

# Freiformarchitektur und Mathematik

Helmut Pottmann und Johannes Wallner

Einer der herausragenden Trends in der modernen Architektur ist das Streben nach der Realisierung von freien Formen, die den Anschein erwecken, als seien nicht nur die traditionellen Einschränkungen der Baubarkeit, sondern auch die der Gravitation nicht länger gültig. In der Tat stoßen solche Projekte nicht selten an die Grenzen wenn schon nicht des physisch Möglichen, so doch des mit vertretbarem Zeitaufwand und finanziellem Einsatz Machbaren. Es ist nicht verwunderlich, dass eine erfolgreiche Kommunikation von Entwurf, Detailplanung und Realisierung sowie Finanzierung von allen drei Partnern – Architekten, Ingenieuren und Bauherr – Bereitschaft zum gegenseitigen Verstehen verlangt. Störfaktoren in diesem delikaten Verhältnis können eine Finanzkrise genauso sein wie mangelnde Flexibilität bei kleinen Änderungen. Der Mathematik und besonders der Geometrie und Optimierung kommt in diesem Prozess immer öfter die Rolle einer Problemlöserin zu.

Zur großen Überraschung der Beteiligten hat sich herausgestellt, dass dieses Gebiet nicht nur ein gänzlich neues Anwendungsfeld der Mathematik eröffnet, sondern dass Fragestellungen, die ihren Ursprung in geometrischen Details von Freiformarchitektur haben, auch umgekehrt befruchtend auf die mathematische Forschung wirken. Teilweise ergeben sich Zusammenhänge mit sehr aktuellen Gebieten. Wir möchten auf die folgenden Themen eingehen:

- Die Realisierung von Freiformflächen als Stahl-Glas-Konstruktionen mit ‚torsionsfreier‘ Tragstruktur hat einen direkten Bezug zur diskreten Differentialgeometrie und den Krümmungen von Flächen, genauso wie zu den Geometrien von Möbius, Laguerre und Lie.
- Das Bauen von glatten Freiformflächen und die dazu notwendige Zerlegung in möglichst einfache und repetitive Elemente führt auf komplexe gemischt kontinuierlich-diskrete Optimierungsprobleme.
- Tragstrukturen aus gekrümmten Trägern stehen im Zusammenhang mit Mustern aus geodätischen Linien und Blaschkes Geometrie der Gewebe.
- Kreis- und Kugelpackungen auf Flächen zeigen eine Analogie zu Uniformisierung und der konformen Geometrie der Flächen analog zur bekannten Approximation von konformen Abbildungen durch Kreispackungen in der Ebene.

Trotz des jungen Datums dieser Entwicklungen gibt es bereits einzelne realisierte Projekte, in denen die obigen Aspekte eine Rolle spielen.

## I Mehrschichtenkonstruktionen – Krümmungen diskreter Flächen

Es ist einfach, eine beliebige Form durch ein Dreiecksnetz zu ersetzen und als Stahl-Glas-Konstruktion zu realisieren. Dasselbe mit einem Vierecksnetz mit ebenen Facetten zu tun ist schwieriger. Dass man es überhaupt versucht, ist neben der Ästhetik und dem geringeren Gewicht einer solchen Konstruktion darin begründet, dass es für Dreiecksnetze im Wesentlichen unmöglich ist, eine sogenannte torsionsfreie Tragstruktur zu erreichen: Das sind Träger, die in einem Knoten so zusammenstoßen, dass ihre Symmetrieebenen einander in einer gemeinsamen Knotenachse schneiden. Das folgende Bild zeigt einen Knoten, bei dem das Gegenteil der Fall ist und dessen Fertigung entsprechend umständlich ausfällt.

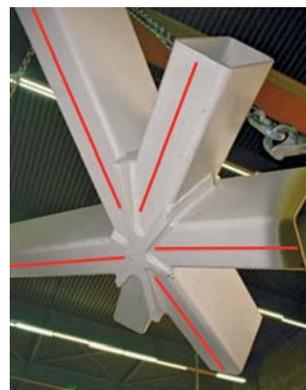


Abbildung 1. Knoten „mit Torsion“ für eine Stahlkonstruktion

In der Wüste ist Schutz vor Regen nicht so wichtig, und man kann darauf verzichten, die Facetten eines Vierecksnetzes mit Glas ganz auszufüllen: Die Abbildungen 2 und 3 zeigen ein Beispiel, bei dem ein Vierecksnetz nur auf Torsionsfreiheit der Tragstruktur und Schönheit (mit Hilfe eines Regularisierungsterms in der Zielfunktion der Optimierung, der die 2. Differenzen der Knoten enthält) hin optimiert wurde. In den gemäßigten Breiten hat man jedoch gerne die ebenen Facetten. Bereits R. Sauer [8] hat darauf hingewiesen, dass solche Netze diskrete Analogie von glatten Flächen  $f(u, v)$  darstellen, bei denen  $\det(\partial_u f, \partial_v f, \partial_{uv} f) = 0$  gilt (konjugierte Parametrisierung einer Fläche). In jüngerer Zeit wurde dieses Thema z. B. in [15] aufgegriffen. Die numerische Optimierung eines Netzes auf Planarität der Facetten wird in [10] diskutiert, dort werden auch Designmethoden mittels Unterteilungsalgorithmen vorgeschlagen. Wegen der Nicht-

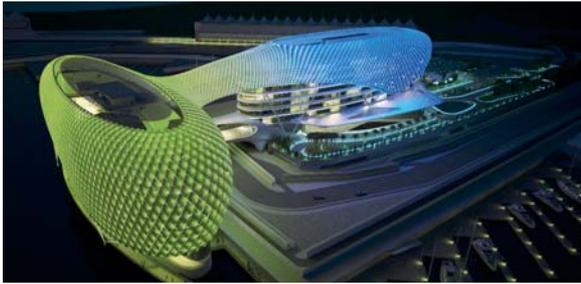


Abbildung 2. Das Yas Island Hotel in Abu Dhabi, eröffnet 2009, durch welches die Formel 1-Rennstrecke führt (Asymptote Architecture; Computermodell).

