**Svenja Hüning, Michael Kerber, Hannah Schreiber** **WS 2016/2017**

# Übung zur Vorlesung "Diskrete Mathematik" (MAT.107)

Blatt Beispiellösungen Abgabefrist: —

**Hinweise:** Dieses Blatt präsentiert Beispiellösungen zu ausgewählten Übungsaufgaben. Wir garantieren nicht für die Korrektheit der Lösungen.

**Aufgabe 10** Betrachten Sie die folgenden drei Eigenschaften für einen Graphen $G = (V, E)$:

(i) $G$ ist zusammenhängend.

(ii) $G$ ist kreisfrei.

(iii) $|E| = |V| - 1$

Nach Definition ist $G$ ein Baum genau dann, wenn er (i) und (ii) erfüllt. Satz 3.5 aus der Vorlesung zeigt also, dass aus (i) und (ii) schon (iii) folgt.

a) Zeigen Sie *ohne* Zuhilfenahme von Satz 3.9 ("Jeder zshg. Graph besitzt einen Spannbaum"), dass aus (i) und (iii) schon (ii) folgt. Das ist Lemma 3.8 aus der Vorlesung.

b) Zeigen Sie, dass aus (ii) und (iii) schon (i) folgt.

**Lösung:**

a) Beweis per Induktion: Sei $H(n)$ die Induktionsaussage "Ist $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit $|V| = n$ und $|E| = n - 1$, dann ist $G$ kreisfrei."

   Induktionsanfang: $n = 1$
   $G$ besteht nur aus einem Knoten und ist damit kreisfrei.

   Induktionsschritt: Nehmen wir an, dass $H(n)$ wahr für ein $n \geq 1$ ist. Wir wollen beweisen, dass $H(n + 1)$ dann auch wahr ist.
   Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit $|V| = n+1$ und $|E| = n$. Die Summe der Grade seiner Knoten ist gleich $2 \cdot |E| = 2 \cdot |V| - 2$. Das heißt, dass mindestens einer seiner Knoten Grad 1 hat, da die Summe sonst mindestens $2 \cdot |V|$ sein müsste. Nehmen wir aus $G$ diesen einen Knoten $v$ mit seiner Kante $e$ herraus, entsteht der Graph $G' = (V', E')$, der zusammenhängend ist und $|V'| = n$ und $|E'| = n - 1$. Nach $H(n)$ kann man also folgern, dass $G'$ kreisfrei ist. Hängt man an $G'$ wieder $v$ und $e$ an, so dass $G$ ensteht, kann sich kein Kreis dabei bilden und somit ist $G$ auch kreisfrei.

   Damit ist $H(n)$ für jedes $n \geq 1$ wahr.

   **Alternative Lösung:** Wir beweisen die Aussage durch Widerspruch. Nehmen wir also an, dass es einen zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ gibt mit $|E| = |V| - 1$, der aber nicht kreisfrei ist. Dann gibt es eine Kante $e$, die Teil eines Kreises in $G$ ist. Nach Lemma 3.7 ist dann der Graph $G' = (V', E')$ mit $V' = V$ und $E' = E \setminus \{e\})$ immer noch zusammenhängend. Andererseits ist aber $|E'| = |E| - 1 = |V| - 2 = |V'| - 2$. Nach Satz 2.3 besitzt $G'$ mindestens $|V'| - |E'| = 2$ Zusammenhangskomponenten, also ist $G'$ nicht zusammenhängend. Das ist ein Widerspruch, also kann $G$ keinen Kreis enthalten.

b) Beweis per Induktion: Sei $H(n)$ die Induktionsaussage "Ist $G = (V, E)$ ein kreisfreier Graph mit $|V| = n$ und $|E| = n - 1$, dann ist $G$ zusammenhängend."

   Induktionsanfang: $n = 1$
   $G$ besteht nur aus einem Knoten und ist damit zusammenhängend.

   Induktionsschritt: Nehmen wir an, dass $H(n)$ wahr für ein $n \geq 1$ ist. Wir wollen beweisen, dass $H(n+1)$ dann auch wahr ist.
   Sei $G = (V, E)$ ein kreisfreier Graph mit $|V| = n + 1$ und $|E| = n$. Die zusammenhängende Komponente von $G$ sind Bäume und so gibt es mindestens einen Knoten mit Grad 1. Nehmen wir aus $G$ diesen einen Knoten $v$ mit seiner Kante $e$ herraus, entsteht der Graph $G' = (V', E')$, der immer noch kreisfrei ist und $|V'| = n$ und $|E'| = n - 1$. Nach $H(n)$ kann man also folgern, dass $G'$ zusammenhängend ist. Und somit ist $G$ nach Konstruktion auch zusammenhängend.

