

Approximation in Lieschen Transformationsgruppen durch Überlagerung von einparametrischen Untergruppen

Johannes Wallner

Institut für Geometrie, Technische Universität Wien

AMS Subject Classification: 22E60, 17B05

Keywords: Lie transformation groups, one-parameter subgroups, approximation, commutators in Lie algebras, Baker-Campbell-Hausdorff-series

Abstract: Generalizing theorems of elementary kinematic geometry the following problem is studied: Let a Lie transformation group G act on a homogenous space and let a motion (a curve $c : I \rightarrow G$) be given. We ask for a superposition of one-parameter subgroups of G which osculates $c(t)$ at $t = t_0$. The property that for all c and t_0 there exist three one-parameter subgroups whose superposition osculates $c(t)$ at $t = t_0$ turns out to be equivalent to the property of every element of the corresponding Lie algebra being a commutator, which is fulfilled by several classical motion groups.

In der ebenen euklidischen Kinematik ist es eine bekannte Tatsache, daß man zu einer zweimal stetig differenzierbaren Bewegung, die zu einem bestimmten Zeitpunkt keine Fernpolstellung und keinen Stillstand besitzt, mindestens eine Trochoidenbewegung zweiter Stufe finden kann, bei welcher Bahntangenten und Bahnkrümmungen zu eben diesem Zeitpunkt mit der ursprünglichen Bewegung übereinstimmen. Die Bewegung sei durch $C(\bar{t}) = ((1, u(\bar{t}), v(\bar{t}))^T, (0, \cos \varphi(\bar{t}), \sin \varphi(\bar{t}))^T, (0, -\sin \varphi(\bar{t}), \cos \varphi(\bar{t}))^T)$ in Matrixschreibweise gegeben. $A_1(t)$ und $A_2(t)$ seien die beiden Drehungen, aus denen sich durch $A_1(t) \cdot A_2(t)$ die Trochoidenbewegung zusammensetzt. Sie seien kanonisch parametrisiert, d.h. es soll gelten $A_i(t_1) \cdot A_i(t_2) = A_i(t_1 + t_2)$, insbesondere ist dann $A_i(0)$ gleich der Einheitsmatrix. Es gibt dann eine reguläre Parametertransformation $\gamma : \bar{t} \mapsto t$, sodaß an der Stelle $t = \bar{t} = 0$ gilt:

$$\frac{d}{dt} (A_1(t) \cdot A_2(t) \cdot C(0) \cdot x) = \frac{d}{dt} (C(\gamma(t)) \cdot x)$$

und

$$\frac{d^2}{dt^2} (A_1(t) \cdot A_2(t) \cdot C(0) \cdot x) = \frac{d^2}{dt^2} (C(\gamma(t)) \cdot x)$$

für alle Koordinatenvektoren $x = (1, x_1, x_2)^T$.

Allgemeiner kann man sich folgende Frage stellen (vgl. [7]): Gegeben ist eine Liesche Transformationsgruppe G , die auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X operiert. Die Gruppenoperation sei $g : G \times G \rightarrow G, (a, b) \mapsto g(a, b) = a \cdot b$ und die Operation auf X sei $\varphi : G \times X \rightarrow X, (a, x) \mapsto \varphi(a, x) = a(x)$ mit $\varphi(a, \varphi(b, x)) = \varphi(a \cdot b, x)$. Sei $d : I \rightarrow G, t \mapsto d(t)$ eine Bewegung, bei der jeder Punkt $x \in X$ eine Bahnkurve $d_x : I \rightarrow X, t \mapsto \varphi(d(t), x) = d(t)(x)$ besitzt. Seien n einparametrische Untergruppen $p_1(t), \dots, p_n(t)$ von G gegeben. Wir fragen danach, wann für alle Punkte $x \in X$ die Bahnkurven bei der Überlagerung dieser Untergruppen jene der Bewegung d zum Zeitpunkt $t = 0$ von mindestens s -ter Ordnung berühren, daß heißt wann gilt

$$\frac{d^r}{dt^r} \varphi(p_1(t) \cdot p_2(t) \cdot \dots \cdot p_n(t), d(0)(x)) = \frac{d^r}{dt^r} \varphi(d \circ \gamma(t), x) \quad r = 1, \dots, s$$

für eine bestimmte Parametertransformation γ mit $\gamma(0) = 0$.