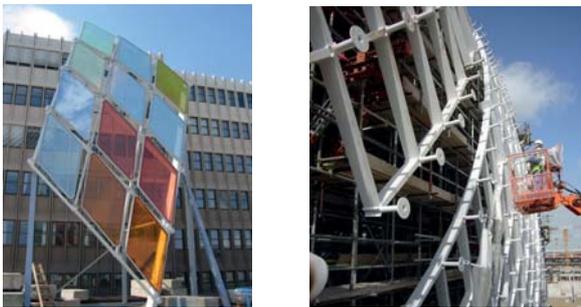


Abbildung 3. Details zu Abbildung 2. Links: Testaufbau am Werksgelände von Waagner-Biro Stahlbau, Wien. Rechts: Montage. Deutlich ist zu erkennen, dass die Facetten nicht eben sind und dass die Tragstruktur fast torsionsfrei ist.

linearität und Nichtkonvexität dieses Optimierungsproblems sind das Wissen um eine geeignete Initialisierung der Optimierung und der Zusammenhang zur Differentialgeometrie wichtig.

#### Eine Krümmungstheorie für polyhedrale Flächen

Wie durch Abbildung 4 motiviert, betrachten wir Netze  $M$ ,  $M'(d)$  mit Knoten  $m_i$  und  $m'_i = m_i + d \cdot s_i$ , die

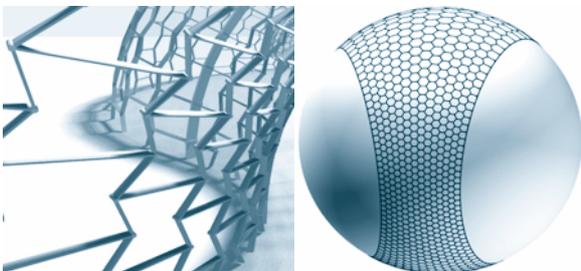


Abbildung 4. Ein Netz  $M$  mit ebenen Facetten und torsionsfreier Tragstruktur kann als ein Paar von eng beieinander liegenden, kantenweise parallelen Netzen  $M$ ,  $M'$  im Abstand  $d$  interpretiert werden, die diese Tragstruktur aufspannen: Sind  $m_i$  und  $m'_i$  einander entsprechende Knoten, so bilden  $s_i = (m'_i - m_i)/d$  ein Netz aus „normierten“ Normalvektoren von  $M$  (rechts). Hier ist der Abstand  $d$  zwischen entsprechenden Kanten von  $M$  und  $M'$  konstant, also ist das Netz  $S = (M' - M)/d$  kantenweise tangential der Einheitskugel umschrieben [12].

kombinatorisch äquivalent sind, ebene Facetten besitzen, und bei denen entsprechende Kanten zueinander parallel sind. Es ist oft sinnvoll,  $s_i$  als Normalvektor der diskreten Fläche  $M$  im Punkt  $m_i$  zu betrachten. Die Oberfläche von  $M'$  als Funktion von  $d$  lautet

$$\mathcal{A}(M'(d)) = \sum_{\substack{\text{entsprechende} \\ \text{Facetten } f, f^* \text{ in } M \text{ und } S}} (\mathcal{A}(f) + 2d\mathcal{A}(f, f^*) + d^2\mathcal{A}(f^*)), \quad (1)$$

wobei  $\mathcal{A}(f, f^*) = \frac{1}{2}(\mathcal{A}(f + f^*) - \mathcal{A}(f) - \mathcal{A}(f^*))$  den orientierten gemischten Flächeninhalt der kantenweise parallelen Facetten  $f, f^*$  bedeutet. Für glatte Flächen  $M$  wird die Oberfläche von Parallelfächern  $M'(d)$  im Abstand  $d$  durch die Steiner-Formel

$$\mathcal{A}(M'(d)) = \int_M (1 - 2dH + d^2K) d\sigma_M \quad (2)$$

ausgedrückt, wobei  $H$  und  $K$  mittlere und Gaußsche Krümmung von  $M$  darstellen. Die Analogie zwischen (1) und (2) führt zur Definition einer mittleren Krümmung  $H_f$  und einer Gaußschen Krümmung  $K_f$  für jede Facette  $f$  des Netzes  $M$ :

$$H_f = -\frac{1}{\mathcal{A}(f)}\mathcal{A}(f, f^*), \quad K_f = \frac{1}{\mathcal{A}(f)}\mathcal{A}(f^*).$$

Die aus der glatten Theorie bekannte Relation  $H^2 \geq K$  ist nun äquivalent zur Minkowski-Ungleichung  $\mathcal{A}(f, f^*)^2 \leq \mathcal{A}(f)\mathcal{A}(f^*)$ . Es liegt nahe, die entsprechenden Minimal- und cmc-Flächen, etc. zu untersuchen. Wir verweisen hier auf [2, 4, 6]. Unerwarteterweise stellten sich die diskreten s-isothermen Minimalflächen von [1] als Spezialfall heraus.

Von großem geometrischen Interesse sind solche Netze  $M$ , für die ein Parallelnetz  $M'$  in konstantem Abstand  $d$  existiert, wobei dieser Abstand zwischen Knoten, Kanten oder Facetten gemessen werden kann. Es stellt sich heraus, dass die Fälle (i) und (iii), die man elementargeometrisch durch die Existenz von Umkreisen von Facetten bzw. durch berührende Kegel in den Knoten charakterisieren kann, zur Lieschen Kugelgeometrie gehören [10, 3], während Fall (ii) Laguerre-invariant ist und mit den Koebe-Polyedern zusammenhängt [12, 1, 4].

#### Semidiskrete Flächen

Ein Streifen aus ebenen Vierecken geht bei einem geeigneten Grenzübergang, währenddessen diese Vierecke eben bleiben, aber immer schmaler werden, in eine abwickelbare Fläche über (siehe Abbildung 5). Die Rationalisierung von Freiformarchitektur als eine Folge von solchen abwickelbaren, einfach gekrümmten Streifen ist in den Entwürfen von Frank Gehry prominent vertreten, in denen diese Flächen durch das Biegen von Metallblechen hergestellt werden. Es stellt sich hier wiederum ein Approximationsproblem: Wie gut kann man eine allgemeine Fläche durch solche Streifenmodelle annähern und konkreter: Welche Informationen aus der klassischen Differentialgeometrie geben Hinweise auf eine solche Zerlegung?