   Damit ist $H(n)$ für jedes $n \geq 1$ wahr.

   **Alternative Lösung:** Sei $G = (V, E)$ ein kreisfreier Graph, so dass $|E| = |V| - 1$. Sei $k$ die Anzahl seiner zusammenhängende Komponente $K_i = (V_i, E_i)$, $1 \leq i \leq k$. Da $G$ kreisfrei ist, sind alle $K_i$ Bäume und so $|E_i| = |V_i| - 1$ für alle $1 \leq i \leq k$. Also haben wir:

$$|E| = \sum_{i=1}^{k} |E_i| = \sum_{i=1}^{k} (|V_i| - 1) = \sum_{i=1}^{k} |V_i| - \sum_{i=1}^{k} 1 = |V| - k$$

   Doch $|E| = |V| - 1$, somit kann $k$ nur gleich 1 sein, das heißt, dass $G$ ist zusammenhängend ist.

**Aufgabe 11** Sei $T = (V, E)$ ein Baum mit $|V| \geq 3$ und $\deg(v) \neq 2$ für jeden Knoten $v \in V$. Beweisen Sie: Es gibt einen Knoten $v$, der adjazent zu (mindestens) zwei Blättern ist.

**Lösung:** Wir beweisen die Aussage durch Widerspruch, nehmen also an, dass es in $T$ keinen solchen Knoten gibt. Sei $w$ irgendein solches Nicht-Blatt. Es gilt dann $\deg(w) \geq 3$ (da $w$ kein Blatt ist und auch nicht Grad 2 haben kann). Da nach Annahme $w$ zu höchstens einem Blatt adjazent ist, muss $w$ zu zwei Nicht-Blaettern adjazent sein.
Da $|V| \geq 3$, hat $T$ mindestens ein Nicht-Blatt $w_0$. Wir konstruieren wir einen Pfad der Länge $n := |V|$ wie folgt: Wir gehen von $w_0$ zu einem adjazenten Nicht-Blatt $w_1$. $w_1$ hat ebenfalls (mindestens) zwei Nicht-Blätter als Nachbarn, nämlich $w_0$ und einen weiteres Nicht-Blatt, das wir $w_2$ nennen. Auch $w_2$ hat zwei Nicht-Blätter als Nachbarn, nämlich $w_1$ und ein weiteres, welches wir $w_3$ nennen. Wenn wir dies $n$-mal wiederholen, erhalten wir einen Weg $(w_0, \ldots, w_n)$ in $T$. Dieser Weg ist auch ein Pfad, denn wenn ein Knoten doppelt vorkäme, würde er einen Kreis enthalten, aber $T$ ist kreisfrei. Dies ist aber ein Widerspruch, denn kein Pfad in $T$ hat Länge $|V|$ (der Pfad enthält $(n + 1)$ Knoten $w_0, \ldots, w_n$, also muss ein Knoten doppelt vorkommen).

**Alternative Lösung:** Sei $B$ die Menge der Blätter von $T$ und $C := V \setminus B$ die Menge der Nicht-Blätter. Wir definieren auch $b := |B|$ und $c := |C|$. Dann ist offensichtlich $|V| = b + c$. In jedem Graphen gilt (Satz 2.1)

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

Da $T$ ein Baum ist, gilt $|E| = |V| - 1 = (b + c) - 1$ (Satz 3.5). Die linke Seite der Gleichung können wir umschreiben als

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in B} \underbrace{\deg(v)}_{=1} + \sum_{v \in C} \underbrace{\deg(v)}_{\geq 3} \geq b + 3c.$$

Für den letzten Schritt haben wir die Voraussetzung ausgenutzt, dass kein Nicht-Blatt Grad $2$ hat. Insgesamt gilt nun also

$$b + 3c \leq \sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| = 2b + 2c - 2,$$

und durch Subtraktion von $b + 2c$ auf beiden Seiten erhalten wir $c \leq b - 2$. Das heisst insbesondere, es gibt weniger Nicht-Blätter als Blätter in $T$. Da $|V| \geq 3$, ist jedes Blatt zu einem Nicht-Blatt adjazent. Da es weniger Nicht-Blätter als Blätter gibt, muss also ein Nicht-Blatt zu (mindestens) zwei Blättern adjazent sein. Damit ist die Aussage bewiesen.

