0} \text{Pt}_{t,s}^{t,0} Z(t, s) - \text{Pt}_{t,0}^{0,0} Z(t, 0) - \text{Pt}_{0,s}^{0,0} Z(0, s) + Z(0, 0)).$$

Nun setze man $Z(s, t) = \text{Pt}_{t,0}^{t,s} \text{Pt}_{0,0}^{t,0} Z_p$ und verwende 5.06:

$$R(X_p, Y_p)Z_p = \lim_{s,t \rightarrow 0} \frac{1}{st} \left(\text{Pt}_{0,s}^{0,0} \text{Pt}_{t,s}^{0,s} \text{Pt}_{t,0}^{t,s} \text{Pt}_{0,0}^{t,0} Z_p - Z_p \right). \quad \square$$

SATZ 5.09. Die folgenden Aussagen für $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sind äquivalent:

- (1) $R = 0$, d.h. M ist flach;
- (2) Die Parallelverschiebung ist lokal wegunabhängig;
- (3) M ist lokal isometrisch zum euklidischen \mathbb{R}^n .

BEWEIS. (3) \implies (1) und (3) \implies (2) sind trivial

• (2) \implies (1) folgt aus dem vorigen Satz.

• (1) \implies (2): Wir verwenden eine Karte $\varphi : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sei o.B.d.A. $\varphi(p) = (0, \dots, 0)$. Sei Z_p ein Tangentialvektor in p . Erzeuge ein Vektorfeld $Z(u^1, \dots, u^n)$ durch Parallelverschiebung von Z_p längs der Parameterlinien $(0, \dots, 0) \rightarrow (u^1, \dots, 0) \rightarrow \dots \rightarrow (u^1, \dots, u^n)$.

Nach Konstruktion ist Z ein Parallelfeld längs der u^i -Linien durch die Punkte $(u^0, \dots, u^i, 0, \dots, 0)$. Insbesondere ist Z ein Parallelfeld längs jeder u^n -Linie.

Wir schreiben ' $P(i, j)$ ' für

$$\nabla_i Z(u^1, \dots, u^j, 0, \dots, 0) = 0.$$

Nach Konstruktion gilt ' $P(i, i)$ '. Wir zeigen

$$P(i, j) \implies P(i, j+1).$$

Aus $R = 0$ folgt $\nabla_{j+1} \nabla_i Z = \nabla_i \nabla_{j+1} Z$. Wegen ' $P(j+1, j+1)$ ' ist

$$\nabla_{j+1} Z(u^1, \dots, u^{j+1}, 0, \dots, 0) = 0,$$

also ist

$$\nabla_{j+1} \nabla_i Z(u^1, \dots, u^{j+1}, 0, \dots, 0) = 0,$$

d.h. $\nabla_i Z$ ist ein Parallelfeld längs der u^{j+1} -Linie in den Punkten $(u^1, \dots, u^{j+1}, 0, \dots, 0)$. Das Vektorfeld $\nabla_i Z$ verschwindet bei $(u^1, \dots, u^j, 0, \dots, 0)$ wegen ' $P(i, j)$ '. Nachdem die Parallelverschiebung ein VR-Isomorphismus ist, ist $\nabla_i Z$ längs der ganzen u^{i+1} -Linie gleich 0, also gilt ' $P(i, j+1)$ '.

Mit Induktion folgt nun ' $P(i, n)$ ', d.h. $\nabla_i Z = 0$ überall in U . Ist $X = x^i \partial_i$, so ist $\nabla_X Z = x^i \nabla_i Z$, also $\nabla_X Z = 0$ überall in U . D.h. Z ist Parallelfeld längs jeder Kurve \implies das Ergebnis der Parallelverschiebung längs jeder Kurve c in U ist gleich dem Wert von Z im Endpunkt, unabhängig von der Kurve.

• (2) \implies (3): Wir zeigen die Existenz einer lokalen Parametrisierung so, dass die Koeffizienten g_{jk} der Metrik gleich δ_{jk} sind. Wir wählen in $T_p M$ eine Orthonormalbasis $(E_1)_p, \dots, (E_n)_p$, verschieben diese Vektoren (wegunabhängig) parallel, und erhalten so Vektorfelder E_1, \dots, E_n . Wegen (2) gilt $\nabla_{E_i} E_j = 0$, und wegen der Symmetrie von ∇ gilt

$$[E_i, E_j] = \nabla_{E_i} E_j - \nabla_{E_j} E_i = 0 - 0 = 0.$$

Sei $f : V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow M$ die Abbildung

$$\psi : (v^1, \dots, v^n) \mapsto \text{Fl}_{E_1}^{v^1} \circ \dots \circ \text{Fl}_{E_n}^{v^n}(p).$$

Nach Konstruktion sind die Ableitungsvektoren der v^i -Parameterlinien die Vektoren E_i . Nach 3.23 ist die Reihenfolge der Flüsse irrelevant, d.h. es gilt $\partial \psi / \partial v^i = E_i$ für alle i . Damit ist $d\psi$ regulär und ψ eine lokale Parametrisierung mit Basisfeldern $\partial_i = E_i$. Die E_i sind Parallelfelder längs jeder Kurve, und daher ist

$$\langle E_j, E_k \rangle = \langle (E_j)_p, (E_k)_p \rangle = \delta_{jk}.$$

Die Koeffizienten g_{jk} von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezüglich ψ sind gegeben durch $g_{jk} = \langle \partial_j, \partial_k \rangle = \langle E_j, E_k \rangle = \delta_{jk}$, was zu zeigen war. \square

5.3. Die Schnittkrümmung.

SATZ 5.10. Für den Riemannschen Krümmungstensor gelten die folgenden Gleichungen

- (1) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$
- (2) $R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0$ (Bianchi-Identität)
- (3) $\langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle R(X, Y)W, Z \rangle = 0$
- (4) $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$

BEWEIS. (1) folgt direkt aus der Definition von R . Wegen der Linearität von R genügt es, (2) für Basisfelder nachzuweisen. Wir nehmen also an, dass $[X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = 0$ gilt und berechnen

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \dots = 0.$$

Bei (3) ist zu zeigen, dass $\langle R(X, Y)Z, W \rangle$ in Z und W schiefsymmetrisch ist, d.h. z.z. ist $\langle R(X, Y)Z, Z \rangle = 0$:

$$\begin{aligned} XY \langle Z, Z \rangle &= X(2\langle \nabla_Y Z, Z \rangle) = 2\langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z \rangle + 2\langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z \rangle \\ YX \langle Z, Z \rangle &= Y(2\langle \nabla_X Z, Z \rangle) = 2\langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z \rangle + 2\langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z \rangle \\ [X, Y] \langle Z, Z \rangle &= 2\langle \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle \end{aligned}$$

Durch Subtraktion der ersten beiden Gleichungen von der dritten entsteht $(XY - YX + [X, Y]) \langle Z, Z \rangle = 2\langle R(Y, X)Z, Z \rangle$, und das verschwindet aufgrund von 3.18.

Um (4) zu zeigen, verwenden wir viermal (2) und addieren:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle R(Y, Z)X, W \rangle + \langle R(Z, X)Y, W \rangle \\ 0 &= (\text{zyklisches Vertauschen}) \\ \implies 0 &= 2\langle R(ZX)Y, W \rangle + 2\langle R(W, Y)Z, X \rangle. \end{aligned}$$

Es folgt $\langle R(Z, X)Y, W \rangle = \langle R(Y, W)Z, X \rangle$, was zu zeigen war. \square

BEMERKUNG 5.11. $R(X, Y, Z, W) := \langle R(X, Y)Z, W \rangle$ heißt ebenfalls Riemannscher Krümmungstensor. Sei $R_{ijkl} := R(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l)$. Aus

$$R_{ijkl} = \langle R_{ijk}^r \partial_r, \partial_l \rangle$$

folgt

$$R_{ijkl} = g_{lj} R_{ijk}^r, \quad R_{ijk}^r = g^{lr} R_{ijkl},$$

d.h. die Koeffizienten R_{\dots} und R^{\dots} bestimmen einander wechselseitig.

BEMERKUNG 5.12. Bei $\dim M = 2$ gibt es 16 Koeffizienten R_{ijkl} , doch aufgrund der vielfachen Symmetrien sind diese alle durch R_{1212} bestimmt: $R_{ijkl} = -R_{jkkl} = -R_{ijlk} = R_{klij}$, insbes. ist $R_{iikl} = R_{ijkk} = 0$. Später werden wir sehen, dass für 2-Flächen im \mathbb{R}^3 die Beziehung $R_{1212} = \det(g_{jk}) \cdot K$ gilt.

DEFINITION 5.13. (*Ricci-Tensor*) Der Ricci-Tensor $\text{Ric}(Y, Z)$ ist definiert als die Spur der linearen Abbildung $X \mapsto R(X, Y)Z$. Seine Koeffizienten sind

$$\text{Ric}(\partial_j, \partial_k) = R_{jk} = \sum_i R_{ijk}^i.$$

DEFINITION 5.14. (*Schnittkrümmung*) Seien $v, w \in T_p M$ zwei linear unabhängige Vektoren. Dann ist die Schnittkrümmung wie folgt definiert:

$$K(v, w) = \frac{R(v, w, v, w)}{\text{area}(v, w)^2} = \frac{\langle R(v, w)v, w \rangle}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2}$$

LEMMA 5.15. $K(v, w)$ hängt nur von der Ebene ab, die von v, w aufgespannt wird.

BEWEIS. Wir zeigen, dass sich K bei Ersetzen von v, w durch Linearkombinationen von v, w nicht ändert. Wir verwenden die bekannten Eigenschaften $\text{area}(v, w)^2 = \text{area}(w, v)^2 = \text{area}(v + \lambda w, w)^2$ und $\text{area}(\lambda v, w)^2 = \lambda^2 \text{area}(v, w)^2$ des Flächeninhalts des von 2 Vektoren aufgespannten Parallelogramms.

$$\langle R(v, w)v, w \rangle = -\langle R(w, v)v, w \rangle = \langle R(w, v)w, v \rangle$$

$$\implies K(v, w) = K(w, v)$$

$$\begin{aligned} \langle R(v + \lambda w, w)(v + \lambda w), w \rangle &= \langle R(v, w)v + \lambda R(w, w)v \\ &\quad + \lambda R(v, w)w + \lambda^2 R(w, w)w, w \rangle = \langle R(v, w)v, w \rangle \end{aligned}$$

$$\implies K(v + \lambda w, w) = K(v, w)$$

$$\langle R(\lambda v, w)\lambda v, w \rangle = \lambda^2 \langle R(v, w)v, w \rangle \implies K(\lambda v, w) = K(v, w) \quad \square$$

FOLGERUNG 5.16. In 2-dimensionalen Riemannschen Räumen gibt es in jedem Punkt nur eine einzige Schnittkrümmung.

5.4. **Jacobi-Felder.** Die geodätischen Linien, die im Nordpol einer Kugel beginnen, treffen einander wieder im Südpol. Dass so viele geodätische Linien mit gemeinsamem Anfangspunkt einander wieder treffen, tritt im allgemeinen nicht auf. Trotzdem kann man, ausgehend von der Krümmung einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, Aussagen über das Auseinander- oder Wiederzusammenlaufen von geodätischen Linien machen. Die Bestimmung dieser sogenannten geodätischen Abweichung und ihres Zusammenhangs mit dem Riemannschen Krümmungstensor ist ein wesentliches technisches Hilfsmittel beim Studium lokaler und globaler geometrischer Eigenschaften von Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

LEMMA 5.17. Sei $f(u, t)$ eine 1-parametrische Schar von geodätischen Linien $f(u, \cdot)$ mit dem Variationsvektorfeld $J(t) = \frac{\partial}{\partial u} \Big|_{u=0} f(u, t)$. Wir setzen $c(t) = f(0, t)$. Dann gilt

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(\dot{c}, J)\dot{c} = 0.$$

BEWEIS. Nach 4.20 gilt $\frac{D}{du} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial u}$. Jedes c_u ist geodätische Linie, also ist $\frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$. Mit 5.06 erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D}{du} \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} = R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial u}\right) \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{D}{dt} \frac{D}{du} \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial u}\right) \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{D}{dt} \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial u}. \end{aligned} \quad \square$$

DEFINITION 5.18. (*Jacobi-Feld*) Ein Vektorfeld V längs einer geodätischen Linie, das die Differentialgleichung in 5.17 erfüllt, heißt Jacobi-Feld.

LEMMA 5.19. Sei $f(u, t)$ eine 1-parametrische Schar von geodätischen Linien $f(u, \cdot)$, die bei $t = 0$ in einem festen Punkt p starten und dort einen Einheitsvektor als Tangentialvektor $v(u) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} f(u, t)$ besitzen:

$$f(u, t) = \exp_p(t \cdot v(u)).$$

Das Jacobifeld

$$J(t) = \frac{\partial}{\partial u} \Big|_{u=0} f(u, t)$$

hat mit $w = \dot{v}(0)$ im Fall $\|w\| = 1$ die Entwicklung

$$\|J\|^2 = t^2 - \frac{1}{3}K(v, w)t^4 + o(t^4), \quad \|J\| = t - \frac{1}{6}K(v, w)t^3 + o(t^3).$$

BEWEIS. Wir benötigen die Ableitungen von $\langle J, J \rangle$ an der Stelle $t = 0$. Wir schreiben hier ' sowohl für die kovariante als auch für die gewöhnliche Ableitung nach t längs der Kurve $f(t, 0)$. Wir erhalten der Reihe nach für die Ableitungen der Stufe k

- $\langle J, J \rangle(0) = 0$, weil $J(0) = 0$
- $\langle J, J \rangle' = 2\langle J', J \rangle = 0$ bei $t = 0$. Außerdem gilt (nach 4.14)

$$\begin{aligned} J'(0) &= \frac{D}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u} f(0, 0) = \frac{D}{\partial u} \frac{\partial}{\partial t} f(0, 0) = \frac{D}{\partial u} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\substack{t=0 \\ u=0}} \exp_p(tv(u)) \\ &= \frac{D}{\partial u} v(0) = \dot{v}(0) = w \end{aligned}$$

- $\langle J, J \rangle'' = 2\langle J'', J \rangle + 2\langle J', J' \rangle$. Bei $t = 0$ ist das gleich $2\langle J', J' \rangle = 2\langle w, w \rangle = 2$.

- $\langle J, J \rangle''' = 2\langle J''', J \rangle + 6\langle J'', J' \rangle$. Bei $t = 0$ ergibt das den Wert 0, denn $J'' = -R(\dot{c}, J)\dot{c} = 0$.