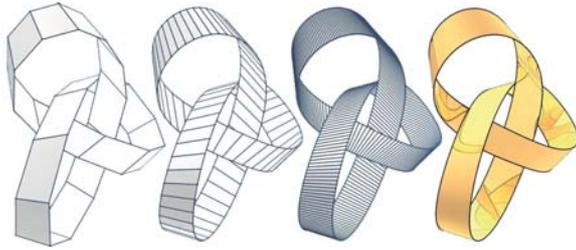


Abbildung 5. Einfach gekrümmte (= abwickelbare) Fläche als Limes von Streifen aus ebenen Vierecken. Ihre numerische Glattheit ist  $C^2$ , was man den  $C^1$ -Reflexionen entnimmt [10].

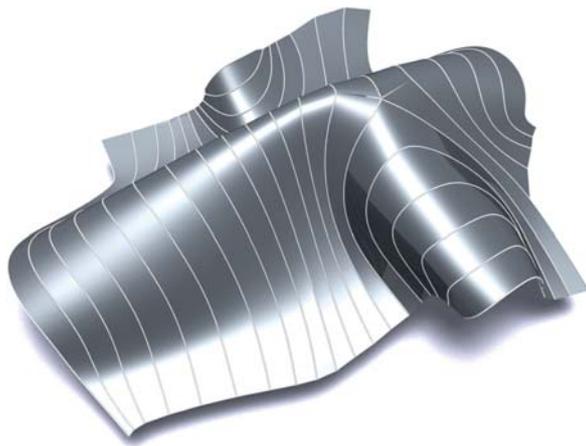


Abbildung 6. Ein Stück Filz wird durch eine stückweise abwickelbare Fläche, ein semidiskretes konjugiertes Netz approximiert (Grenzfall der Approximation durch ein Vierecksnetz mit ebenen Facetten, [13]).

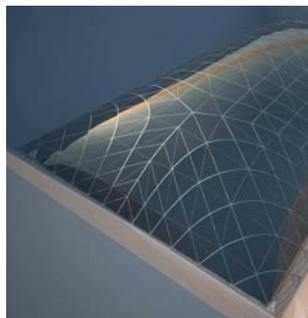


Abbildung 7. Ein Design aus einer Folge von einfach gekrümmten, abwickelbaren Flächen, das attraktive statische Eigenschaften aufweist (RFR und Evolute).

Die Antwort ist im Wesentlichen dieselbe wie bei der Zerlegung in ebene viereckige Facetten, was aufgrund des Grenzübergangs, der in Abbildung 5 illustriert ist, nicht überrascht [13]. Ein Beispiel kann man in Abbildung 6 sehen.

Der architektonische Entwurfsprozess läuft nicht immer so ab, dass eine Form zuerst entworfen und anschließend „rationalisiert“ wird: Der große Einfluss der spezifischen Zerlegung in baubare Einzelteile auf das Erscheinungsbild des fertigen Baus bewirkt, dass diese Zerlegung oft ein wesentlicher Bestandteil des Entwurfs bleibt. Die nichttrivialen geometrischen Nebenbedingungen bei der Formfindung kann man mit Verfahren, bei denen Geometrie-Optimierung und Netzverfeinerung einander abwechseln, berücksichtigen [13]. Für einen ernst gemeinten Entwurf aus einfach gekrümmten Streifen siehe Abbildung 7.

## 2 Kreismuster – Konforme Abbildungen

Gekrümmte Flächen müssen zum Zwecke der architektonischen Realisierung nicht unbedingt streng geometrisch in ein Netz mit ebenen Facetten und ins Auge springenden Kanten aufgelöst sein. Genauso oft wird ein alter Trick angewandt und das Auge von der Rationalisierung abgelenkt: Das Kreismuster am Kaufhaus Selfridges in Birmingham (Abbildung 8 rechts) ist rein ornamental. Das Überdecken von Flächen mit Kreisen und Kugeln muss jedoch nicht bloße Verzierung sein, sondern hat direkte Bezüge sowohl zur funktionellen Rationalisierung als auch zur konformen Geometrie der Flächen [14]. Es hat sich herausgestellt, dass die folgende Eigenschaft von Dreiecksnetzen sehr interessant ist: Für jede Kante sollen die *Inkreise* der benachbarten dreieckigen Facetten einander berühren. Man überlegt sich leicht, dass dies genau dann der Fall ist, wenn in jedem Viereck aus zwei benachbarten Dreiecken die Seitenlängen die Gleichung

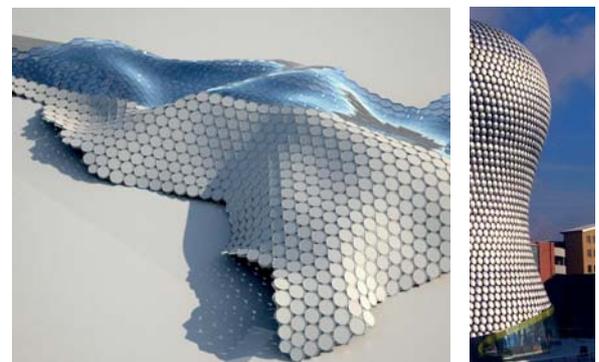
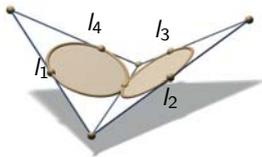


Abbildung 8. Links: Wabenstruktur mit hexagonaler Kombinatorik und damit verbundene approximative Kreispackung [14]. Rechts: Selfridges, Birmingham



$$l_1 + l_3 = l_2 + l_4$$

erfüllen. Von einem solchen Dreiecksnetz mit der Inkreis-Packungseigenschaft (CP-Netz) lassen sich weitere Strukturen ableiten: Abbildung 9 zeigt eine Kugelpackung – die Kugeln schneiden die Inkreise der Facetten orthogonal und haben ihre Mittelpunkte in den Netzknoten – eine approximative Kreispackung, und eine Tragstruktur, die auf einem abgeleiteten Netz mit drei- und sechseckigen Facetten beruht und günstige statische Eigenschaften aufweist.