Multiplizieren wir die Gleichung von links mit $d(0)^{-1}$ und setzen wir $d(0)^{-1} \cdot p_i(t) \cdot d(0) = q_i(t)$, so sehen wir, daß dies genau dann der Fall ist, wenn

$$\frac{d^r}{dt^r} \varphi(q_1(t) \cdot q_2(t) \cdot \dots \cdot q_n(t), x) = \frac{d^r}{dt^r} \varphi(d(0)^{-1} \cdot d \circ \gamma(t), x) \quad r = 1, \dots, s$$

gilt. Die Bewegung $d(0)^{-1}d(t)$ ist für $t = 0$ gleich dem neutralen Element $e \in G$. Es genügt daher, Bewegungen mit $d(0) = e$ zu betrachten. Hinreichend für die obige Bedingung ist die folgende:

$$\frac{d^r}{dt^r} (q_1(t) \cdot \dots \cdot q_n(t)) = \frac{d^r}{dt^r} (d \circ \gamma)(t) \quad r = 1, \dots, s,$$

und bei den klassischen Gruppen, bei denen die Transformationen aus G samt ihren Ableitungen vollständig durch die Bahnkurven der Punkte von X festgelegt sind, ist sie auch notwendig.

Wir beachten weiterhin, daß die zur Gruppe G gehörige Liesche Algebra \mathfrak{g} mit Hilfe der Exponentialabbildung $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ lokal um $0 \in \mathfrak{g}$ diffeomorph auf eine Umgebung von $e \in G$ abgebildet wird. Die Inverse zu \exp werde mit \log bezeichnet.

Wir verwenden die Baker–Campbell–Hausdorff–Formel (vgl. [4], [7])

$$\log(\exp(ta_1) \cdot \dots \cdot \exp(ta_n)) = t(a_1 + \dots + a_n) + \frac{1}{2}t^2 \sum_{i < j} [a_i, a_j] + o(t^2), \quad (1)$$

setzen lokal um e $c(t) = \log d(t)$ und $q_i(t) = \exp(ta_i)$ für bestimmte $a_i \in \mathfrak{g}$ und erhalten

$$\frac{d^r}{dt^r} (c \circ \gamma(t)) = \frac{d^r}{dt^r} \left(t(a_1 + \dots + a_n) + \frac{1}{2}t^2 \sum_{i < j} [a_i, a_j] + o(t^2) \right) \quad r = 1, \dots, s.$$

Da die höheren Terme in (1), die von der Gestalt $\sum \lambda_k [a_{i_1}, [\dots [a_{i_{r-1}}, a_{i_r}] \dots]]$ sind, schnell unübersichtlich werden, beschränken wir uns auf Differentiationsordnung $s = 2$. Die Ableitung nach t bezeichnen wir mit einem Strich. Wir

erhalten

$$\gamma'(0)c'(0) = a_1 + \dots + a_n \quad (2)$$

$$\gamma''(0)c'(0) + \gamma'(0)^2 c''(0) = \sum_{i < j} [a_i, a_j] \quad (3)$$

als Bedingung dafür, daß die Bewegung $d \circ \gamma$ mit $\log d = c$ von zweiter Ordnung approximiert werden kann. Diese Bedingung kann somit alleine in der Lieschen Algebra formuliert werden. Fassen wir \mathfrak{g} als Tangentialvektorraum $T_e G$ an G in e auf, so ist das Differential der Exponentialabbildung bei e die Identität in $T_e G$, also $d'(0) = c'(0)$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\gamma'(0) = 1$. Wenn wir aus (2) und (3) a_n eliminieren, erhalten wir

$$c''(0) + \gamma''(0)c'(0) = \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} [a_i, a_j] + \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i, c'(0) \right] \quad (4)$$

und wenn wir weiter $s_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$ setzen:

$$c''(0) + \gamma''(0)c'(0) = [s_1, s_2] + [s_2, s_3] + \dots + [s_{n-2}, s_{n-1}] + [s_{n-1}, c'(0)]. \quad (5)$$

Die Folgen s_1, \dots, s_{n-1} und a_1, \dots, a_{n-1} bestimmen einander umkehrbar eindeutig.