- $\langle J, J \rangle'''' = 2\langle J'''', J \rangle + 8\langle J''', J' \rangle + 6\langle J'', J'' \rangle$ Bei $t = 0$ ergibt ist das gleich $8\langle J''', J' \rangle$, und wir haben weiter $\langle J''', J' \rangle = \langle \frac{D}{dt} R(\dot{c}, J)\dot{c}, J' \rangle = \langle R(\dot{c}, J)\dot{c}, J' \rangle' - \langle R(\dot{c}, J)\dot{c}, J'' \rangle = \langle R(\dot{c}, J')\dot{c}, J' \rangle = \langle \frac{D}{dt} R(\dot{c}, J')\dot{c}, J \rangle + \langle R(\dot{c}, J')\dot{c}, J' \rangle = \langle R(\dot{c}, w)\dot{c}, w \rangle = K(\dot{c}, w) = K(v, w)$.

Damit haben wir die ersten vier Glieder der Taylorreihe von $\langle J, J \rangle$ bestimmt. Für die Wurzel aus $\langle J, J \rangle$ verwenden wir die binomische Reihe $\sqrt{1 + \alpha} = 1 + \frac{1}{2}\alpha + \dots$: $\|J\| = \sqrt{r^2(1 - Kr^2/3 + \dots)} = |r|(1 - Kr^2/6 + \dots)$. \square

PROP. 5.20. Sind E_1, E_2 zueinander orthogonale Einheitsvektoren in $T_p M$ so betrachten wir die Abbildung

$$f(u, r) = \exp_p(r(\cos u \cdot E_1 + \sin u \cdot E_2)).$$

Für $r = \text{const}$ beschreibt sie einen geodätischen Kreis $k_r(u) = f(u, r)$ vom Radius r . Umfang und Fläche dieses Kreises haben die Taylorentwicklung

$$U(r) = 2\pi(r - \frac{1}{6}K(E_1, E_2)r^3 + \dots)$$

$$A(r) = \pi(r^2 - \frac{1}{12}K(E_1, E_2)r^4 + \dots)$$

BEWEIS. (Idee) Die Abbildung $f(u, r)$ ist von dem Typ, der in 5.19 diskutiert wurde, wenn wir $v(u) = \cos u \cdot E_1 + \sin u \cdot E_2$ setzen. Wir haben $\|\dot{v}(u)\| = 1$ für alle u , nicht nur für $u = 0$. Das Resultat von 5.19 gilt daher für alle u :

$$\|\dot{k}_r(u)\| = \left\| \frac{\partial f}{\partial u}(r, u) \right\| = r - \frac{1}{6}K(v(u), \dot{v}(u))r^3 + \dots$$

Nachdem die Schnittkrümmung nur von der Ebene abhängig ist, die von den beiden Argumenten aufgespannt wird, gilt $K(v, \dot{v}) = K(E_1, E_2)$. Wir bestimmen die Bogenlänge $U(r) = L_0^{2\pi}(k_r)$:

$$U(r) = \int_0^{2\pi} \|\dot{k}_r(u)\| du = \int_0^{2\pi} \left(r - \frac{1}{6}K(E_1, E_2)r^3 + \dots \right) du.$$

Für die Kreisfläche berechnen wir die Oberfläche des Flächenstückes $\{f(t, u) \mid 0 \leq t \leq r, 0 \leq u \leq 2\pi\}$. Zu diesem Zweck benötigen wir die Koeffizienten der 1. Grundform $g_{jk} = \langle \partial_j f, \partial_k f \rangle$:

$$g_{11} = \left\| \frac{\partial f}{\partial r} \right\|^2 = 1, \quad g_{12} = 0 \quad \text{nach 4.46,} \quad g_{22} = \langle J, J \rangle.$$

Für die Fläche ergibt sich

$$\begin{aligned} A(r) &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du dt = \int_0^r \int_0^{2\pi} \|J(u, t)\| du dt \\ &= \int_0^r U(t) dt \end{aligned} \quad \square$$

FOLGERUNG 5.21. Die Schnittkrümmung $K(E_1, E_2)$ ergibt sich aus Umfang $U(r)$ und Flächeninhalt $A(r)$ von geodätischen Kreisen wie oben beschrieben aus

$$K(E_1, E_2) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{\pi r^3} (2\pi r - U(r)) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{12}{\pi r^4} (\pi r^2 - A(r)).$$

FOLGERUNG 5.22. In der Notation von oben stimmt die Schnittkrümmung $K(E_1, E_2)$ überein mit der Schnittkrümmung der 2-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit $\exp_p(\mathbb{R}E_1 + \mathbb{R}E_2)$.

5.5. Konjugierte Punkte und minimale geodätische Linien.

DEFINITION 5.23. (konjugierte Punkte) Ist c geodätische Linie und existiert ein Jacobifeld $J \neq 0$ längs c mit $J(a) = J(b) = 0$, so heißen $c(a)$ und $c(b)$ zueinander konjugierte Punkte längs c .

Bildlich gesprochen, schneiden einander 'infinitesimal benachbarte' geodätische Linien, die von $c(a)$ ausgehen, einander im Punkt $c(b)$.

LEMMA 5.24. Die Jacobi-Felder längs c bilden einen $2n$ -dimensionalen Vektorraum und sind für beliebiges a durch $J(a)$ und $\frac{D}{dt}J(a)$ eindeutig festgelegt.

BEWEIS. Sind E_1, \dots, E_n linear unabhängige Parallelfelder längs einer geodätischen Linie c mit $E_1 = \dot{c}$, so setzen

wir $J(t) = x^j(t)E_j(t)$. Für die Ableitungen gilt $\frac{D}{dt}J = \dot{x}^j(t)E_j(t)$ und $\frac{D^2}{dt^2}J = \ddot{x}^j(t)E_j(t) - R(\dot{c}, J)\dot{c}$.

$$\implies \ddot{x}^j E_j + x^j R(E_1, E_j)E_1 = 0$$

D.h. wir erhalten eine lineare Dgl. 2. Ordnung für die Koeffizientenfunktionen $x^j(t)$. Es existiert ein $2n$ -dimensionaler Vektorraum von Lösungen, und jede Lösung ist durch die Anfangsbedingungen $J(a) = x^j(a)E_j(a)$ und $\frac{D}{dt}J = \dot{x}^j(a)E_j(a)$ eindeutig bestimmt. \square

LEMMA 5.25. Jedes Jacobifeld längs einer Geodätischen entsteht auf die Weise wie in 5.17 angegeben

BEWEIS. Durch die Konstruktion in 5.17 kann man einen $2n$ -dimensionalen

Vektorraum von Vektorfeldern längs c erzeugen: Mit der dortigen Notation ist $J(0) = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0)$. Aus dem Beweis von 5.19 sehen wir, dass im Fall $f(u, 0) = \text{const}$ gilt $J'(0) = \frac{d}{du}(\frac{\partial f}{\partial t}(u, 0))$. \square

LEMMA 5.26. Sei $c(t) = \exp_p(tv)$ eine geodätische Linie. Es gibt einen zu $c(0)$ konjugierten Punkt $c(r)$ genau dann, wenn \exp_p bei rv singularär ist:

BEWEIS.

$$\begin{aligned} d(\exp_p)_{rv}(w) &= \frac{d}{du} \Big|_{u=0} \exp_p(rv + uw) \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \Big|_{u=0, t=r} \exp_p(t(v + \frac{u}{r}w)) = J(r), \end{aligned}$$

wenn $J(t)$ das Jacobifeld $\frac{\partial}{\partial u} \Big|_{u=0} \exp_p(uv)$ bezeichnet. D.h. $d(\exp_p)_{rv}$ hat genau dann einen nichttrivialen Kern, wenn das Jacobifeld J bei r eine Nullstelle hat. \square

Der folgende Satz ist wesentlich für globale Probleme in der Riemannschen Geometrie:

SATZ 5.27. Ist c eine geodätische Linie und liegt zwischen $c(a)$ und $c(b)$ ein zu $c(a)$ konjugierter Punkt, so ist c nicht die kürzeste Verbindung zwischen $c(a)$ und $c(b)$ in der Klasse der stückweise differenzierbaren Kurven, die $c(a)$ und $c(b)$ verbinden.

BEWEIS. Siehe [Milnor 1969, Sec. 13–15] und [do Carmo 1992, pp. 243ff]. \square

SATZ 5.28. (Satz von Bonnet und Myers) Ist $K(v, w) \geq \frac{1}{r^2}$ für alle $v, w \in TM$, oder ist $\frac{1}{n-1} \text{Ric}(v, v) \geq \frac{1}{r^2}$ für alle $v \in TM$ mit $\|v\| = 1$, so ist der erste konjugierte Punkt höchstens πr entfernt. Ist die MF vollständig, so ist daher ihr Durchmesser $\text{diam}(M) \leq \pi r$

BEWEIS. [do Carmo 1992, p. 202]. \square

SATZ 5.29. Ist $K(v, w) \leq 0$ in M , so existieren keine konjugierten Punkte.

BEWEIS. Sei J ein Jacobifeld längs der geodätischen Linie $c(t)$. Wir verwenden ' für Ableitungen nach t längs c . Dann ist $\langle J, J \rangle'' = 2\langle J'', J \rangle + 2\langle J', J' \rangle \geq -2\langle R(\dot{c}, J)\dot{c}, J \rangle \geq 0$. D.h. $\langle J, J \rangle'$ ist streng monoton steigend. Aus der Taylorentwicklung von $\langle J, J \rangle$ um eine Nullstelle (5.19) folgt $\langle J, J \rangle = t^2 - \dots \implies \langle J, J \rangle' = |t - \dots| \implies \langle J, J \rangle'$ ist positiv in einer Umgebung einer Nullstelle $\implies \langle J, J \rangle$ ist streng monoton außerhalb von Nullstellen $\implies J$ kann nur eine Nullstelle besitzen. \square

FOLGERUNG 5.30. Ist $K(v, w) \leq 0$ in M , dann ist \exp_p global regulär für alle p und nicht nur lokal.

BEMERKUNG 5.31. Ist M vollständig, einfach zusammenhängend, und $K(v, w) \leq 0$, dann ist \exp_p ein Diffeomorphismus, d.h. M ist diffeomorph zum \mathbb{R}^n (Satz von Cartan-Hadamard) [do Carmo 1992, p. 149].

5.6. Riemannsche Teilmannigfaltigkeiten. Wir betrachten in diesem Abschnitt Teilmannigfaltigkeiten von Riemannschen Räumen. Für den \mathbb{R}^n haben wir das bereits getan — beim Studium von Kurven und Flächen im euklidischen Raum (siehe Kap. 1 und 2). Wir übertragen einige Begriffe, die wir für Flächen im euklidischen Raum bereits studiert haben, auf Riemannsche Räume. Ein Hauptresultat ist das *Theorema Egregium* von Gauß, das die Gaußsche Krümmung mit der Schnittkrümmung identifiziert und damit zeigt, dass sie eine Größe der inneren Geometrie ist, welche bei Isometrien unverändert bleibt.

DEFINITION 5.32. (Riemannsche Teilmannigfaltigkeit) Ist $(\widetilde{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Riemannscher Raum und $M \subseteq \widetilde{M}$ eine Teilmannigfaltigkeit, so heißt M versehen mit dem Skalarprodukt von \widetilde{M} Riemannsche Teilmannigfaltigkeit von \widetilde{M} .

DEFINITION 5.33. (Orthogonalraum) Ist M Riemannsche Teilmannigfaltigkeit von \widetilde{M} , so heißt das orthogonale Komplement $\perp_p M$ von $T_p M$ in $T_p \widetilde{M}$ der Orthogonalraum von M in p .

DEFINITION 5.34. (*induzierter Zusammenhang, II. Fundamentalform*)
 $M \subseteq \widetilde{M}$ sei eine Riemannsche Teilmannigfaltigkeit, $\widetilde{\nabla}$ sei ein Zusammenhang in \widetilde{M} . Wir zerlegen jeden Vektor aus $T_p\widetilde{M}$ in eine Komponente tangential und eine Komponente orthogonal zu T_pM :

$$X_p = X_p^{\text{tang}} + X_p^{\text{norm}} \quad \text{mit} \quad X_p^{\text{tang}} \in T_pM, \quad X_p^{\text{norm}} \in \perp_pM.$$

Der induzierte Zusammenhang $\nabla_X Y$ und die II. Fundamentalform für M sind definiert durch

$$\nabla_X Y = (\widetilde{\nabla}_X \widetilde{Y})^{\text{tang}}, \quad \text{II}(X, Y) = (\widetilde{\nabla}_X \widetilde{Y})^{\text{norm}} = \widetilde{\nabla}_X \widetilde{Y} - \nabla_X Y.$$

Dabei ist \widetilde{Y} ein Vektorfeld, das Y in \widetilde{M} hinein fortsetzt.

LEMMA 5.35. $\nabla_X Y$ ist wohldefiniert und ein Zusammenhang.

BEWEIS. Wir können $\widetilde{\nabla}_X \widetilde{Y}$ an der Stelle p auch durch kovariante Ableitung längs einer Kurve mit $c(0) = p$, $\dot{c}(0) = X_p$ ausdrücken. Die Kurve kann ganz in M gewählt werden und deshalb ist $\widetilde{\nabla}_X \widetilde{Y}$ unabhängig von der Wahl der Erweiterung \widetilde{Y} . Dass ∇ tatsächlich ein Zusammenhang ist, weist man ganz analog zu S. 35 nach. \square

LEMMA 5.36. Sind X, Y Vektorfelder in M und $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ Fortsetzungen nach \widetilde{M} , so ist $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]|_M = [X, Y]$. Insbesondere ist die Lieklammer tangential zu M .

BEWEIS. Wir verwenden die Koordinatendarstellung bezüglich einer Karte, in der M als der Unterraum $\mathbb{R}^m \times 0$ erscheint. Dann gilt für die Lieklammer

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}](u) = (x^i \partial_i y^j - y^i \partial_i x^j) \partial_j(u).$$

Bei Auswertung in Punkten $u = (u^1, \dots, u^m, 0, \dots, 0)$ verschwinden alle Koordinaten x^i und y^i für $i > m$ (denn dort ist $\widetilde{X} = X, \widetilde{Y} = Y$, und beide sind tangential zur Teilmannigfaltigkeit). Es gehen in die Lieklammer daher nur die Koordinaten der ursprünglichen Vektorfelder X, Y ein. \square

LEMMA 5.37. Ist $\widetilde{\nabla}$ ein symmetrischer Zusammenhang, dann ist die II. Fundamentalform

$$\text{II}(X, Y) : T_pM \times T_pM \rightarrow \perp_pM,$$

symmetrisch und $\text{II}(X, Y)_p$ hängt nur von den Werten X_p, Y_p ab.