### Konforme Abbildungen von Flächen

Kreispackungen im Sinne von [7] werden seit längerer Zeit erfolgreich als diskrete Versionen von konformen Abbildungen in der Ebene eingesetzt: Zwei kombinatorisch äquivalente Kreispackungen, die die Gebiete  $D$ ,  $D'$  überdecken, repräsentieren eine diskrete konforme

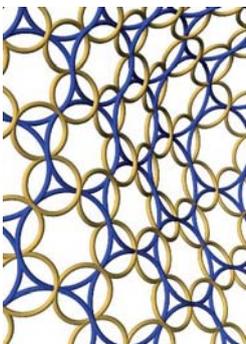
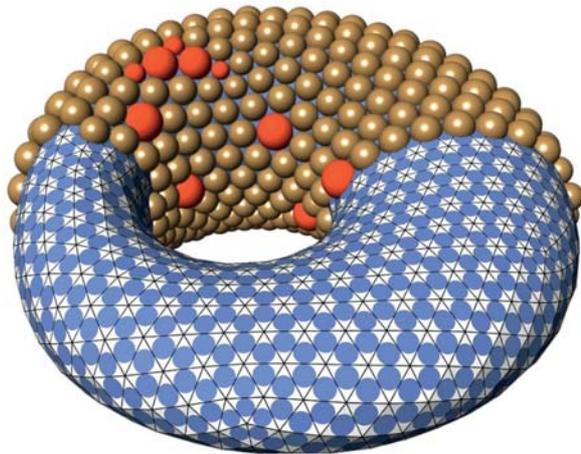


Abbildung 9. Von einem CP-Dreiecksnetz abgeleitete Strukturen. Oben: Packung mit Kugeln, welche die Inkreise der Facetten orthogonal schneiden. Unten links: Approximative Kreispackung (blau). Unten rechts: Hybrides Dreiecks- und Sechsecksnetz mit ebenen Facetten und Tragstruktur.

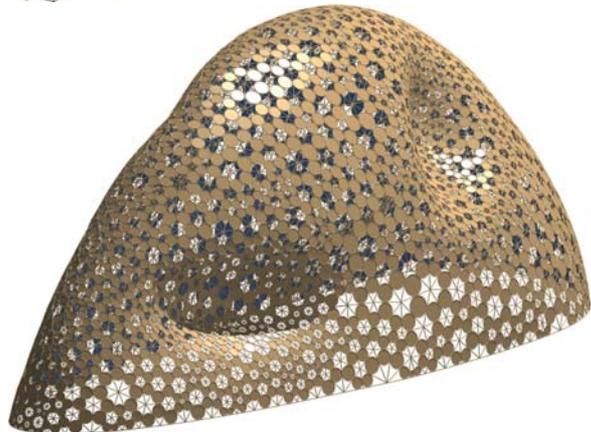
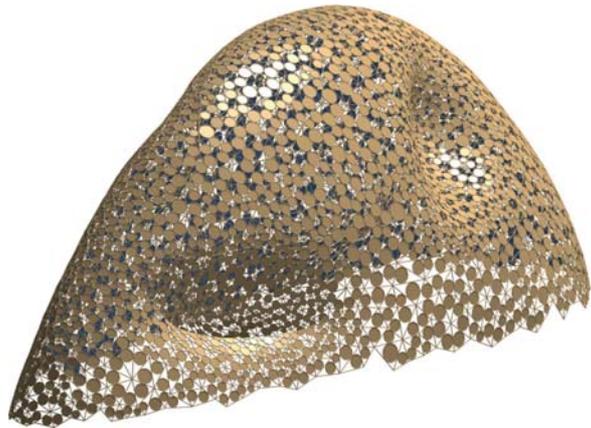


Abbildung 10. Oben: Ein irreguläres Dreiecksnetz überdeckt den Blob von M. Fuksas, der in Eindhoven in Form eines viel reguläreren Dreiecksnetzes realisiert wurde. Gezeigt sind die Inkreise der Facetten. Unten: Diskrete Uniformisierung durch ein kombinatorisch äquivalentes Netz mit der Inkreis-Packungseigenschaft.

Abbildung von  $D$  auf  $D'$ . Immer feinere Kreispackungen approximieren glatte konforme Abbildungen. Zum Beispiel haben He und Schramm eine Erweiterung des klassischen Koebeschen Normalformenproblems mit Hilfe von Kreispackungen gezeigt [5]: Im Wesentlichen ist ein Gebiet konform äquivalent zu einem kreisrunden Normalgebiet mit kreisförmigen Löchern, deren Position bis auf Möbiustransformationen eindeutig ist. Der Satz gilt auch für Riemannsche Flächen; Spezialfälle sind die konforme Äquivalenz aller einfach zusammenhängenden Gebiete mit Rand und aller Flächen, die homöomorph zur Sphäre sind. Hingegen sind je zwei Tori oder je zwei Gebiete mit Loch im allgemeinen nicht konform äquivalent.

Durch Experimente gewinnt man Einsicht in das Verhalten von CP-Dreiecksnetzen: Netze homöomorph zur Kreisscheibe oder zur Kugel lassen sich so optimieren, dass sie nach wie vor die ursprüngliche Fläche approximieren, jedoch die CP-Eigenschaft besitzen (siehe Abbildung 10). Hingegen lassen sich Netze homöomorph zum Kreisring im Allgemeinen nicht auf die Packungseigenschaft optimieren, dies gelingt z. B. erst nach dem Freigeben einer der beiden Randkurven (siehe Abbildung 11).