Ist insbesondere $n-1 = 2k$ gerade, so können wir $s_3 - s_1 = t_1, \dots, s_{n-2} - s_{n-4} = t_{k-1}$ und schließlich noch $t_k = c'(0) - s_{n-2}$ setzen. Die Folgen s_1, \dots, s_{n-1} und $s_2, s_4, \dots, s_{n-1}, t_1, \dots, t_k$ bestimmen einander umkehrbar eindeutig. (5) nimmt die Gestalt

$$c''(0) + \gamma''(0)c'(0) = [s_2, t_1] + [s_4, t_2] + \dots + [s_{n-1}, t_k] \quad (6)$$

an. Dabei ist die rechte Seite als Summe von k Kommutatoren in der derivierten Lieschen Algebra $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ enthalten. Ist die Dimension von $\mathfrak{g}^{(1)}$ gleich k , so ist jedes Element aus $\mathfrak{g}^{(1)}$ als Summe von k Kommutatoren darstellbar, die Maximalzahl der benötigten Untergruppen $q_i(t) = \exp(ta_i)$ ist dann gleich $2k + 1$. Weiters ist bei $\mathfrak{g}^{(1)} \neq \mathfrak{g}$ für $c'(0) \in \mathfrak{g}^{(1)}$, $c''(0) \notin \mathfrak{g}^{(1)}$ die Bedingung (4) nicht erfüllbar. Wir erhalten:

Prop. 1 *Eine Bewegung $d : I \rightarrow G$ mit $d(0) = e$ wird bei $t = 0$ genau dann von einer Überlagerung von einparametrischen Untergruppen oskuliert, wenn für den Weg $c = \log d$ der Schnitt $(c''(0) + \mathbb{R}c'(0)) \cap \mathfrak{g}^{(1)}$ nicht leer ist. Gilt $\mathfrak{g}^{(1)} \neq \mathfrak{g}$, so gibt es Bewegungen, die nicht von Überlagerungen von einparametrischen Untergruppen oskuliert werden.*

Der einfachste Fall ist jener der Überlagerung von zwei einparametrischen Untergruppen. Wir verwenden den Ausdruck “fast alle x ” anstelle “alle x bis auf die in einer gewissen Nullmenge” und eine Aussage über “fast alle Wege $c(t)$ ” ist eine Aussage über ihre ersten beiden Ableitungsvektoren. Dann gilt:

Prop. 2 Die Bewegung $d(t) = \exp(c(t))$ wird genau dann bei $t = 0$ von einer Überlagerung von zwei einparametrischen Untergruppen oskuliert, wenn der Schnitt $(c''(0) + \mathbb{R}c'(0)) \cap [c'(0), \mathfrak{g}]$ nicht leer ist. In jeder Lieschen Gruppe gibt es Wege $d(t)$, die nicht von einer Überlagerung von zwei einparametrischen Untergruppen oskuliert werden. Ist die Maximaldimension von $[x, \mathfrak{g}]$ gleich $\dim \mathfrak{g} - 1$ und gibt es ein x mit $x \notin [x, \mathfrak{g}]$, so werden fast alle Wege von einer Überlagerung von zwei einparametrischen Untergruppen oskuliert. Ist die Maximaldimension von $[x, \mathfrak{g}]$ kleiner als $\dim \mathfrak{g} - 1$, fast alle nicht.

Beweis: Gleichung 4 ergibt

$$c''(0) + \gamma''(0)c'(0) = [a_1, c'(0)]$$

und wir sehen, daß die Approximationsaufgabe genau dann lösbar ist, wenn der affine Unterraum $c''(0) + \mathbb{R}c'(0)$ den Unterraum $V = [c'(0), \mathfrak{g}]$ trifft. Gilt $\dim \mathfrak{g} = n$, so hat dieser Dimension höchstens $n - 1$. Für Wege $c(t)$ mit $c'(0) \in V$ und $c''(0) \notin V$ treffen einander die affinen Unterräume $c''(0) + \mathbb{R}c'(0)$ und V nicht. Es sei $k = \max\{\dim[x, \mathfrak{g}] | x \in \mathfrak{g}\}$. Wir wählen eine Basis in \mathfrak{g} . Dann wird k genau von denjenigen $x \in \mathfrak{g}$ angenommen, für die mindestens eine $k \times k$ -Unterdeterminante der Koordinatenmatrix der linearen Abbildung $\text{ad}_x : y \mapsto [x, y]$ nicht verschwindet. Das Komplement dieser Menge ist algebraisch und daher eine Nullmenge. Gilt für ein x , daß $x \notin [x, \mathfrak{g}]$, so für fast alle. Ist noch $k = n - 1$, so trifft $c''(0) + \mathbb{R}c'(0)$ fast immer $[c'(0), \mathfrak{g}]$, bei $k < n - 1$ fast nie. \square