BEWEIS. $\text{II}(X, Y) - \text{II}(Y, X) = (\widetilde{\nabla}_X Y - \widetilde{\nabla}_Y X)^{\text{norm}} = [X, Y]^{\text{norm}} = 0$. Nach Konstruktion geht von X in $\text{II}(X, Y)$ nur der Wert X_p ein, wegen der Symmetrie von Y auch nur der Wert Y_p . \square

SATZ 5.38. Ist $\widetilde{\nabla}$ in \widetilde{M} der Levi-Civita-Zusammenhang, dann ist es auch ∇ in M .

BEWEIS. $\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z}$ seien Vektorfelder, die X, Y, Z nach \widetilde{M} fortsetzen (nach 5.07). Die Symmetrie folgt aus

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} - \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}} \widetilde{X})^{\text{tang}} = [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^{\text{tang}} = [\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = [X, Y].$$

Die Verträglichkeit mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wird nach 4.31 überprüft durch

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle &= \tilde{X}\langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle = \langle \tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle + \langle \tilde{Y}, \tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Z} \rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle \text{II}(X, Y), Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle + \langle Y, \text{II}(X, Y) \rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle. \end{aligned} \quad \square$$

LEMMA 5.39. (*Gleichung von Weingarten*) Ist $N : M \rightarrow \perp M$ ein Normalvektorfeld, d.h. $N_p \in \perp_p M$, so gilt für $X, Y \in T_p M$

$$\langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle = -\langle N, \text{II}(X, Y) \rangle$$

Insbesondere hängt die linke Seite der Gleichung nur von X_p, Y_p, N_p ab.

BEWEIS. Wir leiten die Orthogonalität von Tangential- und Normalvektoren ($\langle N, Y \rangle = 0$) ab:

$$\begin{aligned} 0 &= X\langle N, Y \rangle = \langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle + \langle N, \tilde{\nabla}_X Y \rangle \\ &= \langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle + \langle N, \nabla_X Y + \text{II}(X, Y) \rangle \\ &= \langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle + \langle N, \text{II}(X, Y) \rangle. \end{aligned} \quad \square$$

LEMMA 5.40. Die 2. Fundamentalformen II' und h (siehe S. 17) hängen wie folgt zusammen: Ist M eine $(m-1)$ -dim. Fläche im $\mathbb{R}^m = \tilde{M}$, und sind v, w Tangentialvektoren, dann gilt $\text{II}_p(v, w) = h(v, w) \cdot n(p)$.

BEWEIS. Wegen der Bilinearität von II genügt es, die Aussage für die Basisfelder $v = \partial_i$ und $w = \partial_j$ bezüglich einer beliebigen Parametrisierung zu zeigen. Sei f eine lokale Parametrisierung und n das dazugehörige Einheitsnormalvektorfeld. $\perp_p M$ ist dann eindimensional und wird von $n(p)$ aufgespannt. Es gilt

$$h_{ij} = \langle n, \partial_i \partial_j f \rangle = \langle n, \tilde{\nabla}_i \partial_j \rangle = \langle n, \nabla_i \partial_j + \text{II}(\partial_i, \partial_j) \rangle = \langle \text{II}(\partial_i, \partial_j), n(p) \rangle$$

Daraus folgt die Behauptung. \square

LEMMA 5.41. (*Lemma von Gauß*) Ist $M \subseteq \tilde{M}$ eine Riemannsche Teilmannigfaltigkeit und sind R und \tilde{R} die entsprechenden Riemannschen Krümmungstensoren, so gilt

$$\begin{aligned} \langle \tilde{R}(X, Y)Z, W \rangle - \langle R(X, Y)Z, W \rangle \\ = \langle \text{II}(X, W), \text{II}(Y, Z) \rangle - \langle \text{II}(X, Z), \text{II}(Y, W) \rangle. \end{aligned}$$

BEWEIS. In diese Gleichung, ausgewertet bei $p \in M$, gehen nur die Werte X_p, Y_p, Z_p, W_p ein. Wegen der Linearität genügt es, sie für die Basisfelder $\partial_1, \dots, \partial_n$ bezüglich einer Karte zu zeigen, also seien o.b.D.A. alle Lieklammern gleich 0. Zur Rechnung mit ∇ setzen wir X, Y, Z, W zu lokal in \tilde{M} definierten Vektorfeldern fort, deren Liesche Klammern nach 5.36 ebenfalls verschwinden.

$$\langle \tilde{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z, W \rangle - \langle \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z, W \rangle$$

Einer der beiden Ausdrücke ist weiter gleich

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\nabla}_Y (\nabla_X Z + \text{II}(X, Z)), W \rangle &= \langle \tilde{\nabla}_Y \nabla_X Z, W \rangle + \langle \tilde{\nabla}_Y \text{II}(X, Z), W \rangle \\ &= \langle \nabla_Y \nabla_X Z, W \rangle + \underbrace{\langle \text{II}(Y, \nabla_X Z), W \rangle}_{\in \perp_p M} - \underbrace{\langle \text{II}(X, Z), \text{II}(Y, W) \rangle}_{5.39} \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} & \langle \widetilde{R}(X, Y)Z, W \rangle \\ &= \langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle \text{II}(X, Z), \text{II}(Y, W) \rangle + \langle \text{II}(Y, Z), \text{II}(X, W) \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

Dieses Lemma führt sofort zu folgendem herausragenden Satz⁶

SATZ 5.42. (*Theorema Egregium von Gauß*) Die Gaußsche Krümmung einer Fläche im \mathbb{R}^3 stimmt mit ihrer Schnittkrümmung überein. Sie ist insbesondere eine Größe der inneren (Riemannschen) Geometrie der Fläche und invariant bei isometrischen Abbildungen.

BEWEIS. Wir verwenden 5.40. Bei $\dim M = 2$ ist $K(v, w)$ unabhängig von v, w und wir haben

$$K(v, w) = K(\partial_1, \partial_2) = \frac{\langle R(\partial_1, \partial_2)\partial_1, \partial_2 \rangle}{\langle \partial_1, \partial_1 \rangle \langle \partial_2, \partial_2 \rangle - \langle \partial_1, \partial_2 \rangle^2} = \frac{\langle R(\partial_1, \partial_2)\partial_1, \partial_2 \rangle}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

Mit dem Lemma von Gauß erhält man

$$\begin{aligned} & \langle \widetilde{R}(\partial_1, \partial_2)\partial_1, \partial_2 \rangle - \langle R(\partial_1, \partial_2)\partial_1, \partial_2 \rangle \\ &= \langle \text{II}(\partial_1, \partial_2), \text{II}(\partial_2, \partial_1) \rangle - \langle \text{II}(\partial_1, \partial_1), \text{II}(\partial_2, \partial_2) \rangle \\ &= \langle h_{12}n(p), h_{12}n(p) \rangle - \langle h_{11}n(p), h_{22}n(p) \rangle = h_{12}h_{12} - h_{11}h_{22}. \end{aligned}$$

Aus $\widetilde{R} = 0$ folgt nun

$$K = \frac{\det(h_{jk})}{\det(g_{jk})} = \frac{\langle R(\partial_1, \partial_2)\partial_1, \partial_2 \rangle - \widetilde{R}(\dots)}{\det(g_{jk})} = K(v, w). \quad \square$$

BEMERKUNG 5.43. Für jede zweidim. Riemannsche MF heißt ihre Schnittkrümmung Gaußsche Krümmung. Allgemein ist Schnittkrümmung $K(v, w)$ gleich der Gaußkrümmung der Fläche $\exp_p(\mathbb{R}v + \mathbb{R}w)$.

Wir wollen noch auf das Einbettungsproblem für Riemannsche Räume eingehen: Ist $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Riemannscher Raum, gibt es dann eine Einbettung $g: M \rightarrow \widetilde{M} \subseteq \mathbb{R}^d$, sodass die Teilmannigfaltigkeit \widetilde{M} mit der vom \mathbb{R}^d induzierten Metrik, isometrisch zu $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist? Ist $\dim(M) = 2$ und $d = 3$, so folgt aus dem Theorema egregium, dass die Gaußschen Krümmungen von M und \widetilde{M} in p und \widetilde{p} übereinstimmen, falls die beteiligten Mannigfaltigkeiten und Metriken C^3 sind. Ist $K \leq 0$ für M , gibt es wegen 2.21 keine C^2 -Einbettung g . Auskunft über die C^k ($k > 2$) und C^1 -Einbettungsmöglichkeiten gibt der folgende Satz:

SATZ 5.44. (*Einbettungssatz von Nash*) Sei $(i) \langle \cdot, \cdot \rangle$ eine C^k Riemannsche Metrik ($3 \leq k \leq \infty$) in M ($\dim M = n$). Dann gibt es eine C^k -Teilmannigfaltigkeit \widetilde{M} des \mathbb{R}^d , die mit der vom \mathbb{R}^d induzierten Metrik isometrisch zu $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist; dabei ist $d \leq \frac{1}{2}n(n+1)(3n+11)$; bzw. $d \leq \frac{1}{2}n(3n+11)$ für M kompakt. (ii) Für jedes $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gibt es eine C^1 -Teilmannigfaltigkeit $\widetilde{M} \subset \mathbb{R}^d$ isometrisch zu M , sofern $d > n$ und es eine Teilmannigfaltigkeit $\widetilde{\widetilde{M}} \subset \mathbb{R}^d$ diffeomorph zu M gibt

BEWEIS. siehe [Nash 1956] und für den C^1 -Fall: [Nash 1954] und [Kuiper 1955]. \square

⁶... sponte perducit ad hoc egregium THEOREMA: Si superficies curva in quamcunque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet., [Gauß 1827, p. 24] Die Übersetzung lautet: Wenn eine gekrümmte Fläche in eine beliebige andere Fläche verbogen wird, bleibt das Maß der Krümmung in den einzelnen Punkten unverändert.

5.7. Der Integralsatz von Gauß-Bonnet.

DEFINITION 5.45. (*Orientierung*) M heißt orientierbar, wenn es eine Überdeckung durch Karten $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt, sodass $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ orientierungserhaltend ist (d.h. die Jacobi-Determinante des Parameterwechsels positiv ist). Eine Basis v_1, \dots, v_n von $T_p M$ heißt positiv orientiert, wenn für eine (und dann jede) Karte φ_j die Vektoren $d\varphi_j(v_1), \dots, d\varphi_j(v_n)$ im \mathbb{R}^n positiv orientiert sind.

LEMMA 5.46. *Hat eine $(m-1)$ -dim. Teilmannigfaltigkeit M des \mathbb{R}^m ein wohldefiniertes Normalvektorfeld n , so kann M dadurch orientiert werden, dass man (v_1, \dots, v_{m-1}) als positiv definiert, wenn (v_1, \dots, v_{m-1}, n) im \mathbb{R}^m positiv orientiert ist.*

BEWEIS. Wir zeigen, dass diese Orientierung konsistent mit der weiter oben definierten ist. Angenommen, M ist durch Teilmannigfaltigkeits-Karten überdeckt, von denen jede einzelne zusammenhängend ist. Diejenigen Kartenabbildungen φ , für die positive Basen (im Sinne der ‘neuen’ Definition) durch $d\varphi$ auf positive Basen in $\mathbb{R}^{m-1} \times 0$ abgebildet werden, verändert man nicht; die anderen ersetzt man durch $\sigma \circ \varphi$, wobei σ die Spiegelung an der Koordinatenhyperebene $x^0 = 0$ ist.

Dann stimmt die durch die modifizierten Karten definierte Orientierung mit der durch das Normalvektorfeld gegebenen überein. \square

BEMERKUNG 5.47. Sei M eine 2-dim. MF, und sei E_1, E_2 eine positive Orthonormalbasis in $T_p M$, sodass für die Gaußsche Krümmung $K_p = \langle R(E_1, E_2)E_1, E_2 \rangle$ gilt. Sei $V_p = v^j E_j$ und $W_p = w^k E_k$. Dann ist

$$\langle R(V, W)E_1, E_2 \rangle = \sum v^j w^k \langle R(E_i, E_j)E_1, E_2 \rangle = (v^1 w^2 - v^2 w^1) K_p.$$

Die Koordinatenmatrix der linearen Abbildung $R(V, W)$ bezüglich der Basis (E_1, E_2) wird erhalten, indem man die Vektoren E_1, E_2 der Abbildung unterwirft und die Bildvektoren wieder in der Basis darstellt, d.h. sie ist gleich

$$\begin{bmatrix} \langle R(V, W)E_1, E_1 \rangle & \langle R(V, W)E_2, E_1 \rangle \\ \langle R(V, W)E_1, E_2 \rangle & \langle R(V, W)E_2, E_2 \rangle \end{bmatrix} \\ = (v^1 w^2 - v^2 w^1) K_p \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

d.h. $R(V, W)Z = \text{area}(V, W) \cdot K_p \cdot Z^\perp$, wobei Z^\perp aus Z durch eine Drehung um $+90^\circ$ (im Sinne der Orientierung) entsteht.

LEMMA 5.48. (*Frenetsche Ableitungsgleichungen*) *Ist M orientierbar und zweidimensional und c eine Kurve in M , so setzen wir $e_1 = \dot{c}/\|\dot{c}\|$. Wähle \tilde{e}_2 so, dass e_1, \tilde{e}_2 eine positive Orthonormalbasis in $T_{c(t)} M$ bildet. Dann gilt*

$$\frac{D}{dt} e_1 = \|\dot{c}\| \tilde{\kappa}_g \tilde{e}_2,$$

und $|\tilde{\kappa}_g|$ ist die geodätische Krümmung von c .

BEWEIS. Wegen $0 = \frac{d}{dt} \langle e_1, e_1 \rangle = 2 \langle \frac{D}{dt} e_1, e_1 \rangle$ ist $\frac{D}{dt} e_1$ ein Vielfaches von \tilde{e}_2 . Dass der Betrag des Faktors $\tilde{\kappa}$ mit κ_g übereinstimmt, folgt aus $\kappa_g = \|\frac{D}{dt} e_1\|/\|\dot{c}\|$ (vgl. pp. 18, 40). \square

DEFINITION 5.49. (*geodätische Krümmung*) Die Größe $\tilde{\kappa}_g$ aus 5.48 heißt die orientierte geodätische Krümmung von c . Sie werde ab jetzt mit κ_g bezeichnet.