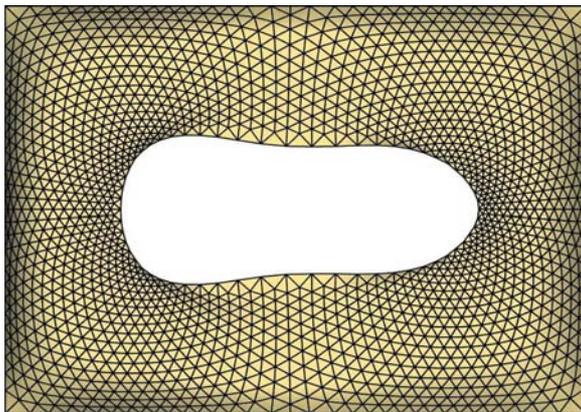
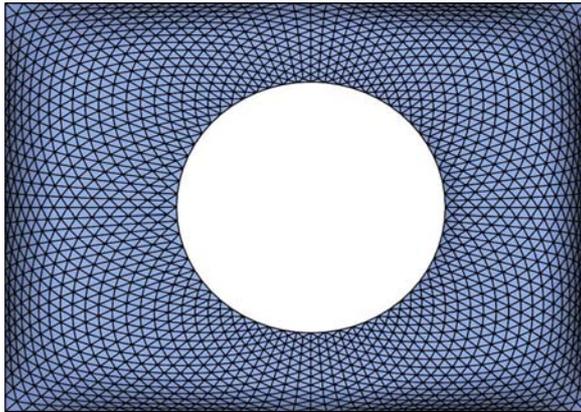


Abbildung 11. Oben: *Great Court Roof, British Museum, London*. Dreiecksnetz von Chris Williams. Unten: *Kombinatorisch äquivalentes Netz mit der Inkreis-Packungseigenschaft, welches dieselbe Fläche approximiert und deren äußere Randkurve unverändert ist; der innere Rand ist freigegeben.*

Motiviert durch [7] deuten wir dieses Verhalten wie folgt: Die natürliche Abbildung von einem CP-Netz auf ein kombinatorisch äquivalentes CP-Netz ist eine diskrete konforme Abbildung. Die konforme Klasse eines Netzes ist durch seine Kombinatorik gegeben. Wird eine Fläche  $\Phi$  durch ein Dreiecksnetz  $\Delta$  (nicht CP) approximiert, so stimmt die durch die Kombinatorik von  $\Delta$  gegebene konforme Klasse nicht notwendigerweise mit der konformen Klasse von  $\Phi$  überein, und folglich kann  $\Phi$  nicht durch ein CP-Netz  $\Delta'$  kombinatorisch äquivalent zu  $\Phi$  approximiert werden (d. h. die Optimierung von  $\Delta$  auf die CP-Eigenschaft wird fehlschlagen). Ausnahme sind Flächen homöomorph zur Kreisscheibe oder zur Sphäre, wo es nur eine einzige konforme Klasse gibt. Diese Heuristik beruht auf der folgenden

**Vermutung:** *Die natürlichen Abbildungen zwischen kombinatorisch äquivalenten Dreiecksnetzen mit der Inkreis-Packungseigenschaft approximieren konforme Abbildungen zwischen Flächen.*

Ein Beweis ist vermutlich nicht leicht.

### 3 Effiziente Panelisierung – Diskret-Kontinuierliche Optimierungsprobleme

Die bauliche Ausführung von Freiformflächen beruht in der Regel auf einer Einteilung in Paneele. Bereits die Zerlegung einer freien Form in Paneele, deren Abmessungen und Anordnung den praktischen Anforderungen genügen, ist eine interessante geometrische Aufgabe mit Bezügen zu den intensiv studierten Parametrisierungsmethoden der geometrischen Datenverarbeitung. Hier spielt die Ästhetik eine wichtige Rolle, vor allem, wenn die Paneeलगrenzen in der Endausführung klar erkennbar sind.

Nach erfolgreicher Zerlegung einer Freiformfassade sind meist keine zwei Paneele identisch, und im schlimmsten Fall hätte man zur Herstellung jedes einzelnen ein eigenes Formwerkzeug zu fertigen, was typischerweise mehr kostet als die Paneeelfertigung selbst. Um diese Kosten in den Griff zu bekommen, setzen wir ein geometrisches Optimierungsverfahren ein [9]: Bei bekannten Materialien und Fertigungsverfahren optimiert man nach folgenden Kriterien: (i) Es sollen möglichst einfache, billig herstellbare Paneele typen (ebene Paneele, Zylinder etc.) verwendet werden und (ii) dort, wo eigene Formwerkzeuge zu fertigen sind, ist auf ihre *mehrfache Verwendung* zu achten. Damit ist nicht gemeint, dass Paneele exakt kongruent ausfallen, sondern dass sie hinreichend große Ausschnitte desselben Flächenstücks (Formwerkzeugs) sind. Die Optimierung muss außerdem die Oberflächenqualität berücksichtigen: Paneele sollen möglichst lückenlos und mit geringen Knickwinkeln aneinanderstoßen. Die Freiheitsgrade in der Optimierung sind Abweichungen von der Idealform innerhalb von Toleranzzonen.

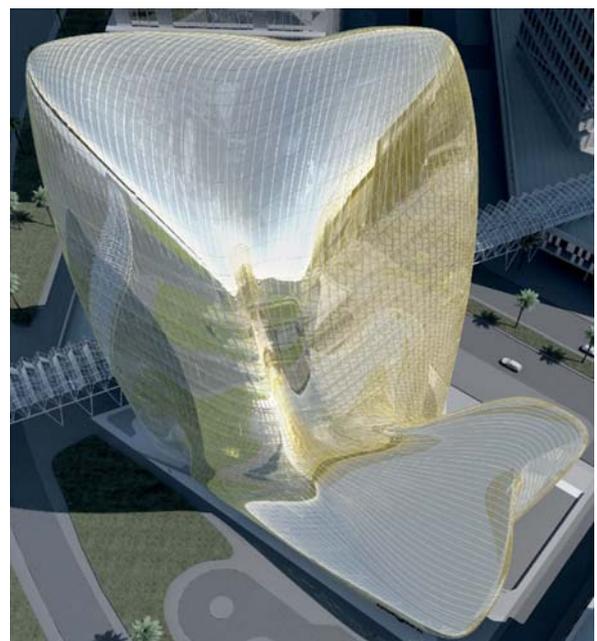


Abbildung 12. *National Holding Headquarters, Abu Dhabi* (Zaha Hadid Architects)