**Aufgabe 12** Zeigen Sie, dass kein Graph existiert, der genau $2$ markierte Spannbäume besitzt. Zeigen Sie umgekehrt, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{2\}$ einen Graphen mit genau $n$ markierten Spannbäumen gibt.
**Lösung:** Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit zwei verschiedenen markierten Spannbäumen $T_1$ und $T_2$. Der Spannbaum $T_2$ besitzt demnach eine Kante $e \in E$, die keine Kante von $T_1$ ist. Betrachten wir nun den Spannbaum $T_1$ und fügen die Kante $e$ ein, so erhalten wir einen Graphen, der einen Kreis $C$ enthält, da $T_1$ per Definition zusammenhängend ist. Da ein Kreis mindestens $3$ Kanten beinhaltet, erhalten wir damit mindestens drei verschiedene markierte Spannbäume von $G$; denn wir können jeweils eine Kante des Kreises $C$ nicht in den Spannbaum aufnehmen. Somit existiert kein Graph mit genau zwei markierten Spannbäumen.

Ein nicht-zusammenhängender Graph besitzt keinen markierten Spannbaum und ein Graph mit einem Knoten hat genau einen Spannbaum (das gleiche gilt für jeden anderen Baum). Sei nun $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 3$. Wir betrachten den Kreis $C_n$ und bezeichnen die Knotenmenge mit $V$, sowie die Kantenmenge mit $E = \{e_1, ..., e_n\}$. Wir betrachten die Graphen $T_i := \left(V, \overline{E_i}\right)$, wobei $\overline{E_i} := \{e_1, ..., e_{i-1}, e_{i+1}, ..., e_n\}$ für $i = 1, ..., n$ ist. Das bedeutet, dass wir aus dem Kreis $C_n$ jeweils genau eine Kante entfernen. Die Graphen $T_i$ sind paarweise verschieden, zusammenhängend und kreisfrei. Daher haben wir $n$ markierte Spannbäume gefunden. Es kann nicht mehr Spannbäume geben, denn jeder Teilgraph von $C_n$ mit Knotenmenge $V$ und weniger als $n - 1$ Kanten ist nicht zusammenhängend. Darüberhinaus ist auch der Graph selbst in diesem Fall kein Spannbaum.

**Aufgabe 16** Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Die *baryzentrische Unterteilung* $G^* = (V^*, E^*)$ von $G$ ist der Graph mit $V^* := V \cup E$ und

$$E^* := \{\{v, e\} \mid v \in V, e \in E, \text{ und } v \text{ ist inzident zu } e\}.$$

a) Zeichnen Sie $K_4^*$ und $(K_4^*)^*$ (also die baryzentrische Unterteilung der baryzentrischen Unterteilung).

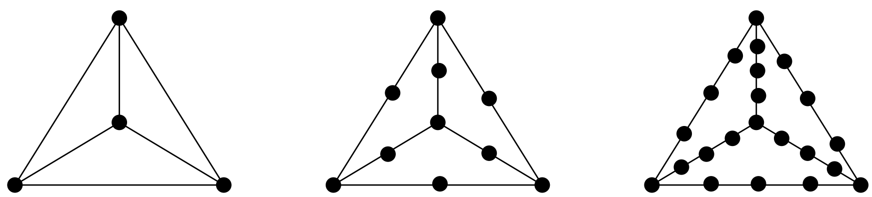
b) Beweisen Sie: $G$ is zusammenhängend genau dann, wenn $G^*$ zusammenhängend ist.

c) Beweisen Sie: $G$ is eulersch genau dann, wenn $G^*$ eulersch ist.

d) Beweisen Sie: Wenn $G^*$ hamiltonsch ist, ist $G$ eulersch. Geben Sie ein Beispiel für einen eulerschen Graphen an, so dass $G^*$ nicht hamiltonsch ist.