DEFINITION 5.50. (*zulässiges Gebiet*) Sei M eine orientierte 2-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und c eine geschlossene, stückweise C^2 -Kurve, die in einem Parametergebiet liegt und ein einfach zusammenhängendes Gebiet berandet. Seien α_i die Drehwinkel von \dot{c} an den Stellen, wo c nicht differenzierbar ist, gemessen im mathematisch positiven Sinn. Dies sei ein ‘zulässiges Gebiet G , berandet von einer Kurve c mit Eckenwinkeln α_i ’.

DEFINITION 5.51. (*historisch gemessener Winkel*) Sei c eine Kurve in einer orientierten 2-dim. MF und seien $V(t), W(t)$ Vektorfelder längs c mit $V(t), W(t) \neq 0$. Sei $E = (E_1, E_2)$ die positive Orthonormalbasis in $T_{c(t)}M$ mit $E_1 = V/\|V\|$, und sei φ eine stetige Funktion, sodass die Koordinatenspalte von W in der Basis E die Form

$$\Phi_E(W) = \|W\| \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \text{ besitzt. Dann ist } \angle_a^b(W/V) := \varphi(b) - \varphi(a)$$

der historisch gemessene Drehwinkel von W gegenüber V in $[a, b]$. Ist W nur stückweise stetig, und dreht sich an endlich vielen Stellen t_i um einen Winkel α_i , so sei $\varphi(t)$ so definiert, dass der Sprung von φ bei t_i gleich α_i ist.

LEMMA 5.52. *Der historisch gemessene Winkel ist wohldefiniert, und es gilt $\angle_a^b(V_3/V_1) = \angle_a^b(V_2/V_1) + \angle_a^b(V_3/V_2)$.*

BEWEIS. Die in der Definition geforderte Funktion φ ist lokal sicherlich definiert und bis auf Vielfaches von 2π bestimmt. Wegen der Kompaktheit des Intervalls $[a, b]$ kann man ein global definiertes φ aus solchen Teilen zusammensetzen. Seien nun $\varphi, \bar{\varphi}$ zwei Funktionen, die die Definitionsgleichung erfüllen, und

sei $\Delta(t) = \varphi(t) - \bar{\varphi}(t)$. Wenn wir $\Delta(t) = \text{const}$ zeigen können, ist der Gesamtdrehwinkel wohldefiniert. Δ ist stetig, denn $\varphi, \bar{\varphi}$ haben die gleichen Sprunghöhen, wo sie nicht stetig sind. Lokal ist Δ nach dem obigen konstant, d.h. Δ ist konstant. Die Additivität der Winkel folgt nun direkt aus der Definition. \square

SATZ 5.53. (*Umlaufsatz von Hopf*) *Ist c der Rand eines zulässigen Gebiets in der euklidischen Ebene mit $c(0) = c(L) = p$ und Außenwinkeln α_i , und ist weiters ∂_1 ein konstantes Vektorfeld, so gilt $\angle_0^L(\dot{c}/\partial_1 \circ c) = 2\pi$.*

BEWEIS. Siehe [Hopf 1935] und für den Fall dass $c \in C^1$, auch [do Carmo 1976, p. 396]. \square

LEMMA 5.54. *Der Umlaufsatz von Hopf gilt auch für zulässige Gebiete in Riemannschen Räumen.*

BEWEIS. Nach dem Umlaufsatz von Hopf ist $\psi := \angle_0^L(\dot{c}/\partial_1 \circ c) = 2\pi$, wenn wir im Parametergebiet das euklidische Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ verwenden. Wegen $\dot{c}(0) = \dot{c}(L)$ ist $\psi \in 2\pi\mathbb{Z}$, und ψ variiert stetig bei stetiger Variation von $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Es folgt, dass der Wert von ψ für alle Skalarprodukte $\langle \cdot, \cdot \rangle_t = (1-t) \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle_0 + t \langle \cdot, \cdot \rangle$ gleich 2π ist \square

LEMMA 5.55. Sei G ein zulässigen Gebiet mit Randkurve c ($c(0) = c(L) = p$) und Eckenwinkeln α_i . κ_g sei die geodätische Krümmung von c . Ist $E_1(t)$ ein Parallelfeld, so ist

$$\langle_0^L (E_1/\partial_1 \circ c) = 2\pi - \oint_c \kappa_g ds - \sum \alpha_i.$$

BEWEIS. Wir wählen eine positive Orthonormalbasis E_1, E_2 in $T_p M$ und erzeugen Vektorfelder $E_1(t), E_2(t)$ durch Parallelverschiebung. Sei c nach der Bogenlänge parametrisiert, und sei φ eine Funktion mit $\dot{c} = \cos \varphi E_1 + \sin \varphi E_2$ längs der glatten Semente von c . An der i -ten Sprungstelle von \dot{c} sei der Sprung von φ gleich dem Eckenwinkel α_i . (d.h. φ ist eine Funktion mit $\varphi(L) - \varphi(0) = \langle_0^L (\dot{c}/E_1)$).

Der aus \dot{c} durch eine Drehung um $+90^\circ$ entstehende Vektor m hat die Form $m = -\cos \varphi E_1 + \sin \varphi E_2$. Weiters ist $\frac{D}{dt} \dot{c} = -\dot{\varphi} \sin \varphi E_1 + \dot{\varphi} \cos \varphi E_2$, also $\dot{\varphi} = \kappa_g$ längs der glatten Segmente von c . Es folgt

$$\langle_0^L (\dot{c}/E_1) = \varphi(L) - \varphi(0) = \oint_c \kappa_g ds + \sum \alpha_i.$$

Wir wenden nun 5.52 an; aus

$$\langle_0^L (\dot{c}/\partial_1) = \langle_0^L (E_1/\partial_1) + \langle_0^L (\dot{c}/E_1)$$

folgt direkt die Behauptung. \square

SATZ 5.56. (Integralformel von Gauß-Bonnet) Betrachte ein zulässiges Gebiet G , berandet von einer Kurve c mit Eckenwinkeln α_i . Dann gilt

$$\oint_c \kappa_g ds + \sum \alpha_i = 2\pi - \int_G K dO.$$

BEWEIS. Wir bewegen uns innerhalb eines zulässigen Gebietes, d.h. o.B.d.A. rechnen wir im \mathbb{R}^2 . Wir betrachten die Vektorfelder $Y = \partial_1/\|\partial_1\|$ und Y^* , die in jedem Punkt eine positive Orthonormalbasis bilden. Weiters definieren wir die skalaren Funktionen $P = \langle \nabla_1 Y, Y^* \rangle$ und $Q = \langle \nabla_2 Y, Y^* \rangle$. Wir betrachten das folgende Kurvenintegral längs c , wobei wir $\dot{c} = (\dot{u}^1, \dot{u}^2)$ und $du^i = \dot{u}^i dt$ setzen:

$$\begin{aligned} \oint P du^1 + Q du^2 &= \oint \langle \dot{u}^1 \nabla_1 Y + \dot{u}^2 \nabla_2 Y, Y^* \rangle dt \\ &= \oint \langle \nabla_{\dot{u}^1 \partial_1 + \dot{u}^2 \partial_2} Y, Y^* \rangle dt = \oint \langle \frac{D}{dt} Y, Y^* \rangle dt \end{aligned}$$

Sei $E = (E_1, E_2)$ eine positive Orthonormalbasis aus Parallelfeldern längs der Kurve c , sei φ stetig mit $\Phi_E(Y) = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}$, $\Phi_E(Y^*) = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix}$. Dann ist $\Phi_E(\frac{D}{dt} Y) = \dot{\varphi} \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix}$, d.h. $\langle \frac{D}{dt} Y, Y^* \rangle = \dot{\varphi}$. Es folgt also

$$\oint \langle \frac{D}{dt} Y, Y^* \rangle dt = \langle_0^L (Y/E_1) = -\langle_0^L (E_1/\partial_1) = \oint \kappa_g ds + \sum \alpha_i - 2\pi.$$

Nun verwenden wir den Integralsatz von Green, um das obige Kurvenintegral in ein Flächenintegral zu verwandeln:

$$\begin{aligned} & \iint (\partial Q / \partial u^1 - \partial P / \partial u^2) \\ &= \iint (\partial_1 \langle \nabla_2 Y, Y^* \rangle - \partial_2 \langle \nabla_1 Y, Y^* \rangle) \\ &= \iint (\langle \nabla_1 \nabla_2 Y, Y^* \rangle + \langle \nabla_2 Y, \nabla_1 Y^* \rangle - \langle \nabla_2 \nabla_1 Y, Y^* \rangle - \langle \nabla_1 Y, \nabla_2 Y^* \rangle) \end{aligned}$$

Wegen $\langle Y, Y \rangle = \text{const}$ ist $\frac{d}{dt} \langle Y, Y \rangle = 2 \langle \frac{D}{dt} Y, Y \rangle = 0$, d.h. die kovariante Ableitung von Y längs irgendeiner Kurve ist orthogonal zu Y . Dasselbe gilt für Y^* . Deshalb verschwinden $\langle \nabla_2 Y, \nabla_1 Y^* \rangle$ und $\langle \nabla_1 Y, \nabla_2 Y^* \rangle$. Das Integral ist also weiter gleich

$$\begin{aligned} & \iint \langle -R(\partial_1, \partial_2) Y, Y^* \rangle = \iint \langle -\text{area}(\partial_1, \partial_2) K Y^*, Y^* \rangle \\ &= - \iint K \sqrt{\det(g_{jk})} = - \int_M K dO. \end{aligned} \quad \square$$

BEMERKUNG 5.57. Der Satz gilt auch dann, wenn G nicht in einem Kartengebiet liegt.

BEMERKUNG 5.58. Ist c der Rand eines zulässigen Gebietes und V ein Parallelsfeld längs c , so ist der Gesamtdrehwinkel von V gleich $\angle_0^L(V/\partial_1 \circ c) = \int K dO$.

Die Drehung um diesen Winkel ist in der Holonomiegruppe H_p enthalten. Ist die Gaußkrümmung $K(p) \neq 0$ und U eine offene Umgebung von p , so kann man durch geodätische Parallelverschiebung längs geeigneter kleiner geschlossener Kurven in U alle Drehungen um Winkel in $[0, \varepsilon]$ erzeugen. Wegen $n \cdot [0, \varepsilon] \supseteq [0, 2\pi]$ für geeignetes n ist dann $H_p^U \geq \text{SO}_2$ für alle U und $H_p^\infty = \text{SO}_2$.

SATZ 5.59. (*'Theorema Elegantissimum' von Gauß*) Die Summe der Innenwinkel in einem geodätischen Dreieck Δ (ein zulässiges Gebiet, das von drei geodätischen Linien berendet wird) ist gleich

$$\pi + \int_{\Delta} K dO.$$

BEWEIS. Wir wenden die Integralformel von Gauß-Bonnet an. Die Innenwinkel β_i und die Eckenwinkel α_i stehen in der Relation $\beta_i = \pi - \alpha_i$. Die geodätische Krümmung von geodätischen Linien verschwindet. Damit ist

$$(\pi - \beta_1) + (\pi - \beta_2) + (\pi - \beta_3) = 2\pi - \int K dO. \quad \square$$

SATZ 5.60. (*Satz von Gauß-Bonnet*) Ist M eine 2-dimensionale orientierbare kompakte Mannigfaltigkeit, zerlegt durch zulässige Gebiete, Seien e, f, k die Anzahl der Ecken, Flächen, und Kanten dieser Zerlegung, und sei $\chi = e + f - k$. Dann ist

$$\int_M K = 2\pi(e + f - k) = 2\pi\chi.$$

BEWEIS. (i) In jedem Parametergebiet ist ein positiver Umlaufsinn für den Rand eines einfach zusammenhängenden Gebietes definiert (innen ist links). Nachdem die Orientierung vom Parametergebiet unabhängig ist (M sei orientiert), wird beim Durchlaufen des Randes aller Gebiete

jedes Segment genau zweimal in 2 verschiedenen Richtungen durchlaufen.

(ii) Die Summe der Innenwinkel β_{e_i, G_j} der in einer Ecke e_i zusammenstoßenden Gebiete G_j ist gleich 2π , und jeder einzelne Innenwinkel ist gleich $\pi - \alpha_{e_i, G_j}$, wobei α_{e_i, G_j} der Eckenwinkel des Gebietes G_j an der Ecke e_i ist.

(iii) Summieren wir $\oint \kappa_g + \sum \alpha_i = 2\pi - \int K dO$ für alle Gebiete auf, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Kanten}} \underbrace{\left(\int \kappa_g - \int \kappa_g \right)}_{=0 \text{ nach (i)}} + \sum_{\text{Ecken } e_j} \sum_{\substack{\text{Gebiete } G_i \\ \text{an Ecke } e_j}} (\pi - \beta_{e_j, G_i}) &= \sum_{\text{Gebiete } G_j} \left(2\pi - \int_{G_j} K dO \right) \\ \implies \sum_{\text{Gebiete}} \sum_{\substack{\text{Ecken} \\ \text{an Gebiet}}} \pi - \underbrace{\sum_{\text{Ecken}} 2\pi}_{\text{nach (ii)}} &= 2\pi f - \int K dO \\ \implies 2k\pi - e \cdot 2\pi &= 2\pi f - \int K dO. \quad \square \end{aligned}$$

Der Satz gilt auch dann, wenn die einzelnen Gebiete nicht in einer Kartenumgebung enthalten sind.

SATZ 5.61. *Sei M wie in 5.60. Dann besitzt M eine Zerlegung wie in 5.60 gefordert.*

DEFINITION 5.62. (*Euler-Charakteristik*) Die Größe $e + f - k = \chi$ einer Zerlegung nach 5.60 heißt Euler-Charakteristik $\chi(M)$ von M .

SATZ 5.63. $\chi(M)$ ist wohldefiniert, und unabhängig von der Zerlegung.

BEWEIS. Das folgt direkt aus dem Satz von Gauß-Bonnet, weil $\int K dO$ unabhängig von der Zerlegung ist. \square

BEISPIEL 5.64. Sei $M = S^2$. Wegen $K = 1$ ist $\int K dO = 4\pi$. Es folgt, dass für jede zulässige Zerlegung $e + f - k = 2$ gilt, d.h. $\chi(S^2) = 2$.