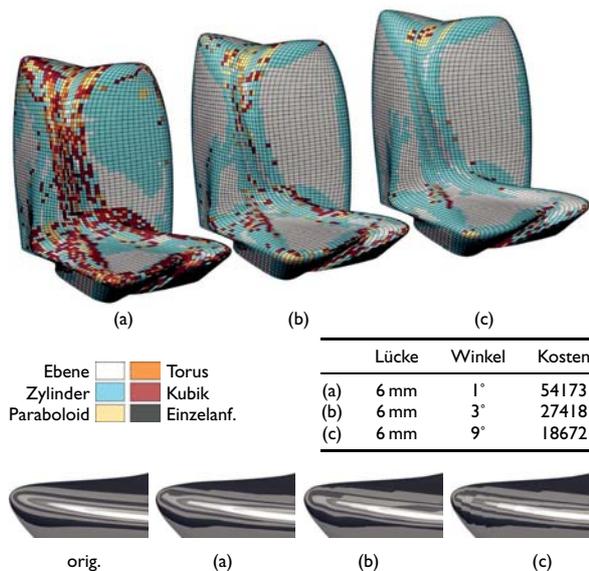


Abbildung 13. Optimale Zerlegung in Paneele. Das Freiformdesign aus Abbildung 12 wird entlang eines vorgegebenen Kurvennetzes in Paneele zerlegt, welche verschiedenen Typen angehören (eben, zylindrisch etc.). Je nach geforderter Güte ergeben sich unterschiedliche Gesamtkosten. Durch Spiegelungen wird die erzielte Oberflächengüte visuell verifiziert.

Das Optimierungsverfahren beinhaltet einen diskreten Teil, in dem ähnlich zu set cover Anzahl und Typ der Formwerkzeuge sowie ihre Zuordnung zu Paneelen festgelegt werden, und einen kontinuierlichen Teil, der die Formparameter und Position im Raum aller beteiligten Flächen bestimmt. Auch das Kurvennetz wird in geringem Umfang mit-optimiert. Abbildung 13 zeigt ein Beispiel, an dem die Reduktion der Kosten je nach erzielter Qualität deutlich sichtbar wird.

Die hohe Komplexität dieses Optimierungsproblems ist durch die Anzahl der Paneele (mehrere tausend) und die starke Verflechtung der lokalen Übergänge längs der Paneelgrenzen und der globalen Kopplung von Paneelen über die Zuordnung zu Formwerkzeugen erklärbar. Diverse Ideen zur Beschleunigung sind mathematischer Natur, wie etwa ein Verfahren zur schnellen Abschätzung der Abweichung zweier Paneele, die noch nicht in eine optimale gegenseitige Lage gebracht wurden.

#### 4 Gekrümmte Träger und funktionelle Muster – Geometrie der Gewebe

Die in der Differentialgeometrie prominenten geodätischen Linien werden im Kontext der Architektur nicht vernachlässigt: Sie treten bei Panelisierungsaufgaben oder bei der Frage nach gekrümmten Trägern auf, die aus geraden Holzteilen durch Biegen um die schwache Achse des

Querschnitts entstehen (Abbildung 14). Wir verweisen die interessierten Leser auf [11], wo Muster aus  $k$  Familien von geodätischen Linien ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) aus der Sicht der geometrischen Datenverarbeitung mit Anwendungsschwerpunkt Freiformarchitektur diskutiert werden und begnügen uns hier mit einigen Stichworten.

Der Abstand von infinitesimal benachbarten geodätischen Linien auf einer Fläche ist proportional zu einer Lösung der Jacobi-Differentialgleichung

$$w'' + Kw = 0, \quad (3)$$

wobei  $K(s)$  die Gauß-Krümmung entlang der betrachteten, nach der Bogenlänge  $s$  parametrisierten geodätischen Linie ist. Wir folgern, dass „parallel verlaufende“ Geodätische wie in Abbildung 14 oben gewünscht nur im Spezialfall  $K = 0$  der abwickelbaren Flächen auftreten können. Gleichung (3) können wir als Anleitung zum Bau von Flächen vorgegebener Gauß-Krümmung auffassen. Zum Beispiel ist bei konstantem Wert  $K < 0$  eine Lösung von (3) durch  $w(s) = a \cdot \cosh(s\sqrt{-K})$  gegeben. Durch Zusammenkleben von Streifen mit dieser Breitenfunktion erzeugen wir ein Modell der hyperbolischen Ebene (Abbildung 15 oben). Solche Flächen sind für Muster aus geodätischen Linien interessant, weil auf ihnen eine 9-parametrische Schar von geodätischen Sechseckgeweben existiert (siehe Abbildung 15, Mitte).

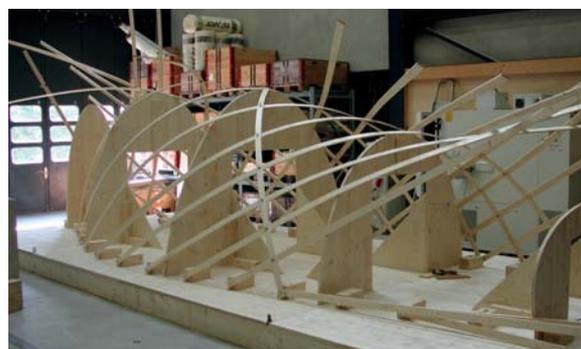
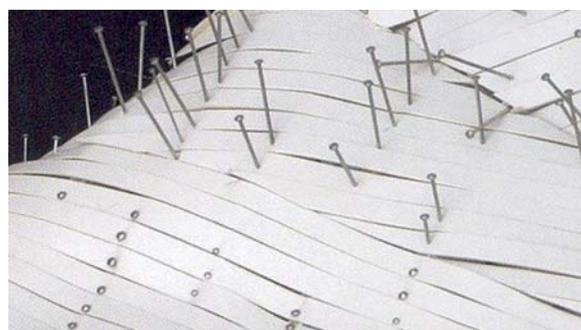


Abbildung 14. Geodätische Muster. Oben: Papierstreifen entlang einer Fläche [16] sind tangentiale Torsen mit geradliniger Abwicklung. Unten: Das Biegen von Holzlatten entlang von Flächen (IBOIS, EPFL Lausanne) erzeugt Kurven verschwindender geodätischer Krümmung. Beide Eigenschaften charakterisieren geodätische Linien [11].