Sei $K(\mathfrak{g}) = \{[x, y] | x, y \in \mathfrak{g}\}$ die Menge der Kommutatoren von \mathfrak{g} . Dann gilt:

Prop. 3 Ein Weg $d(t) = \exp(c(t))$ wird genau dann von einer Überlagerung von drei einparametrischen Untergruppen oskuliert, wenn der affine Unterraum $c''(0) + \mathbb{R}c'(0)$ die Menge $K(\mathfrak{g})$ trifft. Genau bei $K(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ wird jeder Weg von einer Überlagerung von drei einparametrischen Untergruppen oskuliert.

Beweis: (6) nimmt die Gestalt $c''(0) + \gamma''(0)c'(0) = [s_2, t_1]$ an. Damit folgt die erste Aussage. Gibt es ein $x \notin K(\mathfrak{g})$, so ist für Wege mit $c''(0) = x$, $c'(0) = 0$ diese Gleichung nicht erfüllbar. \square

Gilt $K(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, so gibt es sogar immer eine Überlagerung von drei einparametrischen Untergruppen, die mit dem Weg d von zweiter Ordnung übereinstimmt, d.h. man benötigt hier keine Parametertransformation.

Wir bezeichnen mit $O_{k,l}$ jene Matrizen­gruppe, die die quadratische Form $x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{k+l}^2$ invariant läßt. Es wird gesetzt $O_{0,n} = O_n$. Zu $O_{k,l}$, zu $SO_{k,l} = O_{k,l} \cap SL_{k+l}$ und zur Faktor­gruppe nach einem diskreten Normalteiler, z.B. $\{E, -E\}$, gehört die gleiche Liesche Algebra $\mathfrak{so}_{k,l}$. Sie ist die Menge der Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} X_1 & Y \\ Y^T & X_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad X_1^T = -X_1, \quad X_2^T = -X_2,$$

wobei X_1 eine $p \times p$ -Matrix und X_2 eine $q \times q$ -Matrix ist. Weiters bezeichnen wir die Translationsgruppe des n -dimensionalen reellen affinen Raumes mit T_n und identifizieren sie mit \mathbb{R}^n . Dann ist die Bewegungsgruppe OA_n des n -dimensionalen euklidischen Raumes gleich $T_n \times_{\text{id}} O_n$ und ihre Liesche Algebra ist gleich $\mathfrak{oa}_n = \mathfrak{t}_n \oplus_{\text{id}} \mathfrak{so}_n$. Hier ist \mathfrak{t}_n die n -dimensionale triviale Liesche Algebra. Die Liesche Algebra zu SL_n (und PGL_{n-1}) bezeichnen wir mit \mathfrak{sl}_n . Sie ist die Menge der Matrizen mit Spur 0. Zur äquiaffinen Gruppe $SA_n = T_n \times_{\text{id}} SL_n$ gehört die Liesche Algebra $\mathfrak{sa}_n = \mathfrak{t}_n \oplus_{\text{id}} \mathfrak{sl}_n$.

Für einige niedrigdimensionale Liesche Algebren können wir die oben angegebenen Kriterien direkt nachrechnen:

Satz 4 *In den Bewegungsgruppen OA_2 , $O_3/\{E, -E\}$ und $O_{1,2}/\{E, -E\}$ der euklidischen, elliptischen und hyperbolischen Ebene wird fast jeder Weg durch eine Überlagerung von zwei einparametrischen Untergruppen oskuliert. Die verbleibenden Wege werden in der elliptischen und hyperbolischen Ebene von einer geeigneten Überlagerung von drei einparametrischen Untergruppen, in der euklidischen Ebene werden die restlichen entweder von einer Überlagerung von drei einparametrischen Untergruppen oder von keiner Überlagerung von n einparametrischen Untergruppen oskuliert.*