SATZ 5.65. *Das Oberflächenintegral der Gaußschen Krümmung ist von der Riemannschen Metrik unabhängig. Es ist immer ein ganzzahliges Vielfaches von 2π .*

BEWEIS. Das folgt direkt aus dem Satz von Gauß-Bonnet, weil $\chi(M)$ unabhängig von der Riemannschen Metrik ist. \square

BEISPIEL 5.66. Sei M diffeomorphes Bild einer Sphäre, mit beliebiger Riemannscher Metrik. Dann ist $\int K dO = 4\pi$. Ein Torus besitzt eine Zerlegung mit $e + f - k = 0$. Daher ist $\chi(M) = 0$ und $\int_M K dO = 0$ für jedes diffeomorphe Bild M des Torus, und für jede Riemannsche Metrik auf M .

FOLGERUNG 5.67. *Ist $\chi(M) \neq 0$, so gibt es auf M keine Riemannsche Metrik mit verschwindender Krümmung. Das Nichtverschwinden von $\chi(M)$ stellt ein Hindernis dar.*

6. RELATIVITÄTSTHEORIE

In diesem Kapitel wird das von A. Einstein eingeführte Modell der allgemeinen Relativitätstheorie betrachtet, in welchem die Raumzeit eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit ist, deren geodätische Linien die Lebenslinien von frei fallenden Teilchen darstellen. Die Bogenlänge entlang Lebenslinien ist die Eigenzeit, die dieses Teilchen durchlebt. Die zulässigen pseudo-Riemannschen Metriken werden aus der Forderung abgeleitet, dass die relative Bewegung von Teilchen zueinander, die mit gleichen Anfangsbedingungen starten, analog zur bekannten Newtonschen Mechanik verläuft. Die dabei behandelten Effekte 2. Ordnung (Gezeiteneffekte) drücken sich im Auseinander- bzw. Zusammenlaufen von Lebenslinien aus und sind daher über Jacobifelder beschreibbar.

DEFINITION 6.01. (*4-dim. pseudo-euklidischer Raum*) Dieser ist der \mathbb{R}^4 mit Koordinaten (x^0, \dots, x^3) und dem Skalarprodukt $\langle x, y \rangle_{\text{pe}} = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$.

Wir interpretieren die Punkte des \mathbb{R}^4 als Ereignisse mit einer Zeit- und drei Ortskoordinaten. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^4$ ist *flach* oder *raumartig*, wenn $\langle v, v \rangle_{\text{pe}} < 0$, er ist *isotrop* oder *lichtartig*, wenn $\langle v, v \rangle_{\text{pe}} = 0$, und *steil* oder *zeitartig*, wenn $\langle v, v \rangle_{\text{pe}} > 0$.

DEFINITION 6.02. (*Lebenslinie, Eigenzeit*) Eine Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^4$ heißt Lebenslinie, wenn \dot{c} zeitartig ist und $\dot{c}^0 > 0$. Die Bogenlänge $L_a^b(c)$ heißt die Eigenzeit längs der Lebenslinie, die zwischen den Ereignissen $c(a)$ und $c(b)$ verbraucht wird.

BEMERKUNG 6.03. Diese Bezeichnungen kommen von der Interpretation des pseudo-euklidischen \mathbb{R}^4 als Modell der speziellen Relativitätstheorie.

Im pseudo-euklidischen \mathbb{R}^4 operiert die Gruppe G der pseudo-euklidischen Kongruenztransformationen $g : x \mapsto A \cdot x + b$ mit $A \in O_{1,3}$, d.h. $A^T \cdot \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \cdot A = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Wir schränken wir uns im speziellen auf solche $A \in O_{1,3}$ ein, die 'in die Zukunft' weisende Vektoren ($v \in \mathbb{R}^4$ mit $v^0 > 0$) wieder auf solche abbilden.

SATZ 6.04. (*A. D. Alexandrov*) Sei $d_{\text{pe}}(p, q) = \langle p - q, p - q \rangle_{\text{pe}}$. Jede Bijektion $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ mit $d_{\text{pe}}(p, q) = 0 \iff d_{\text{pe}}(g(p), g(q)) = 0$ ist eine pseudo-euklidische Kongruenztransformation [Alexandrov 1996].

SATZ 6.05. (*Zwillingsparadoxon*) Die 'längsten' (im Sinne der Eigenzeit) Lebenslinien, die zwei Punkte $p, q \in \mathbb{R}^4$ verbinden, sind die monoton parametrisierten Geraden.

BEWEIS. $p - q$ ist zeitartig. Sei $d_{\text{pe}}(p, q) = T$. Dann existiert eine pseudo-euklidische Kongruenztransformation mit $p = (0, 0, 0, 0)$ und $q = (T, 0, 0, 0)$. Sei o.B.d.A. $c(0) = p$, $c(1) = q$. Für jede Lebenslinie ist $\dot{c}^0(1) > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} L_0^1(c) &= \int_0^1 \sqrt{(\dot{c}^0)^2 - (\dot{c}^1)^2 - \dots} \\ &\leq \int_0^1 \sqrt{(\dot{c}^0)^2} = \int_0^1 \dot{c}^0 = c^0 \Big|_0^1 = T \end{aligned}$$

mit Gleichheit genau für $\dot{c}^1 = \dot{c}^2 = \dot{c}^3 = 0$. \square

DEFINITION 6.06. (*Pseudo-Riemannsche 4-dim. MF*) Sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einem differenzierbaren $(2, 0)$ -Tensorfeld $\langle \cdot, \cdot \rangle \in \mathfrak{X}_2 M$, sodass $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ eine symmetrische Bilinearform in $T_p M$ der Signatur $(+, -, -, -)$ ist. Dann ist $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein pseudo-Riemannscher Raum der Dimension 4.

Wir verwenden die in der Riemannschen Geometrie von der Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ abgeleiteten Begriffe wie kovariante Ableitung, geodätische Linie, etc., ohne darauf Rücksicht zu nehmen, dass sie eventuell nicht dieselben Eigenschaften haben wie im Riemannschen Fall. Ein Beispiel für eine solche Diskrepanz ist der Unterschied zwischen 1.08 und 6.05.

Analog zum pseudo-euklidischen \mathbb{R}^4 gibt es die Unterscheidung zwischen raumartigen, lichtartigen, und zeitartigen Vektoren $v \in T_p M$ durch $\langle v, v \rangle < 0$,

$\langle v, v \rangle = 0$, und $\langle v, v \rangle > 0$. Wir verwenden $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ als Modell für die Raumzeit der allgemeinen Relativitätstheorie.

DEFINITION 6.07. (*Lebenslinie, Eigenzeit*) Eine Kurve $c : I \rightarrow M$ heißt Lebenslinie, wenn $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle > 0$. Die Bogenlänge $L_a^b(c)$ heißt Eigenzeit längs der Lebenslinie zwischen $c(a)$ und $c(b)$.

DEFINITION 6.08. (*Freier Massenpunkt, Lichtteilchen*) Eine Lebenslinie gehört zu einem freien Massenpunkt bzw. frei fallenden Teilchen, wenn sie eine geodätische Linie ist, d.h. $\frac{D}{dt}\dot{c} = 0$. Eine lichtartige Geodätische (d.h. $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = 0$) ist die Lebenslinie eines Lichtteilchens (“Photons”).

Um als Modell für eine Raum-Zeit im Sinne der allgemeinen Relativitätstheorie zu dienen, muss die pseudoriemannsche Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in M bestimmten Bedingungen genügen (Sie muss die ‘Feldgleichungen’ erfüllen).

Als Motivation für die ‘Feldgleichungen im Vakuum’ betrachten wir zunächst die klassische Newtonsche Mechanik und danach ein relativistisches Analogon:

BEISPIEL 6.09. (*Gezeiten, Newtonsch*) Wir betrachten Punkte $x(s)$, die sich im \mathbb{R}^3 mit Koordinaten u^1, u^2, u^3 in einem Kraftfeld mit Potential φ bewegen — zum Zeitpunkt t befinden sie sich bei $x(s, t)$. Wir bezeichnen Ableitungen nach Variablen t, s, u^1, \dots mit $x_{,t}, x_{,s}, \varphi_{,1}, \dots$ u.s.w. Die Bewegungsgleichung ist gegeben durch

$$x_{,tt}(s, t) = -\nabla\varphi(x(s, t)).$$

Wir beobachten das ‘Auseinanderdriften der Bahnkurven’:

$$\Delta x(t) = x(s, t) - x(0, t) \approx s \cdot x_{,s},$$

$$\begin{aligned} x_{,tts} &= -\frac{\partial}{\partial s} \begin{bmatrix} \varphi_{,1} \\ \varphi_{,2} \\ \varphi_{,3} \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} \varphi_{,11} & \dots & \varphi_{,13} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{,31} & \dots & \varphi_{,33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{,s}^1 \\ x_{,s}^2 \\ x_{,s}^3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

D.h. längs der Bahnkurve $x(0, t)$ erfüllt die ‘infinitesimale Differenz zur Nachbarbahnkurve $x(0 + ds, t)$ ’ die Gleichung

$$\ddot{x}_{,s} = L(t) \cdot x_{,s},$$

wobei die Koordinatenmatrix der linearen Abbildung $L(t)$ durch $(\varphi_{,ij}(x(0, t)))$ gegeben ist (siehe die obige Matrixgleichung).

Setzt man beispielsweise das Potential als Gravitationspotential in der Form $\varphi(x) = -1/\|x\|$ an, so ergibt sich an der Stelle $(r, 0, 0)$ die Matrix

$$L(r, 0, 0) = \frac{1}{|r|^3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dass die Spur der Matrix verschwindet, ist eine Konsequenz der Newtonschen Feldgleichungen

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = 4\pi G\rho$$

mit der Gravitationskonstante G und der Dichte der Materie ρ ($\rho = 0$ im Vakuum). Als Motivation für dieses Beispiel können die Wassermassen der Erdoberfläche im Gravitationsfeld des Mondes dienen.

BEISPIEL 6.10. (*Gezeiten, relativistisch*) Wir betrachten die Lebenslinien $x(s, t)$ von frei fallenden Massenpunkten $x(s)$. $c_s(t) = x(s, t)$ sind geodätische Linien. Wir wählen eine Basis E_0, \dots, E_3 in $T_{x(0,0)}M$ mit $\dot{c}_0 = E_0$.

Wir erzeugen Vektorfelder $E_0(0), \dots, E_3(t)$ längs $c_0(t)$ durch geodätische Parallelverschiebung, und verwenden die lokale Parametrisierung

$$\begin{aligned} g(u^0, \dots, u^3) &= \exp_{c_0(u^0)}(u^1 E_1(u^0) \\ &\quad + u^2 E_2(u^0) + u^3 E_3(u^0)). \end{aligned}$$

Eine solche Karte für M heißt Fermi-Koordinatensystem bezüglich des frei fallenden Beobachters $x(0, t) = c_0(t)$, wenn zusätzlich $(g_{jk}) = \operatorname{diag}(-1, 1, 1, 1)$ in $c(0)$ und damit längs c . Längs der Kurve $c_0(u^0)$ ist $\partial_0 = E_0, \dots, \partial_3 = E_3$.

Wir betrachten eine einparametrische Schar $x_s(t) = g(u(s, t))$ von Lebenslinien. Weil Lebenslinien Geodätische sind, ist das Vektorfeld

$$\begin{aligned} J(t) &= \left. \frac{\partial x(s, t)}{\partial s} \right|_{s=0} \\ &= u_{,s}^0 \partial_0 + \dots + u_{,s}^3 \partial_3 = u_{,s}^j E_j, \end{aligned}$$

das das ‘Auseinanderdriften der Lebenslinien’ mißt, ein Jacobi-Feld und erfüllt nach 5.17 die Differentialgleichung

$$J'' = -R(\dot{c}_0, J)\dot{c}_0.$$

Da E_0, \dots, E_3 Parallelfelder sind, gilt

$$J'' = u_{,stt}^0 E_0 + \dots + u_{,stt}^3 E_3.$$

Wir bestimmen die Koordinatenmatrix der linearen Abbildung $-R(\dot{c}_0, \cdot)\dot{c}_0$ bezüglich der Basis E_0, \dots, E_3 in einem

Punkt der Geodätischen $x(0, t)$. Zu-
vor überlegen wir uns noch einen Zu-
sammenhang zwischen den Koeffizien-
ten R_{ijkl} und R_{ijk}^l : Wegen $(g_{jk}) =$
 $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$ ist

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= \langle R(E_i, E_j)E_k, E_l \rangle \\ &= \langle R_{ijk}^p E_p, E_l \rangle \\ &= \begin{cases} +R_{ijk}^l & \text{für } l = 0 \\ -R_{ijk}^l & \text{für } l \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Es ist $R_{iik}^l = 0$, und wegen $R_{ijkk} = 0$
ist auch $R_{ijk}^k = 0$. Wegen $R_{ijkl} = R_{klij}$,
also speziell $R_{0j0k} = R_{0k0j}$, gilt hier bei
 $k, l > 0$, dass $R_{0j0}^k = R_{0k0}^l$:

$$\begin{aligned} -R(\dot{c}_0, E_k)\dot{c}_0 &= -R(E_0, E_k)E_0 \\ &= -R_{0k0}^l E_l \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} J'' &= \begin{bmatrix} x_{,stt}^0 \\ \vdots \\ x_{,stt}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{000}^0 & \cdots & R_{030}^0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{000}^3 & \cdots & R_{030}^3 \end{bmatrix} \cdot J \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_{010}^1 & \cdots & R_{030}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & R_{010}^3 & \cdots & R_{030}^3 \end{bmatrix} \cdot J. \end{aligned}$$

D.h. die geodätische Abweichung wird,
genauso wie im Newtonschen Fall, durch
eine symmetrische (3×3) -Matrix be-
schrieben. Es liegt daher nahe, vom
Krümmungstensor zu fordern, dass die
Spur dieser linearen Abbildung ver-
schwindet:

$$\underbrace{R_{000}^0}_{=0} + R_{010}^1 + R_{020}^2 + R_{030}^3 = 0,$$

bzw. koordinatenfrei

$$\text{tr}(R(E_0, \cdot)E_0) = 0.$$

Nachdem die Auswahl der Lebenslinie
(und des Vektors E_0) beliebig war, ist
eine naheliegende Forderung an M , dass
 $\text{tr}(R(v, \cdot)v) = -\text{Ric}(v, v) = 0$ für alle v .