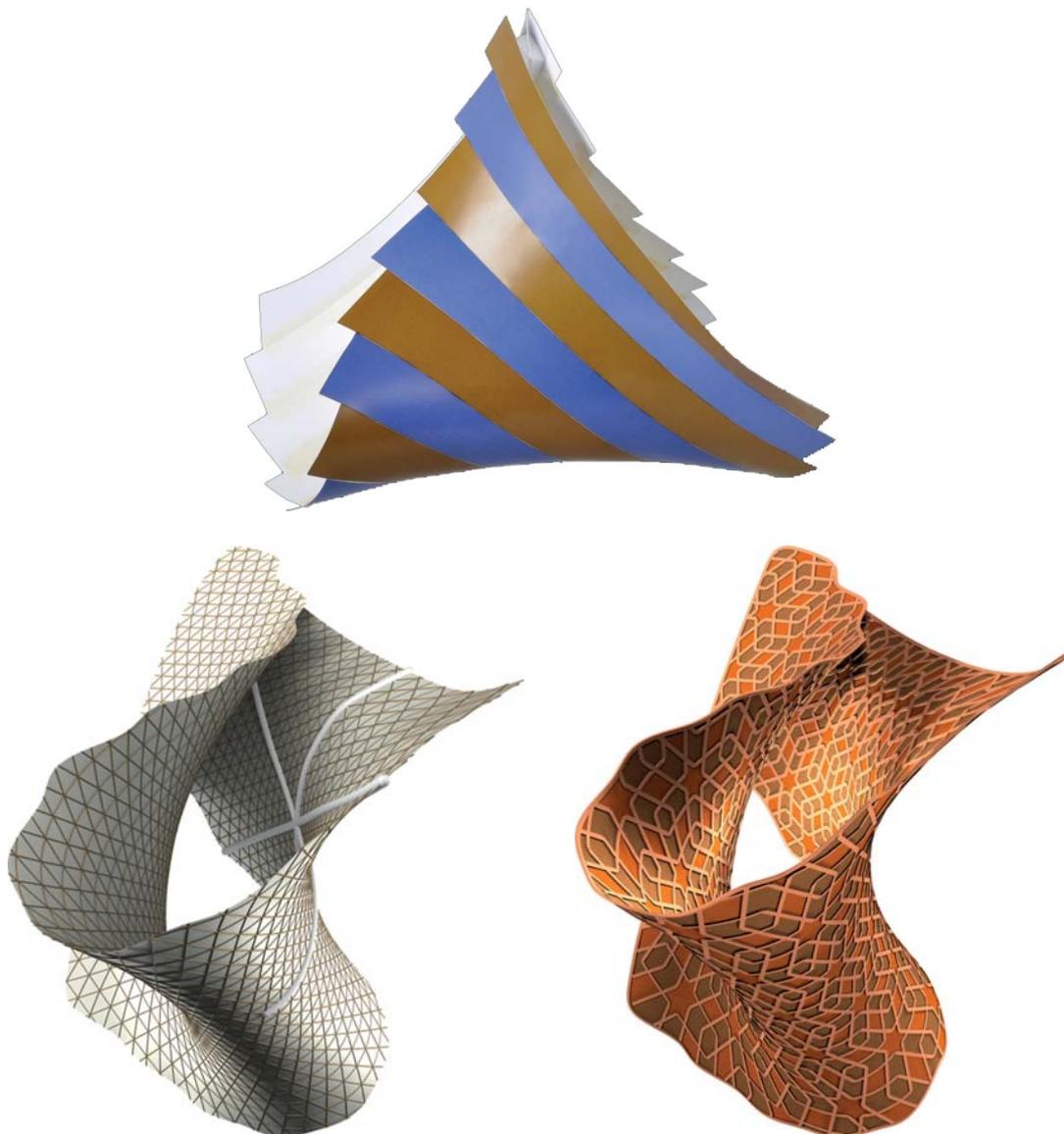


Abbildung 15. Verkleben von „geodätischen“ Streifen der Breite  $a \cosh(s)$  erzeugt ein Modell einer Fläche  $\Phi$  konstanter Gauß-Krümmung (oben). Ein Sechseckgewebe aus geodätischen Linien auf  $\Phi$  (unten links) ist Basis eines durch Biegen von Holzplatten herstellbaren Ornaments (unten rechts).

Ein numerischer Zugang zu diesen Mustern aus drei Scharen  $\{C_{i,s}\}_{s \in \mathbb{R}}$ ,  $i = 1, 2, 3$  von geodätischen Linien ist durch ihre Darstellung als level set möglich:

$$C_{i,s} = \{x \mid \phi_i(x) = s\}, \quad \text{mit}$$

$$\operatorname{div} \left( \frac{\nabla \phi_i}{\|\nabla \phi_i\|} \right) = 0, \quad \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 0.$$

Diese Bedingungen werden in ein Optimierungsproblem umformuliert [11].

Ein Zugang zum Panelisierungsproblem aus Abbildung 14 oben führt über Vektorfelder  $V$ , deren Integralkurven geodätisch sind. Man kann diese Bedingung 2. Ordnung in eine Bedingung 1. Ordnung überführen und so leichter

numerisch behandelbar machen: Bei  $\|V\| = \text{const.}$  gilt

$$\nabla_V(V) = 0 \iff \text{Symmetrie von } X \mapsto \nabla_X(V).$$

Mit Methoden, die der Bildverarbeitung entlehnt sind, erzeugt man *stückweise* geodätische Vektorfelder (Abbildung 16). Die erwähnte Levelset-Methode findet approximative Integralkurven von  $V$  der Form  $\phi_i = \text{const.}$  mit möglichst konstantem Abstand voneinander (ein exakt konstanter Abstand wäre eine Folge der eikonalen Gleichung  $\|\nabla \phi_i\| = \text{const.}$ )

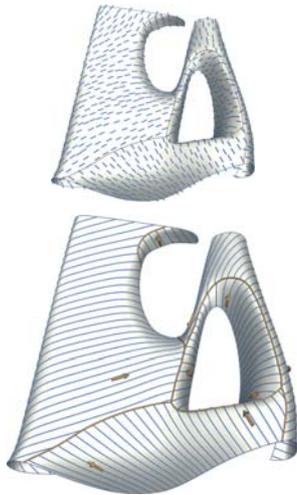


Abbildung 16. Oben: Ein Vektorfeld  $V$ , das stückweise die Gleichung  $\nabla_V(V) = 0$  erfüllt: Integralkurven sind stückweise geodätisch. Unten: Panelisierung in Streifen, die einen Kompromiss zwischen der geodätischen Eigenschaft und der Forderung nach konstanter Breite darstellen [11].