Beweis: Wir betrachten die zugehörigen Lieschen Algebren \mathfrak{oa}_2 , \mathfrak{so}_2 , und $\mathfrak{so}_{1,2}$ (Vgl. [5])

1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{oa}_2$ ist eine semidirekte Summe aus \mathfrak{t}_2 und \mathfrak{so}_2 . Es gibt drei Basisvektoren u, v, w mit $u, v \in \mathfrak{t}_2$ und $[u, v] = 0$, $[u, w] = v$, $[v, w] = -u$. Genau für $c'(0) \notin \mathfrak{t}_2$ ist $[c'(0), \mathfrak{g}] = \mathfrak{t}_2$ und der affine Unterraum $c''(0) + \mathbb{R}c'(0)$ schneidet \mathfrak{t}_2 . Gilt $c''(0) \notin \mathfrak{t}_2$ und $c'(0) \in \mathfrak{t}_2$, so schneidet der obige Unterraum $\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{g}^{(1)}$ nicht. Schneidet er oder ist er sogar in \mathfrak{t}_2 enthalten (nur dieser Fall tritt dann auf), so reichen drei Untergruppen, denn jedes $x \in \mathfrak{t}_2$ ist ein Kommutator.
2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_3$ ist isomorph zum \mathbb{R}^3 mit $[a, b] = a \times b$. Es ist $\dim[x, \mathfrak{g}] = \dim x^\perp = 2$ für alle $x \neq 0$ und jedes x ist ein Kommutator.
3. $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{1,2}$ ist isomorph zu \mathfrak{sl}_2 und besitzt eine Basis h, e, f mit $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$, $[e, f] = h$. Es gilt $\dim[x, \mathfrak{g}] = 2$ für alle $x \neq 0$ und jedes x ist ein Kommutator. □

Der folgende Satz liefert Beispiele von Bewegungsgruppen, in denen zwei Untergruppen nicht ausreichen:

Satz 5 *In den Bewegungsgruppen $O_{1,3}/\{E, -E\}$ bzw. $O_{2,2}/\{E, -E\}$ der dreidimensionalen Cayley-Klein-Räume mit ovaler bzw. ringartiger Maßquadratik (hyperbolischer Raum und indefiniter Raum) wird jede Bewegung von einer Überlagerung von drei einparametrischen Untergruppen oskuliert und fast keine von einer Überlagerung von zwei einparametrischen Untergruppen.*

Beweis: Wir betrachten die dazugehörigen Lieschen Algebren $\mathfrak{so}_{1,3}$ und $\mathfrak{so}_{2,2}$. (Vgl. [5]). Beide haben Dimension 6.

1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{1,3}$ ist isomorph zu $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, aufgefaßt als reeller Vektorraum doppelter Dimension. Die komplexe Dimension von $[x, \mathfrak{g}]$ ist gleich 2 für alle $x \in \mathfrak{g}, x \neq 0$, die reelle damit gleich 4. In $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ ist jedes Element ein Kommutator.
2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2,2}$ ist isomorph zu $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$. Damit ist die Maximaldimension von $[x, \mathfrak{g}]$ gleich 4 und jedes $x \in \mathfrak{g}$ ist ein Kommutator. \square

Für die Approximation durch zwei einparametrische Untergruppen ist die Differenz zwischen der Dimension $\dim \mathfrak{g}$ und der Maximaldimension von $[x, \mathfrak{g}]$ entscheidend. Es gilt folgende Tabelle ($n \geq 2, k \geq 1$):

Liesche Algebra	$\dim \mathfrak{g}$	$\max \dim[x, \mathfrak{g}]$
\mathfrak{sl}_n	$n^2 - 1$	$n^2 - n$
\mathfrak{so}_{2k}	$2k^2 - k$	$2k^2 - 2k$
\mathfrak{so}_{2k+1}	$2k^2 + k$	$2k^2$
\mathfrak{oa}_{2k}	$2k^2 + k$	$2k^2$
\mathfrak{oa}_{2k+1}	$2k^2 + 3k$	$2k^2 + 2k$
\mathfrak{sa}_n	$n^2 + n - 1$	n^2

Damit gilt:

Kor. 6 *In den folgenden Gruppen werden fast alle Wege nicht durch eine Überlagerung von zwei einparametrischen Untergruppen oskuliert: In der projektiven Gruppe PGL_n für $n \geq 2$, in den Bewegungsgruppen OA_n des euklidischen und $\mathrm{O}_{n+1}/\{E, -E\}$ des elliptischen Raumes für $n \geq 3$ und in der äquiaffinen Gruppe SA_n für $n \geq 3$.*

Wir werden zeigen, daß die projektive, die euklidische, die elliptische und die äquiaffine Bewegungsgruppe in jeder Dimension die Approximationseigenschaft für drei einparametrische Untergruppen besitzen. Für die projektive und die elliptische Bewegungsgruppe folgt dies aus den Ergebnissen in [1], [2], [3] und [6], wo gezeigt wird, daß in jeder der klassischen Lieschen Algebren jedes Element ein Kommutator ist, sofern der zugrundeliegende Körper \mathbb{K} eine gewisse Mindestanzahl von Elementen besitzt. Für den Spezialfall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ geben wir jedoch noch einen Beweis für \mathfrak{so}_n :

Lemma 7 *Für $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ und für $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n$ gilt $K(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, d.h. jedes Element ist ein Kommutator.*

Beweis: Zur ersten Aussage siehe [6]. Zur zweiten Aussage: \mathfrak{so}_n ist die Menge der schiefsymmetrischen $n \times n$ -Matrizen M . Zu einer orthogonalen Matrix P aus O_n gehört ein Lie-Algebren-Automorphismus $\mathrm{Ad}_P : M \mapsto PMP^{-1}$. Nach

dem Spektralsatz ist jedes $C \in \mathfrak{so}_n$ orthogonal-ähnlich zu einer Matrix in reeller Jordan-Normalform der Gestalt $\text{diag}(J(c_1), \dots, J(c_k), 0, \dots, 0)$, wobei $J(c)$ ein Kästchen der Form $\begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix}$ ist. Durch eine Permutation in den Basisvektoren erreichen wir, daß A orthogonal-ähnlich zu einer Matrix der Gestalt

$$\left(\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ \hline & & & -c_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -c_k \\ \hline & c_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & c_k & & \end{array} \right) \quad (7)$$

wird. Es gibt also einen Automorphismus von \mathfrak{so}_n , der M auf Normalform (7) bringt. Es genügt daher, die Aussage für Matrizen in Normalform (7) zu zeigen.

Sei $B = \text{diag}(J(b_1), \dots, J(b_k))$ für $n = 2k$ gerade bzw. $B = \text{diag}(J(b_1), \dots, J(b_k), 0)$ für $n = 2k + 1$ ungerade, und $A = (a_j^i) \in \mathfrak{so}_n$. Für $AB - BA$ ergibt sich die Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc} K_{11} & \dots & K_{1k} & L_1 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & K_{kk} & L_k \\ \text{s.s.} & & & 0 \end{array} \right)$$

mit

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} b_j a_{2i}^{2i-1} + b_i a_{2j-1}^{2i} & -b_j a_{2j-1}^{2i-1} + b_i a_{2j}^{2i} \\ b_j a_{2j}^{2i} - b_i a_{2j-1}^{2i-1} & -b_j a_{2j-1}^{2i} - b_i a_{2j}^{2i-1} \end{pmatrix} \text{ und } L_i = \begin{pmatrix} -b_i a_n^{2i} \\ b_i a_n^{2i-1} \end{pmatrix},$$

wobei die L_i und die 0 nur bei ungeradem $n = 2k + 1$ auftreten.

Wir zeigen nun, daß eine beliebige Matrix in Normalform (7) als Kommutator zweier Matrizen A und B der obigen Gestalt geschrieben werden kann. Wir interpretieren zu diesem Zweck die Gleichung $AB - BA = C$ als lineares Gleichungssystem für die a_j^i . Dieses zerfällt effektiv in $k(k-1) 2 \times 2$ -Gleichungssysteme für die Variablenpaare a_{2j-1}^{2i-1} und a_{2j}^{2i} bzw. a_{2j}^{2i-1} und a_{2j-1}^{2i} ($1 \leq i < j \leq k$) und, sofern $n = 2k + 1$ gilt, noch in $2k$ Einzelgleichungen für die Variablen a_n^i . Die Kästchen K_{ii} auf der Hauptdiagonale sind, genauso wie die entsprechenden Stellen in der Matrix C , gleich 0.