Der Ricci-Tensor ist symmetrisch:

BEWEIS. Es ist $\text{Ric}(v, w) = \text{tr}(R(\cdot, v)w)$
 $= R_{ij}v^i w^j$. Zu zeigen ist $R_{ij} = R_{ji}$. Es
ist $R_{ij} = \text{tr}(R(\cdot, E_i)E_j) = \text{tr}(R_{kij}^l) =$
 $\sum_k R_{kij}^k$. Wir verwenden eine Parame-
trisierung, sodass an der betrachteten
Stelle $g_{jk} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Dann
ist (siehe oben) $R_{ljk}^l = \pm R_{ljk} =$
 $\pm(-1)(-1)R_{jllk} = \pm R_{lkjl} = R_{lkj}^l$. \square

Deshalb folgt aus

$$\begin{aligned} \text{Ric}(v, w) &= \frac{1}{2}(\text{Ric}(v+w, v+w) \\ &\quad - \text{Ric}(v, v) - \text{Ric}(w, w)) \end{aligned}$$

die Gleichung

$$\text{Ric}(v, w) = 0$$

für alle v, w .

DEFINITION 6.11. (*Feldgleichungen im
Vakuum*) Ein vierdimensionaler pseu-
do-Riemannscher Raum $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ dient
als mathematisches Modell für die Be-
wegung von Teilchen im Vakuum, wenn
der Ricci-Tensor verschwindet.

BEISPIEL 6.12. (*Schwarzschild-Metrik*)
Sei $M = \{(u^0, \dots, u^3) \in \mathbb{R}^4 \mid (u_1)^2 +$
 $(u_2)^2 + (u_3)^2 > R^2\}$. Sei $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$,

$$g(t, r, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} t \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{bmatrix}$$

eine lokale Parametrisierung von M . Die
pseudo-Riemannsche Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in M
habe bezüglich dieser Karte die Koeffizi-
enten

$$g_{tt} = \frac{r-R}{r}, g_{rr} = \frac{r}{R-r},$$

$$g_{\varphi\varphi} = -r^2, g_{\theta\theta} = -r^2 \sin^2 \varphi.$$

Alle gemischten Koeffizienten sind gleich
0. Man überzeugt sich prinzipiell leicht,
dass der Ricci-Tensor verschwindet. Es
handelt sich um ein Modell des Gravi-
tationsfeldes eines sphärisch-symmetri-
schen Körpers.

A. ANHANG

A.1. Geometrie.

DEFINITION A.01. (*Volumen*) Sei V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum, versehen mit einem Skalarprodukt so, dass eine feste Orthonormalbasis Determinante 1 besitzt. Dann ist das orientierte Volumen des von n Vektoren aufgespannten Parallelepeds gegeben durch $\overrightarrow{\text{vol}}(u_1, \dots, u_n) = \det(u_1, \dots, u_n)$. Das Volumen ist definiert durch $\text{vol} = |\overrightarrow{\text{vol}}|$.

Das r -dimensionale Volumen $\text{vol}(v_1, \dots, v_r)$ von r Vektoren wird in einem r -dimensionalen Unterraum berechnet, in dem v_1, \dots, v_r liegen.

SATZ A.02. *Das r -dimensionale Volumen des von den Vektoren v_1, \dots, v_r aufgespannten Parallelepeds im \mathbb{R}^n ist gegeben durch*

$$\text{vol}(u_1, \dots, u_r)^2 = \det(\langle u_j, u_k \rangle_{j,k=1}^r).$$

DEFINITION A.03. (*Kreuzprodukt*) e_1, \dots, e_n seien die Vektoren einer Orthonormalbasis in einem n -dimensionalen euklidischen Vektorraum V und (x_i^j) seien die Koordinaten von x_i bezüglich dieser Basis. Das Kreuzprodukt von $x_1, \dots, x_{n-1} \in V$ ist durch Entwickeln der folgenden symbolischen Determinante nach der letzten Spalte gegeben:

$$x_1 \times \cdots \times x_{n-1} := \begin{vmatrix} x_1^1 & \cdots & x_{n-1}^1 & e_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & e_n \end{vmatrix}$$

SATZ A.04. *Das Kreuzprodukt von x_1, \dots, x_{n-1} steht orthogonal auf alle x_i , es ergänzt x_1, \dots, x_{n-1} zu einer positiv orientierten Basis (falls x_1, \dots, x_{n-1} linear unabhängig sind), und*

$$\|x_1 \times \cdots \times x_{n-1}\| = \text{vol}(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

DEFINITION A.05. (*Liesche Algebra*) \mathfrak{g} heißt Liesche Algebra, wenn \mathfrak{g} ein Vektorraum ist, und eine bilineare Abbildung $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ mit den folgenden Gesetzen definiert ist: (i) $[x, x] = 0$ (ii) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ (Jacobi-Identität).

BEISPIEL A.06. \mathbb{R}^3 mit $[x, y] = x \times y$ ist eine Liesche Algebra.

A.2. Analysis.

DEFINITION A.07. (C^r) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. f heißt r -mal stetig differenzierbar, wenn alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f^j}{\partial u^{i_1 \dots i_r}}$ existieren und in U stetig sind. Wir schreiben $f \in C^r$.

DEFINITION A.08. (*Differential, regulär, Gradient*) Ist $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar, so sind die lineare Abbildung $df_p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ (das Differential von f bei p) bzw. im Falle $n = 1$ der Gradientenvektor $\text{grad}_p(f)$ von f bei p gegeben durch

$$df_p(v) = \frac{\partial f}{\partial u^1}(p) v^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u^m}(p) v^m, \quad \text{grad}_p(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right).$$

f heißt regulär bei p , wenn df_p regulär ist, d.h. $\nexists v$ mit $df_p(v) = 0$.

BEISPIEL A.09. Bei $n = 1$ ist $df_p(v) = \text{grad}_p(f) \cdot v$ und f regulär $\iff \text{grad}_p(f) \neq 0$.

DEFINITION A.10. (*holomorph, analytisch*) $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph, wenn das Differential von f (wir identifizieren \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2) in jedem Punkt eine gleichsinnige Ähnlichkeit ist. $g : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ist analytisch, wenn g der Realteil einer holomorphen Funktion ist.

SATZ A.11. Sei $g : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ einfach zusammenhängend. Wir schreiben $g(u, v) := g(u + iv)$. Dann ist g analytisch genau dann, wenn $g_{,uu} + g_{,vv} = 0$ und auch genau dann, wenn lokal $g(z - z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ gilt.

DEFINITION A.12. (*reell-analytisch*) $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist reell-analytisch, wenn lokal um jedes $x_0 \in U$ gilt, dass $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ ist. Funktionen $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ heißen reell-analytisch, wenn jede einzelne Komponente reell-analytisch ist.

SATZ A.13. Jede reell-analytische Funktion $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ kann durch dieselben Potenzreihen, von denen in einer Umgebung V von $U \subset \mathbb{C}$ immer mindestens eine konvergiert, zu einer holomorphen Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ fortgesetzt werden.

BEISPIEL A.14. Sei $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) = g(z) + ih(z)$, $g = \text{Re}(f)$ und $h = \text{Im}(f)$. Identifizieren wir \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 , hat das Differential $df_z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die reelle Koordinatenmatrix $A = \begin{bmatrix} g_{,u} & g_{,v} \\ h_{,u} & h_{,v} \end{bmatrix}$. Da A eine Ähnlichkeit beschreibt (nach Definition von ‘holomorph’), ist die 2. Spalte, aufgefaßt als Vektor im euklidischen \mathbb{R}^2 , die um 90° gedrehte 1. Spalte, d.h. $h_{,u} = -g_{,v}$, $h_{,v} = g_{,u}$ (das sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen). Bei $\zeta = \xi + i\eta$ ist $df(\zeta) = A \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$. Diese Ähnlichkeitsabbildung kann man auch durch die Multiplikation mit einer komplexen Zahl ausdrücken: Es gilt $df(\zeta) = \frac{df}{dz} \cdot \zeta$, wobei $\frac{df}{dz} = g_{,u} + ig_{,v}$ die komplexe Ableitung von f bedeutet.

DEFINITION A.15. (*Diffeomorphismus*) Sind $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, so heißt $f : U \rightarrow V$ Diffeomorphismus, wenn f bijektiv ist, und f und f^{-1} differenzierbar sind.

BEISPIEL A.16. Ist $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ bijektiv und differenzierbar mit $f' \neq 0$, so ist auch f^{-1} differenzierbar mit $(f^{-1})'(t) = f'(f^{-1}(t))$, d.h. f ist Diffeomorphismus.

LEMMA A.17. Ist f ein Diffeomorphismus, so ist f notwendigerweise regulär. Ist $f \in C^r$ und diffeomorph, so ist auch $f^{-1} \in C^r$.

SATZ A.18. (*Satz von der Umkehrfunktion*) Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ bei $p \in \mathbb{R}^n$ regulär, dann existiert eine offene Umgebung V von p , sodass $f : V \rightarrow f(V)$ ein Diffeomorphismus ist. Wir sagen, dass f ein lokaler Diffeomorphismus ist.

SATZ A.19. (*Substitutionsregel*) Ist $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (Riemann- oder Lebesgue-)integrierbar und $\varphi : U \rightarrow V$ diffeomorph, so gilt $\int_U f(x)dx = \int_V (f \circ \varphi)(y)|J(y)|dy$, wobei $J(y)$ die Determinante der $n \times n$ -Matrix $\partial\varphi/\partial y$ ist.

DEFINITION A.20. (*Differentialgleichung*) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $(t_0, u_0) \in (a, b) \times U$ und $f : (a, b) \times U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine C^r -Abbildung ($r \geq 0$). Eine Kurve $c : (a', b') \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt Lösung der Differentialgleichung $\frac{d}{dt}u = f(t, u)$ mit Anfangsbedingung (t_0, u_0) , wenn $a \leq a' < t_0 < b' \leq b$ ist und $c(t_0) = u_0$, $f(t, c(t)) = \dot{c}(t)$ gilt. Die Differentialgleichung heißt linear, wenn f die Gestalt $f(t, u) = f_0(t) + \sum_{j=1}^m u_j f_j(t)$ hat.

SATZ A.21. (*wir verwenden die Bezeichnungen von A.20*) Bei $r \geq 1$ existiert für alle Anfangsbedingungen eine Lösung c_{u_0, t_0} der Differentialgleichung, die bis auf das Intervall (a', b') eindeutig ist. Für eine lineare Differentialgleichung existiert bei $r \geq 0$ eine eindeutige Lösung mit $(a', b') = (a, b)$. In beiden Fällen ist die Abbildung $c : (u_0, t_0, t) \mapsto c_{u_0, t_0}(t) \in \mathbb{R}^m$ aus der Klasse C^r .

DEFINITION A.22. (*metrischer Raum*) $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ ist Metrik und (X, d) metrischer Raum, wenn gilt: (i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$, (ii) $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$, (iii) $d(x, y) + d(y, z) \leq d(x, z)$ für alle $x, y, z \in X$ (Dreiecksungleichung).

Wir verwenden die Schreibweise $B(x, \varepsilon)$ für die Menge $\{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$.

DEFINITION A.23. (*Grenzwert, Cauchyfolge, Vollständigkeit*) Ist X metrischer Raum und $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ Folge, so heißt a Cauchyfolge, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$, sodass aus $n, m > N$ stets $d(a_n, a_m) < \varepsilon$ folgt. α ist Grenzwert von a , wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$, sodass aus $n > N$ stets $d(a_n, \alpha) < \varepsilon$ folgt. Wir schreiben $\alpha = \lim a_n$. Konvergiert jede Cauchyfolge, so heißt (X, d) vollständig.

BEISPIEL A.24. Grenzwerte sind immer eindeutig, falls sie existieren. Mit $d(x, y) = \|x - y\|$ ist \mathbb{R}^n vollständiger metrischer Raum.

DEFINITION A.25. (*Häufungspunkt*) Ein Grenzwert einer Teilfolge einer Folge heißt Häufungspunkt der Folge.

SATZ A.26. *Jeder Häufungspunkt einer Cauchyfolge ist Grenzwert.*

BEWEIS. Sei $\alpha = \lim a_{n_i}$ und $\varepsilon > 0$. $d(a_n, a_m) < \varepsilon/2$ für $n, m > N_2$. Für 0 . Dann gibt es N_1 mit $d(a_{n_i}, \alpha) < \varepsilon/2$ für $n_i > N_1$ und es gibt N_2 mit $d(a_n, a_m) < \varepsilon/2$ für $n, m > N_2$. Gilt dann $n > N := \max(N_1, N_2)$ $\implies d(a_n, \alpha) < \varepsilon$, also $\alpha = \lim a_n$. \square

DEFINITION A.27. (*totale Variation*) Ist M metrischer Raum und $f : [a, b] \rightarrow M$ stetig, so ist die totale Variation von f definiert als $\sup \sum d(f(t_{i+1}), f(t_i))$, wobei das Supremum über alle Unterteilungen $a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$ genommen wird.

A.3. Topologie.

DEFINITION A.28. (*Topologie, offen, abgeschlossen, Basis*) Eine Menge X und eine Menge \mathcal{O} von Teilmengen von X heißt eine Topologie, wenn gilt: (i) $X, \emptyset \in \mathcal{O}$, (ii) $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$, (iii) Die Vereinigung einer Familie von $O_i \in \mathcal{O}$ ist in \mathcal{O} . (X, \mathcal{O}) (oder nur X) heißt dann topologischer Raum. Die Elemente von \mathcal{O} heißen offen und ihre Komplemente abgeschlossen. $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ heißt eine Basis, wenn die Mengen von \mathcal{O} genau die Vereinigungen von Mengen von \mathcal{O}' sind.

BEISPIEL A.29. Durch Komplementbildung erhält man die Aussagen (i) \emptyset und X sind abg., (ii) A_1, A_2 abg. $\Rightarrow A_1 \cup A_2$ abg., (iii) A_i abg. ($i \in I$) $\Rightarrow \bigcap A_i$ ist abg.

Sind $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ Topologien für X , und sind $\mathcal{O}'_1, \mathcal{O}'_2$ deren Basen, so folgt aus $\mathcal{O}'_1 \subseteq \mathcal{O}'_2$ und $\mathcal{O}'_2 \subseteq \mathcal{O}'_1$, dass $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ gilt.

BEISPIEL A.30. Ist X metrischer Raum, so definieren wir eine Topologie durch die ε -Umgebungen $B(x, \varepsilon)$ von Punkten als Basis. Diese Topologie heißt durch die Metrik induziert. Bei $X \subset \mathbb{R}^n$ und der kanonischen Metrik im \mathbb{R}^n spricht man von der Standardtopologie. $U \subseteq X$ ist offen genau dann, wenn $\forall x \in U \exists \varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subseteq U$.