**Lösung:**

a) Die folgenden Zeichnungen zeigen $K_4$, $K_4^*$ und $(K_4^*)^*$ von links nach rechts.



b) Wir zeigen erst die Richtung: Wenn $G$ zshg ist, dann ist auch $G^*$ zshg: Sei also $G$ zshg und seien $x, y$ Knoten in $G^*$. Das bedeutet, $x \in V \cup E$, und $y \in V \cup E$. Wir unterscheiden vier Fälle: Wenn $x \in V$ und $y \in V$ ist, dann gibt es einen Pfad $(x = v_0, v_1, \ldots, v_\ell = y)$ in $G$, da $G$ zshg. ist. Es sei $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ für $i = 1, \ldots, \ell$, d.h., $e_1, \ldots, e_\ell$ sind die Kanten auf dem Pfad. Nach Definition von $G^*$ ist dann

$$(v_0, e_0, v_1, e_1, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell)$$

ein Pfad in $G^*$ von $x$ nach $y$.

Der zweite Fall ist, dass $x \in V$ and $y \in E$. Sei $y' \in V$ ein Endknoten von $y$. Wir wissen aus dem ersten Fall, dass ein Pfad $(x = w_0, w_1, \ldots, w_k = y')$ von $x$ nach $y'$ in $G^a st$ existiert. Der Weg $(x = w_0, w_1, \ldots, w_k = y', y)$ ist dann ein Weg von $x$ nach $y$.

Der dritte Fall ist, dass $x \in E$ und $y \in V$. Dieser Fall ist symmetrisch zum zweiten Fall.

Der vierte und letzte Fall ist dass $x, y \in E$. Dann wählen wir einen Endknoten $x'$ von $x$ und einen Endknoten $y'$ von $y$. Es gibt dann einen Pfad von $x'$ nach $y'$, und wir erweitern den Pfad in beide Richtungen zu einem Weg von $x$ nach $y$, wie vorher.

Nun zeigen wir die andere Richtung: Sei also $G^*$ zshg. Seien $x, y \in V$ beliebig. Dann gibt es einen Pfad $(x = w_0, \ldots, w_\ell = y)$ in $G^*$. In einem solchen Pfad wechseln sich Elemente aus $V$ und aus $E$ ab (denn in $G^*$ sind keine zwei Elemente aus $V$ und keine zwei Element aus $E$ adjazent). Daher ist $\ell$ gerade und der Pfad hat die Form $(x = v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k = y)$ mit $e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E$. Also sind $v_{i-1}$ und $v_{i+1}$ in $G$ adjazent und $(x = v_0, \ldots, v_k = y)$ ist ein Pfad in $G$.

c) Sei $v \in V$ und $d = \deg(v)$. Dann ist der Grad von $v$ in $G^*$ ebenfalls $d$, wie man leicht einsieht. Für $e \in E$ ist der Grad in $G^*$ gleich $2$, denn $e = \{v, w\}$ ist genau adjazent zu $v$ und $w$ in $G^*$.

Damit kann man die Aussage leicht zeigen: Ist $G$ eulersch, dann ist der Grad jedes Knotens gerade. Es folgt, dass in $G^*$ jedes $v \in V$ ebenfalls geraden Grad hat, und für die Element in $e$ gilt das sowieso. Also ist $G^*$ eulersch. Die andere Richtung ist noch einfacher: Ist $G^*$ eulersch, dann hat jeder Knoten in $G^*$ geraden Grad. Also hat insbesondere jeder Knoten $v \in V$ geraden Grad in $G^*$, und also auch in $G$. Damit ist $G$ eulersch.

d) Ist $G^*$ hamiltonsch, dann gibt es einen Hamiltonkreis $C = (w_1, \ldots, w_\ell, w_1)$ der jeden Knoten von $G^*$ genau einmal durchquert. Wir können annehmen, dass $w_1 \in V$ ist (sonst betrachten wir den Kreis $(w_2, w_3, \ldots, w_\ell, w_1, w_2)$). Wie oben hat dann der Kreis die Form

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k, e_k, v_1$$

mit $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$. In diesem Kreis kommen alle Elemente aus $E$ vor. Ferner ist

$$v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1$$

ein Kreis in $G$ (sogar ein Hamiltonkreis, aber das ist nicht wichtig hier). Die Kanten dieses Kreises sind $\{e_1, \ldots, e_k\}$, und diese Menge ist genau $E$. Also ist $G$ eulersch.

(Bemerkung: Man kann sogar zeigen: Wenn $G^*$ hamiltonsch ist, dann ist $G$ ein Kreis. Daraus folgt die Aussage dann sofort.)

Ein Gegenbeispiel zum zweiten Teil ist der folgende eulersche Graph. Man sieht sehr leicht ein, dass seine baryzentrische Unterteilung nicht hamiltonsch sein kann.