Die Koeffizientenmatrizen der zum Kästchen K_{ij} gehörigen 2×2 -Gleichungssysteme haben für $i \neq j$ Determinante $\pm(b_i^2 - b_j^2)$, diese sind daher für $|b_i| \neq |b_j|$ eindeutig lösbar. Die Einzelgleichungen zum Kästchen L_i sind genau für $b_i \neq 0$ eindeutig lösbar. Wählen wir k reelle Zahlen b_1, \dots, b_k mit $b_i \neq 0$ und $|b_i| \neq |b_j|$ für $i \neq j$, so können A so bestimmen, daß $[A, B] = C$ gilt. \square

Lemma 8 Für die Lieschen Algebren $\mathfrak{g} = \mathfrak{oa}_n$ und $\mathfrak{g} = \mathfrak{sa}_n$ gilt $K(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, d.h. jedes $x \in \mathfrak{g}$ ist ein Kommutator.

Beweis: Wir identifizieren $\mathfrak{oa}_n = \mathfrak{t}_n \oplus_{\text{id}} \mathfrak{so}_n$ mit der Menge aller Paare (v, M) mit $v \in \mathfrak{t}_n = \mathbb{R}^n$, $M \in \mathfrak{so}_n$, wobei $[(v_1, M_1), (v_2, M_2)] = (M_1 v_2 - M_2 v_1, M_1 M_2 - M_2 M_1)$, und $\text{OA}_n = \text{T}_n \times_{\text{id}} \text{O}_n$ mit der Menge aller Paare (p, P) mit $p \in \mathbb{R}^n = \text{T}_n$, $P \in \text{O}_n$, wobei $(p_1, P_1) \cdot (p_2, P_2) = (p_1 + P_1 p_2, P_1 P_2)$.

Jedes $(p, P) \in \text{OA}_n$ induziert einen Automorphismus von \mathfrak{oa}_n durch $\text{Ad}_{(p, P)} : (v, M) \mapsto (Pv - PMP^{-1}p, PMP^{-1})$. Analog zum Beweis von Lemma 7 gibt es ein $P \in \text{O}_n$, sodaß PMP^{-1} Normalform (7) besitzt. Es genügt daher, die Aussage für Paare (v, M) mit M in Normalform (7) zu zeigen.

Wir setzen $(b, B) = ((\beta_1, \dots, \beta_k), \text{diag}(J(b_1), \dots, J(b_k), 0))$, wobei die letzte 0 nur bei $n = 2k + 1$ ungerade auftritt. Weiters sei $(a, A) = ((\alpha_1, \dots, \alpha_n), (a_j^i))$. Dann ist $[(a, A), (b, B)] = (c, C)$ mit

$$c = \begin{pmatrix} a_1^1 \beta_1 + \dots + a_n^1 \beta_n \\ \vdots \\ a_1^n \beta_1 + \dots + a_n^n \beta_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -b_1 \alpha_2 \\ b_1 \alpha_1 \\ -b_2 \alpha_4 \\ b_2 \alpha_3 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} K_{11} & \dots & K_{1k} & L_1 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & K_{kk} & L_k \\ \text{s.s.} & & & 0 \end{pmatrix},$$

wobei die Nullen und die L_i nur bei ungeradem n auftreten. Wir finden nach Lemma 7 Matrizen A und B so, daß $AB - BA = M$ gilt. Sei $v = (v_1, \dots, v_n)^T$. Ist $n = 2k$ gerade, so können wir daher, um die Gleichung $c = v$ zu lösen, wegen $b_i \neq 0$ $\beta_1 = \dots = \beta_n = 0$ und $\alpha_2 = v_1/b_1, \alpha_1 = -v_2/b_2, \alpha_4 = v_3/b_2, \alpha_3 = -v_4/b_2, \dots$ setzen.