DEFINITION A.31. (*Abschluss*) Für $Y \subseteq X$ sei \bar{Y} der (dann abgeschlossene) Durchschnitt aller abg. Teilmengen von X , die Y enthalten (= Abschluss bzw. abg. Hülle von Y).

DEFINITION A.32. (*Umgebung*) U ist Umgebung von $x \iff \exists V \in \mathcal{O} : V \subseteq U, x \in V$.

DEFINITION A.33. (*stetig, Homöomorphismus*) Sind X, Y topologische Räume, dann ist $f : X \rightarrow Y$ stetig, wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist. Ist f bijektiv und f^{-1} ebenfalls stetig, so heißt f Homöomorphismus.

BEISPIEL A.34. Verwenden wir eine durch eine Metrik bestimmte Topologie, so stimmt A.3 mit der üblichen Definition der Stetigkeit aus der Analysis überein: f ist stetig genau dann, wenn $\lim f(a_n) = f(\lim a_n)$.

Eine Abbildung ist offenbar auch genau dann stetig, wenn die Urbilder von abgeschlossenen Mengen abgeschlossen sind. Ist $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so definiert die Ungleichung $f(x) > 0$ eine offene Teilmenge $X' = f^{-1}((0, \infty))$ von X , und die Gleichung $f(x) = 0$ eine abgeschlossene Teilmenge $X'' = f^{-1}(\{0\})$ von X .

DEFINITION A.35. (*Teilraum*) Ist $Y \subseteq X$ und (X, \mathcal{O}) topologischer Raum, so sei $\mathcal{O}' = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{O}\}$. Dann ist (Y, \mathcal{O}') ein topologischer Raum und heißt Teilraum von (X, \mathcal{O}) .

BEISPIEL A.36. Ist X metrischer Raum und verwenden wir als Metrik in Y die von X , so stimmt die metrische Topologie in Y offenbar mit der Teilraumtopologie in Y überein. Dies gilt insbesondere für die Standardtopologie im \mathbb{R}^n .

DEFINITION A.37. (*Hausdorff*) Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) ist Hausdorffsch (T_2), wenn je zwei verschiedene Punkte aus X disjunkte offene Umgebungen haben.

BEISPIEL A.38. Metrische Topologien sind Hausdorffsch: Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ kann man offene Kugeln mit Radius $\|d(x, y)\|/3$ verwenden. Jeder Teilraum eines T_2 -Raumes ist offenbar ein T_2 -Raum. Die Mengen $\{x\}$ sind in einem T_2 -Raum abgeschlossen (Ü-Bsp.)

DEFINITION A.39. (*Zusammenhang*) Haben in (X, \mathcal{O}) nur \emptyset und X die Eigenschaft, gleichzeitig offen und abgeschlossen zu sein, heißt X zusammenhängend.

BEISPIEL A.40. Die zusammenhängenden Teilmengen von \mathbb{R} (versehen mit der Standardtopologie) sind genau die Intervalle inklusive $\pm\infty$ als Intervallgrenzen (Übungsbeispiel)

DEFINITION A.41. (*Weg, Wegkomponente, Wegzusammenhang*) Ein Weg in X ist eine stetige Abbildung $c : [0, 1] \rightarrow X$. $x, y \in X$ heißen verbindbar, wenn es einen Weg mit $c(0) = x$ und $c(1) = y$ gibt. Dies ist eine Äquivalenzrelation (Übungsbeispiel). Die Äquivalenzklassen der Relation "verbindbar" heißen Wegkomponenten. X heißt wegzusammenhängend, wenn je 2 Punkte in X verbindbar sind.

BEISPIEL A.42. Der \mathbb{R}^n ist wegzusammenhängend. Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig, und ist X (weg-)zusammenhängend, so hat auch $f(X)$ diese Eigenschaft (Übungsaufgabe)

DEFINITION A.43. (*Lokaler Wegzusammenhang*) X heißt lokal wegzusammenhängend, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine wegzusammenhängende Umgebung besitzt.

SATZ A.44. *Ist X wegzshgd., so auch zshgd. Ist X lokal wegzshgd. und zshgd., so auch wegzshgd. (d.h. je zwei Punkte sind durch einen Weg verbindbar).*

BEWEIS. Angenommen, X ist wegzshgd., $A \subseteq X$ ist offen und abgeschlossen, und $c : [0, 1] \rightarrow A$ ist ein Weg \implies $X \setminus A$ ist offen und abgeschlossen \implies $c^{-1}(A)$ und $c^{-1}(X \setminus A)$ sind offen \implies $c^{-1}(A)$ ist offen und abgeschlossen, und daher gleich $[0, 1]$ oder gleich \emptyset , denn $[0, 1]$ ist zshgd.. Es folgt, dass das Bild einer Kurve ganz in A oder ganz in $X \setminus A$ liegt. Da je 2 Punkte verbindbar sind, folgt $A = X$ oder $A = \emptyset$, und X ist zshgd..
Ist X lokal wegzshgd., so besitzt jedes x eine wegzusammenhängende Umgebung, also ist die Wegkomponente W_x von x offen. W_x ist das Komplement der Vereinigung der Wegkomponenten der Punkte nicht in W_x (welche offen sind), also abgeschlossen. Damit folgt $W_x = X$. \square

BEISPIEL A.45. Für eine offene Teilmenge X des \mathbb{R}^n besitzt jedes $x \in X$ eine ε -Kugel als wegzusammenhängende Umgebung, X ist also lokal wegzusammenhängend. Ist X zusammenhängend, dann auch wegzusammenhängend.

DEFINITION A.46. (*kompakt*) Eine Topologie (X, \mathcal{O}) ist kompakt, wenn sie T_2 ist, und man aus jeder Familie U_i von offenen Mengen mit $\bigcup U_i = X$ endlich viele der U_i auswählen kann, die X überdecken.

SATZ A.47. (i) Sei $A \subseteq K$ abgeschlossen. Ist K kompakt, so auch A . (ii) Ist K kompakt und $f : K \rightarrow Y$ stetig, so ist $f(K)$ kompakt, falls $Y T_2$ ist. (iii) Ist f zusätzlich injektiv, so ist $f : K \rightarrow f(K)$ ein Homöomorphismus.

BEWEIS. ad (i): Sei U_j eine offene Überdeckung von A . Jedes U_j hat die Form $V_j \cap A$ mit V_j offen in K . Nun wird K durch die Mengen (V_j) gemeinsam mit $K \setminus A$ überdeckt. Endlich viele davon überdecken K , also endlich viele der U_j überdecken A . ad (ii): Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$. Die Mengen $V_i = f^{-1}(U_i)$ überdecken K , sogar endlich viele davon. Deren Bilder überdecken $f(K)$. ad (iii): Wir müssen die Stetigkeit von f^{-1} zeigen, d.h. z.z. ist dass für jedes offene $U \subseteq K$ auch $f(U)$ offen ist. $K \setminus U$ ist kompakt $\implies f(K \setminus U) = f(K) \setminus f(U)$ ist kompakt $\implies f(K) \setminus f(U)$ ist abgeschlossen $\implies f(U)$ offen. \square

SATZ A.48. (Satz von Heine-Borel) Die kompakten Teilmengen von \mathbb{R}^n sind genau die beschränkten abgeschlossenen Teilmengen (d.h. \mathbb{R}^n hat die Heine-Borel-Eigenschaft)

BEISPIEL A.49. Daraus folgt: Jede abgeschlossene Teilmenge des \mathbb{R}^n (versehen mit der Standardtopologie) hat die Heine-Borel-Eigenschaft.

SATZ A.50. Ist (X, d) metrischer Raum und seine metrische Topologie kompakt, dann hat jede Folge $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ einen Häufungspunkt.

BEWEIS. Liegen in jeder Umgebung eines Punktes x unendlich viele Folgenglieder, so ist er ein Häufungspunkt (wähle a_{n_i} aus $B(x, 1/i)$, dann ist $x = \lim a_{n_i}$). Wir nehmen an, dass a keinen Häufungspunkt besitzt, dass also jeder Punkt x eine offene Umgebung U_x besitzt, in der nur endlich viele a_i liegen. Endlich viele der U_x überdecken X , es dürften damit in ganz X nur endlich viele Folgenglieder liegen (Widerspruch). \square

DEFINITION A.51. (Produkttopologie) Für topologische Räume X_j ($j \in J$) betrachte das Produkt $X = \times X_j$ und für alle $k \in J$ die Projektionen $p_k : X \rightarrow X_k$. Ist U_k offen in X_k , so sei auch $p_k^{-1}(U_k)$ offen in X (d.h. p_k ist stetig). Endliche Durchschnitte solcher Mengen und deren Vereinigungen seien genau die offenen Mengen in X .

BEISPIEL A.52. Die offensichtliche Bijektion $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ ist ein Homöomorphismus.

DEFINITION A.53. (parakompakt) Ein topologischer Raum X ist parakompakt, wenn jede offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ eine lokal-endliche Verfeinerung besitzt: Es gibt eine offene Überdeckung $(V_j)_{j \in J}$, sodass jedes V_j in einem U_i liegt, und jedes $x \in X$ eine offene Umgebung besitzt, die nur endlich viele der V_j schneidet.

BEISPIEL A.54. Wir zeigen die Parakompaktheit der Standardtopologie einer abgeschlossenen Teilmenge X des \mathbb{R}^n und verwenden die Bezeichnung D_r für die offene und \overline{D}_r für die abgeschlossene Vollkugel vom Radius r und Mittelpunkt 0: Für $k \in \mathbb{N}$ ist $K_k := (\overline{D}_k \setminus D_{k-4}) \cap X$ kompakt, und $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} K_k$. Endlich viele der U_i überdecken K_k . Als V_j verwenden wir (für jedes k) die Schnitte dieser U_i mit $(D_{k-1} \setminus \overline{D}_{k-3}) \cap X$.

LITERATUR

Lehrbücher

- DO CARMO, M. P. 1976. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall.
- DO CARMO, M. P. 1983. *Differentialgeometrie der Kurven und Flächen*. Vieweg.
- DO CARMO, M. 1992. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser.
- KÜHNEL, W. 1999. *Differentialgeometrie, Kurven – Flächen – Mannigfaltigkeiten*. Vieweg.
- MILNOR, J. 1969. *Morse Theory*, vol. 51 of *Annals of Mathematical Studies*. Princeton Univ. Press.
- MONTIEL, S., AND ROS, A. 2005. *Curves and Surfaces*. American Math. Soc.

Lehrbücher von historischem Interesse, klassische Flächentheorie

- DARBOUX, G. 1887–1896. *Théorie des Surfaces*. Gauthier-Villars, Paris. Vol. I–IV.
- EISENHART, L. P. 1909. *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Dover Publications.
- GAUSS, C. F. 1827. *Disquisitiones circa superficies curvas*. Göttingen.
- KRUPPA, E. 1957. *Analytische und konstruktive Differentialgeometrie*. Springer, Wien.
- STRUBECKER, K. 1969. *Differentialgeometrie: Theorie der Flächenkrümmung*, vol. 1180 of *Sammlung Göschen*. De Gruyter, Berlin.

Visualisierung

- GRAY, A. 1994. *Differentialgeometrie*. Spektrum Akad. Verlag, Heidelberg.
- HILBERT, D., AND COHN-VOSSEN, S. 1932, 1996. *Anschauliche Geometrie*. Springer.
- OPREA, J. 2000. *The mathematics of soap films: explorations with MAPLE*, vol. 10 of *Student Mathematical Library*. American Math. Society.

Weiterführende Bücher

- BRÖCKER, T., AND JÄNICH, K. 1973. *Einführung in die Differentialtopologie*. Springer.
- KOBAYASHI, S., AND NOMIZU, K. 1963, 1969. *Foundations of differential geometry*, vol. I, II. Wiley.
- LANG, S. 1999. *Fundamentals of Differential Geometry*, vol. 191 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer.
- HELGASON, S. 1978. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, vol. 80 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, New York.
- MICHOR, P. 2008. *Topics in Differential Geometry*, vol. 93 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Math. Soc.
- SPIVAK, M. 1975ff. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. I–V. Publish or Perish, Berkeley, Calif.

Weitere im Text zitierte Literatur

- ALEXANDROV, A. D. 1996. On the principles of relativity theory. In *Classics of Soviet Mathematics*, vol. 4. Gordon and Breach, 289–318.
- HOPF, H. 1935. Über die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven. *Compositio math.* 2, 50–62.
- KUIPER, N. H. 1955. On C^1 -isometric imbeddings. I, II. *Indag. Math.* 17, 545–556, 683–689.
- MUNKRES, J. R. 1966. *Elementary Differential Topology*, vol. 54 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press.

- NASH, J. 1956. The imbedding problem for Riemannian manifolds. *Annals of Math.* 63, 20–63.
- NASH, J. 1954. On C^1 isometric imbeddings. *Annals of Math.* 60, 383–396.
- WHITNEY, H. 1944. The self-intersections of a smooth n -manifold in $2n$ -space. *Annals of Math.* 45, 220–246.