## Zusammenfassung

Dieser Artikel berichtet über Fragestellungen im Zusammenhang mit geometrischen Problemen der Freiformarchitektur, die meist mit der Zerlegung von Flächen in baubare Teile zu tun haben und bei deren Lösung typischerweise Differentialgeometrie und numerische Optimierung eine große Rolle spielen. Nicht alle aufgeworfenen mathematischen Probleme sind hier gelöst, und weitere werden in diesem jungen Gebiet sicherlich auftreten.

## Literatur

### Mathematik

- [1] A. Bobenko, T. Hoffmann, B. Springborn. Minimal surfaces from circle patterns: Geometry from combinatorics. *Ann. Math.*, 164, 231–264, 2006.
- [2] A. Bobenko, H. Pottmann, J. Wallner. A curvature theory for discrete surfaces based on mesh parallelity. *Math. Ann.*, 2010.
- [3] A. Bobenko, Yu. Suris. On organizing principles of discrete differential geometry. *Geometry of spheres. Russ. Math. Surveys*, 62, 1–43, 2007.
- [4] A. Bobenko, Yu. Suris. *Discrete differential geometry: Integrable Structure*. American Math. Soc., 2008.
- [5] Z. X. He, O. Schramm. Fixed points, Koebe uniformization and circle packings. *Ann. Math.*, 137, 369–406, 1993.
- [6] C. Müller, J. Wallner. Oriented mixed area and discrete minimal surfaces. *Discrete Comput. Geom.*, 43, 303–320, 2010.
- [7] K. Stephenson. *Introduction to Circle Packing*. Cambridge Univ. Press, 2005.
- [8] R. Sauer. *Differenzgeometrie*. Springer, 1970.

### Geometrische Datenverarbeitung

- [9] M. Eigensatz, M. Kilian, A. Schiftner, N. Mitra, H. Pottmann, M. Pauly. Paneling architectural freeform surfaces. *ACM Trans. Graphics*, 29/3, 2010.

- [10] Y. Liu, H. Pottmann, J. Wallner, Y.-L. Yang, W. Wang. Geometric modeling with conical meshes and developable surfaces. *ACM Trans. Graphics*, 25/3, 681–689, 2006.
- [11] H. Pottmann, Q. Huang, B. Deng, A. Schiftner, M. Kilian, L. Guibas, J. Wallner. Geodesic patterns. *ACM Trans. Graphics*, 29/3, 2010.
- [12] H. Pottmann, Y. Liu, J. Wallner, A. Bobenko, W. Wang. Geometry of multi-layer freeform structures for architecture. *ACM Trans. Graphics*, 26/3, #65, 2007.
- [13] H. Pottmann, A. Schiftner, P. Bo, H. Schmiedhofer, W. Wang, N. Baldassini, J. Wallner. Freeform surfaces from single curved panels. *ACM Trans. Graphics*, 27/3, #76, 2008.
- [14] A. Schiftner, M. Höbinger, J. Wallner, H. Pottmann. Packing circles and spheres on surfaces. *ACM Trans. Graphics*, 28/5, #139, 2009.

### Architektur

- [15] J. Glymph, D. Shelden, C. Ceccato, J. Mussel, H. Schober. A parametric strategy for freeform glass structures using quadrilateral planar facets. In *Proc. Acadia*, pages 303–321, 2002.
- [16] L. Spuybroek. *NOX: Machining Architecture*. Thames & Hudson, 2004.

### Danksagung

Dieser Übersichtsartikel berichtet über Ergebnisse, die im Rahmen des vom österreichischen Forschungsförderungsfonds (FWF) geförderten Nationalen Forschungsnetzwerkes *Industrial Geometry*, Teilprojekte S92-06 und S92-09 erzielt wurden. Ein Teil dieser Arbeit wurde unterstützt vom 7. Rahmenprogramm der EU (grant agreement 230520, „ARC“) und von der österr. Forschungsförderungsgesellschaft (grant agreement 813391, „MLFS“). Wir bedanken uns bei den Koautoren der im Literaturverzeichnis angeführten Publikationen für so manche Abbildung und bei Waagner Biro Stahlbau (Wien), Zaha Hadid Architects (London), RFR (Paris) und Evolute GmbH (Wien) für die Möglichkeit des Arbeitens mit echten Daten.

Prof. Dr. Helmut Pottmann, Geometric Modeling and Scientific Visualization Research Center, 4700 King Abdullah University of Science and Technology, Thuwal 23955-6900, Saudi Arabien  
helmut.pottmann@kaust.edu.sa

Prof. Dr. Johannes Wallner, Institut für Geometrie, TU Graz, Kopernikusgasse 24, 8010 Graz, Österreich  
j.wallner@tugraz.at

Nach seinem Doktorat an der TU Wien (Betreuer: Walter Wunderlich) führte seine akademische Laufbahn Helmut Pottmann von der TU Wien über Darmstadt, Kaiserslautern, Purdue und Hamburg im Jahre 1992 als Professor für Geometrie an die TU Wien zurück. Seit 2009 ist er Direktor des Centers of Geometric Modeling and Scientific Visualization bei KAUST, Saudi-Arabien. Seine Interessen sind Geometrie und ihre Anwendung im weiten Sinne und in jüngster Zeit ganz besonders die Verbindung von Geometrie und Freiformarchitektur.



Nach einem Doktoratsstudium an der TU Wien (Betreuer: Helmut Pottmann) arbeitete Johannes Wallner an der TU Wien, der TU Darmstadt, und der TU Graz, wo er seit 2007 Professor für Geometrie ist. Seine Forschungsgebiete sind geometrische Datenverarbeitung, diskrete Differentialgeometrie sowie nichtlineare Approximationstheorie und nichtlineare Unterteilungsalgorithmen.