Sei nun $n = 2k + 1$ ungerade. Es gibt eine Einzelgleichung der Gestalt $\pm b_{i_0} a_j^n = 0$, denn in der n -ten Spalte der Matrix M ist höchstens ein Eintrag $\neq 0$. Wir können die b_i so wählen, daß $|b_i| \neq |b_j|$ für $i \neq j$, $b_i \neq 0$ für $i \neq i_0$ und $b_{i_0} = 0$ gilt. Dann wählen wir $a_{i_0}^n = -a_{i_0}^{i_0}$ ungleich 0. Daraufhin bestimmen wir β_1, \dots, β_n so, daß $a_1^n \beta_1 + \dots + a_n^n \beta_n = v_n$, und anschließend $\alpha_1, \dots, \alpha_{2k}$ so, daß $a_1^{2j-1} \beta_1 + \dots + a_n^{2j-1} \beta_n + b_j \alpha_{2j} = v_{2j-1}$ und $a_1^{2j} \beta_1 + \dots + a_n^{2j} \beta_n - b_j \alpha_{2j-1} = v_{2j}$ für $j = 1, \dots, k$ gilt. Damit ist $[(a, A), (b, B)] = (v, M)$.

Zu \mathfrak{sa}_n : Wir oben identifizieren wir \mathfrak{sa}_n mit der Menge aller Paare (v, M) mit $v \in \mathbb{R}^n$, $M \in \mathfrak{sl}_n$ und SA_n mit der Menge aller Paare (p, P) mit $p \in \mathbb{R}^n$, $P \in \text{SL}_n$. Nach [6] gibt es für jedes $M \in \mathfrak{sl}_n$ eine Matrix P so, daß alle Hauptdiagonalelemente von PMP^{-1} verschwinden. O.B.d.A. ist $P \in \text{SL}_n$, sodaß für alle (v, M) ein Lie-Algebren-Automorphismus $\text{Ad}_{(p, P)}$ existiert, sodaß für $(w, N) = \text{Ad}_{(p, P)}(v, M)$ alle Hauptdiagonalelemente von N verschwinden. Machen wir nun analog zu [6] einen Ansatz der Form $[(a, A), (b, B)] = (w, N)$ mit $b = 0$ und $B = \text{diag}(b_1, \dots, b_n)$, $a = (\alpha_i)$, $A = (a_j^i)$, so ergibt einfaches Ausrechnen die Gleichung

$$w = \begin{pmatrix} -b_1 \alpha_1 \\ \vdots \\ -b_n \alpha_n \end{pmatrix} \text{ und } N = \begin{pmatrix} \vdots & & \\ \cdots & (b_j - b_i) a_j^i & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix},$$

die durch Wahl von $b_i \neq 0$ und $b_i \neq b_j$ für $i \neq j$ gelöst werden kann. \square

Damit haben wir das Ergebnis:

Satz 9 *In der projektiven Bewegungsgruppe PGL_n des n -dimensionalen projektiven Raumes ($n \geq 1$), in der Bewegungsgruppe $\mathrm{O}_{n+1}/\{E, -E\}$ des n -dimensionalen elliptischen Raumes ($n \geq 2$), in der Bewegungsgruppe OA_n des euklidischen n -dimensionalen Raumes ($n \geq 3$) und in der äquiaffinen Gruppe SA_n des n -dimensionalen affinen Raumes ($n \geq 2$) stimmt jede Bewegung von zweiter Ordnung mit einer geeigneten Überlagerung von drei einparametrischen Untergruppen überein.*

Literatur

- [1] A. A. ALBERT, B. MUCKENHAUPT, *On matrices of trace zero*, Michigan Mathematics Journal 4 (1957), 1 - 3
- [2] G. BROWN, *On commutators in a simple Lie algebra*, Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963), 763 - 767
- [3] R. HIRSCHBÜHL, *Commutators in Classical Lie Algebras*, Linear Algebra and its Applications 142 (1990), 91 - 111
- [4] A. L. ONISHCHIK (Ed.), *Lie Groups and Lie Algebras I*, (Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Volume 20), Springer Verlag 1993
- [5] A. L. ONISHCHIK, E. B. VINBERG, *Lie Groups and Algebraic Groups*, Springer Verlag 1990
- [6] K. SHODA, *Einige Sätze über Matrizen*, Japanese Journal of Mathematics 13 (1937), 361 - 365
- [7] H. VOGLER, *Überlagerungen von einparametrischen Untergruppen*, Vortrag bei der Österreichischen Geometrie-Tagung in Seggau, 1994