DEUTSCH-ENGLISCHES GLOSSAR

Abbildung: mapping	Euler-Charakteristik: Euler characteristic	Jacobi-Identität: Jacobi identity
abgeschlossen: closed	Euler-Parametrisierung: Euler parametrization	Jacobifeld: Jacobi field
Ableitung: derivative	Exponentialabbildung: exponential map	Karte: chart
Ableitungsgleichungen (von Frenet): Frenet equations	Feldgleichungen: field equations	Kartenwechsel: change of coordinates
Abschluss: closure	Fläche: surface / area	Katenoid: catenoid
Abstand: distance	flach: flat	Kegel: cone
abtragende Abbildung: endpoint map	Fluss: flow	Keilprodukt: wedge product
abwickelbar: developable	Folge: series	Kettenregel: chain rule
Abwicklung: development / unfolding	Form: form	Klebeabbildung: gluing map
affiner Zusammenhang: affine connection	Fundamentalform: fundamental form	Koeffizient: coefficient
alternierender Tensor: alternating tensor	Gaußsche Krümmung: Gaussian curvature	kompakt: kompakt
analytisch: analytic	Gebiet: domain	Komponente: component
Atlas: atlas	geodätisch vollständig: geodesically complete	konform: conformal
Basis: basis, frame	geodätische Krümmung: geodesic curvature	Kongruenztransformation: congruence transformation
Basisfeld: basis field	geodätische Linie: geodesic / geodesic line	konjugierte Punkte: conjugate points
Begleitbasis: moving frame	Gezeiten: tides	Koordinaten: coordinates
Bogenlänge: arc length	Gradient: gradient	Koordinatendarstellung: coordinate representation
Bündel: bundle	Graph: Graph	Koordinatenwechsel: change of coordinates
Determinante: determinant	Grenzwert: limit	kovariante Ableitung: covariant derivative
Diffeomorphismus: diffeomorphism	Gruppe: group	Krümmung: curvature
Differential: differential	Häufungspunkt: accumulation point	Krümmungsform: second fundamental form
Differentialgleichung: differential equation	Hauptkrümmung: principal curvature	Krümmungstensor: curvature tensor
differenzierbar: differentiable	Holonomiegruppe: holonomy group	Kreis: circle
differenzierbare Mannigfaltigkeit: differentiable manifold / smooth manifold	Homöomorphismus: homeomorphism	Kreuzprodukt: cross product
Distanz: distance	induzierter Zusammenhang: induced connection	kritischer Punkt: critical point
Dreibein, begleitendes: moving frame	innere Geometrie: inner geometry	Kurve: curve
Dreieck: triangle	Integralkurve: integral curve	Lebenslinie: world line
Dupinsche Indikatrix: Dupin indicatrix	Integralsatz von Gauß-Bonnet: Gauss-Bonnet theorem	lichtartig: light-like
Durchmesser: diameter	Invariante: invariant	Liealgebra: Lie algebra
Ebene: plane	Isometrie: isometry	Liegruppe: Lie group
Eigenwert: eigenvalue		Lieklammer: Lie bracket
Eigenzeit: proper time		Mannigfaltigkeit: manifold
Einbettung: imbedding		
Ellipsoid: ellipsoid		
Energie: energy		

Matrizengruppe: matrix group	regulär: regular	Tangentialvektorraum: tangent space
Metrik: metric	Relativitätstheorie: theory of relativity	Teilmannigfaltigkeit: submanifold
metrischer Raum: metric space	Ricci-Tensor: Ricci tensor	Tensor: tensor
Minimalfläche: minimal surface	Richtung: direction	Tensorfeld: tensor field
mittlere Krümmung: mean curvature	Richtungsableitung: directional derivative	Topologie: topology
Multilinearform: multilinear form	Riemannsche Metrik: Riemannian metric	Torus: Torus
Normalkrümmung: normal curvature	Riemannscher Raum: Riemannian space	Umfang: perimeter
Normalvektor: normal vector	Schmiegeparaboloid: osculating paraboloid	Umgebung: neighbourhood
Oberflächenintegral: surface integral	Schmiegraum: osculating space	Umkehrfunktion: inverse function
offen: open	Schnitt: intersection	Umkehrfunktion, Satz von der: inverse function theorem
Orientierung: orientation	Schnittkrümmung: sectional curvature	Umlaufsatz von Hopf: Hopf's Umlaufsatz
Orthogonalraum: orthogonal complement	Schraubfläche: helical surface	Ungleichung: inequality
Paraboloid: paraboloid	singulär: singular	Variation: variation
Parallelfeld: parallel vector field	Skalarprodukt: scalar product	Vektor: vector
Parallelfläche: offset surface	Spektralsatz: spectral theorem	Vektorfeld: vector field
Parallelverschiebung: parallel transport	Sphäre: sphere	vollständig: complete
Parametrisierung: parametrization	sphärische Abbildung: Gauss map	Volumen: volume
Polynom: polynomial	stereographische Projektion: stereographic projection	Weg: path
Produkt: product	stetig: continuous	wegzusammenhängend: path-connected
Projektion: projection	Summenkonvention: sum convention	Weingartenabbildung: shape operator
Pullback: pull back	Support: support	Wendepunkt: inflection point
Punkt: point	Tangente: tangent	Winkel: angle
Rang: rank	Tangentialbündel: tangent bundle	winkeltreu: conformal
Rangatz: constant rank theorem	Tangentialvektor: tangent vector	zeitartig: time-like
Raum: space		Zerlegung der Eins: partition of unity
raumartig: space-like		zusammenhängend: connected
		Zusammenhang: connection

INDEX

- $[,]$, 28
 $\perp_p M$, 56
 $\nabla_X Y$, 34
 $\langle \cdot, \cdot \rangle_a^b(W/V)$, 61
 \langle , \rangle , 33
 \times , 69
 Abbildung
 — abtragende, 20
 — differenzierbare, 6, 10, 26, 69
 — reguläre, 69
 — sphärische, 17
 abgeschlossen, 72
 Ableitung
 — kovariante, 35
 Ableitungsgleichungen, 3, 60
 Abschluss, 72
 Abstand, 13, 42, 44
 Abweichung,
 geodätische, 53, 67
 abwickelbar, 14, 51
 analytisch, 22, 23, 70
 — reell-, 70
 $\text{area}(v, w)$, 4
 Atlas, 25

 Basis, 72
 — positive, 60
 — von $\mathfrak{X}_s^r V$, 30
 Basisfeld, 13
 Begleitbasis, 2
 Bianchi-Identität, 52
 Bogenlänge, 1, 2, 33, 65

 C^r , 69
 $\mathcal{C}_{p,q}$, 13, 38
 $\chi(M)$, 64
 Cauchyfolge, 71
 Christoffelsymbole, 34

 ∂_j , 13
 $d(p, q)$, 13, 44
 $\frac{D}{dt}$, 35
 Determinante
 — Gramsche, 4, 14
 — Jacobi-, 60
 Diffeomorphismus, 70
 Differential, 6, 10, 27, 69
 — der Exponentialabb., 41
 — der sphär. Abb., 17, 22
 — einer holomorphen Fkt., 70
 Differentialgleichung, 71
 — d. geodät. Linien, 40
 — eines Flusses, 28
 — eines Parallelfeldes, 37
 — Jacobische, 53, 66
 differenzierbar, 6, 10, 26, 69
 Distanz, cf. Abstand
 Dreieck, 63

 E, F, G , 13
 E_a^b , 33, 43
 Eckenwinkel, 61
 Eigenschaft
 — geometrische, 3, 5
 Eigenwert, 18
 Eigenzeit, 65, 66
 Einbettung, 47, 59
 Energie, 33, 43
 Euler-Charakteristik, 64
 Euler-Parametrisierung, 19
 Exponentialabbildung, 41

 Feldgleichungen, 66, 67
 Fermi-Koordinatensystem, 66
 Fl_X^t , 28
 Fläche, 6
 — eines Kreises, 54
 flach, 35, 51
 Fluß, 28
 Frenet, Gleichungen von, 3, 4, 60
 Fundamentalform
 — I., 12
 — II., 17, 56

 Γ_{jk}^l , 34
 g_{jk} , 13
 Gauß-Bonnet
 — Integralformel, 62
 Gebiet, zulässiges, 61
 geodätisch vollständig, 45
 geodätische Linie, 40, 55
 — minimale, 45
 Geometrie, innere, 40
 Gezeiten, 66
 GL_n , 9
 Gleichung
 — von Weingarten, 58
 Gradient, 69
 Graph, 19
 Gravitationspotential, 66
 Grenzwert, 71
 Gruppe
 — Transformations-, 5

 H , 18
 $h(v, w), h_{jk}$, 17
 Häufungspunkt, 71
 Hauptkrümmung, 18–20
 Hauptsatz der lokalen Kurventheorie, 3
 Hausdorff, 25, 72
 Heine-Borel-Eigenschaft, 45, 74
 holomorph, 22, 70
 Holonomiegruppe, 38, 63
 Homöomorphismus, 72
 Hülle, 72

 $\text{II}(X, Y)$, 56
 $\int dO$, 14, 46
 Indikatrix, Dupinsche, 20
 Integral, 14, 46, 62
 Integralkurve, 28
 Integralsatz von Gauß-Bonnet, 62
 Invariante, 3, 5
 Isometrie, 14, 51

 Jacobi-Identität, 28, 69
 Jacobifeld, 53, 55, 66

 K , 18, 52
 $\kappa_1, \kappa_2, \dots$, 3, 18
 κ_g , 18, 60
 κ_n , 18

- Karte, 10, 25
 — TMF-, 6
 Kartenwechsel, cf.
 Parameterwechsel
 Keilprodukt, 30
 Kettenregel, 6, 11
 Klebeabbildung, 25
 Koeffizienten
 — Krümmungstensor, 49
 — Metrik, 13
 — Ricci-Tensor, 52
 — Zusammenhang, 34
 kompakt, 73
 Komponente, 73
 konform, 22
 Kongruenztransformation, 5, 65
 Koordinaten
 — lokale, 6
 — Tangentialvektoren, 8
 — Tensoren, 30, 31
 — Vektorfeld, 27
 Koordinatendarstellung, 10, 26
 Koordinatenwechsel, cf.
 Parameterwechsel
 Krümmung, 3, 4
 — Gaußsche, 18, 59, 60
 — geodätische, 18, 40
 — — orientierte, 60
 — mittlere, 18, 21
 Krümmungsform, 17
 Krümmungstensor, 49, 52, 60, 66
 Kreis, geodätischer, 54
 Kreuzprodukt, 69
 Kurve, 1, 26
 — kürzeste, 2, 42, 43, 45, 56
 — längste, 65
 — reguläre, 1
 kürzeste Verbindung, 42, 43, 45, 56

 L, M, N , 17
 L_a^b , 1, 33
 Lebenslinie, 65, 66
 Lemma von Gauß, 42, 58
 Lichtteilchen, 66
 Liealgebra, 9, 69
 Liegruppe, 9
 Lieklammer, 28, 49, 57
 Linearform, 30
 Mannigfaltigkeit
 — differenzierbare, 25
 — orientierte, 60
 — pseudo-Riemannsche, 65
 — Riemannsche, 33
 — Teil-, 6, 56
 Massenpunkt, 19, 66
 Matrizengruppe, 9
 Mechanik, 66
 — Newtonsche, 19
 Metrik, 44
 — innere, 12, 40
 — Riemannsche, 33
 Minimalfläche, 22
 Minimum
 — der Bogenlänge, 34, 42, 43
 — der Energie, 34
 Multilinearform, 30

 Normalkrümmung, 18, 20
 Normalvektor, 17

 O_n , 9
 $O_{n,1}$, 65
 Oberflächenintegral, 14
 offen, 72
 Orientierung, 60
 Orthogonalraum, 56

 parakompakt, 25, 74
 Parallelepipet, 4, 69
 Parallelfeld, cf. -
 verschiebung
 Parallelfäche, 21
 Parallelverschiebung, 36, 50, 51, 63
 Parameterwechsel, 1, 3, 12, 25, 31
 Parametrisierung
 — Bogenlängen-, 1, 2
 — konform, 22
 — lokale, 10, 25
 Photon, 66
 Poisson-Klammer, 28
 Polynom, 12
 Problem
 — Björlingsches, 23
 — Plateausches, 22
 Produkttopologie, 74
 Projektion
 — stereographische, 12, 22
 — Tangential-, 35
 $Pt_a^b(c)$, 37
 Pullback, 33
 Punkt
 — elliptischer, 20
 — konjugierter, 55
 — kritischer, 43

 $R(X, Y)Z$, 49, 60
 R_{ijkl} , 52, 66
 R_{ijk}^l , 49, 66
 R_{jk} , 52, 67
 Rang, 6
 Raum
 — metrischer, 71
 — pseudo-euklidischer, 65
 — Riemannscher, 33
 — topologischer, 72
 regulär, 1, 56, 69
 Relativitätstheorie, 65, 66
 Ricci-Tensor, 52, 67
 Richtungsableitung, 13, 26
 Riemannscher
 Krümmungstensor, 52

 $\sigma(v)$, 17
 Satz
 — von A. D. Alexandrov, 65
 — von P. Bonnet und S. Myers, 56
 — von E. Cartan und J. Hadamard, 56
 — von C. F. Gauß und P. Bonnet, 63
 — Umlauf-, von H. Hopf, 61
 — von H. Hopf und W. Rinow, 45
 — von T. Levi-Civita, 39
 — von J. B. M. C. Meusnier, 18
 — von J. Nash, 59
 — von der Umkehrfunktion, 70

- von Green, 63
- von H. Whitney, 47
- Schmiegeparaboloid, 19
- Schmiegraum, 1
- Schnittkrümmung, 52, 59
- Schwarzschild-Metrik, 67
- Skalarprodukt, 33
- SO_n , 9
- Spektralsatz, 18
- Sphäre, 8
 - geodätische, 41
- stetig, 72
- Substitutionsregel, 70
- Summenkonvention, Einsteinsche, 13, 30
- Support, 14

- T_2 , 72
- T_pM , 8
- \mathfrak{X}_s^rV , 30
- Tangente, 1
- Tangentialbündel, 8
- Tangentialvektor, 8, 26
- Tangentialvektorraum, 8
- Teilchen, 19, 66
- Teilmannigfaltigkeit, 6
 - Riemannsche, 56
- Teilraum, 72
- Tensor, 30
 - alternierender, 30
 - symmetrischer, 30
- Tensorbündel, 31
- Tensorfeld, 31
- Tensorprodukt, 30
- Theorema Egregium, 59
- Theorema elegantissimum, 63
- Topologie, 25, 44, 72
- Umfang eines Kreises, 54
- Umgebung, 72
- Umkehrfunktion, 12, 70
- Ungleichung von Cauchy-Schwarz, 34

- Variation
 - der Energie, 43
 - der Oberfläche, 21
 - totale, 2, 71
- Vektorfeld, 13, 27
- Vektorprodukt, 69
- verbindbar, 13
- vollständig
 - geodätisch, 45
 - metrisch, 45, 71
- Volumen, 4, 15, 69

- Weg, 73
- Wegunabhängigkeit, 38, 50, 51

- wegzusammenhängend, 73
 - lokal, 73
- Weingartenabbildung, 17
- Wendepunkt, 1
- Winkel
 - Dreh-, eines Parallefeldes, 63
 - historisch gemessener, 61
- Winkelsumme, 63
- winkeltreu, 22

- X_p , 13, 26

- Zerlegung der Eins, 46
- zusammenhängend, 13, 73
- Zusammenhang
 - affiner, 34
 - flacher, 35
 - induzierter, 35, 39, 56
 - Levi-Civita, 39, 49, 57
 - Riemannscher, 38
 - symmetrischer, 36, 57
- Zwillingsparadoxon, 65
- Zylinder, 14