

Übung zur Vorlesung "Diskrete Mathematik" (MAT.107)

Blatt 1

Abgabefrist: 11.10.2016, 8:00 Uhr

Hinweise: Geben Sie im Online-Ankreuzsystem an, welche Aufgaben Sie an der Tafel präsentieren können. Wenn Sie ausgewählt werden, haben Sie ca. 10 Minuten Zeit für die Präsentation (inklusive Nachfragen).

Aufgabe 1

Wo steckt der Fehler im folgenden Induktionsbeweis?

Satz: Alle Personen in einer Menge X von n Personen haben die gleiche Größe.

Beweis: Die Induktionsvoraussetzung für $n = 1$ ist offensichtlich erfüllt. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass die Aussage für alle Mengen mit bis zu n Personen gilt, und betrachten eine Menge X mit $n + 1$ Personen. Wir zerlegen X in Teilmengen Y and Z so, dass $|Y| \leq n$, $|Z| \leq n$, $Y \cap Z \neq \emptyset$ und $Y \cup Z = X$ gilt. Dann folgt nach Induktionsannahme, dass alle Personen in Y und Z gleich gross sind. Da der Schnitt von Y and Z nicht leer ist, sind also alle Personen in $Y \cup Z = X$ gleich gross.

Aufgabe 2

Beweisen Sie

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Aufgabe 3

Geben Sie Beispiele für Relationen über \mathbb{N} mit folgenden Eigenschaften

- reflexiv, symmetrisch, nicht transitiv
- reflexiv, nicht symmetrisch, transitiv
- nicht reflexiv, symmetrisch, transitiv
- reflexiv, nicht symmetrisch, nicht transitiv
- nicht reflexiv, symmetrisch, nicht transitiv
- nicht reflexiv, nicht symmetrisch, transitiv
- nicht reflexiv, nicht symmetrisch, nicht transitiv

Aufgabe 4 In einem Kloster leben viele Mönche, die außer zum Morgengebet den ganzen Tag auf ihren Zimmern meditieren und Logik studieren. Jeden Morgen sehen sich die Mönche aber beim Gebet. Sie sprechen jedoch nicht miteinander oder tauschen sonst auf irgendeine Art und Weise Informationen untereinander aus. Eines Morgens kommt ein Wanderer ins Kloster und teilt den Mönchen mit, dass mindestens einer von Ihnen mit einer (nicht-ansteckenden) Krankheit infiziert sei und sich die kranken Mönche in ein weit entferntes Kloster begeben müssen, um sich dort heilen zu lassen. Die Krankheit kann ein Mönch zwar an sich selbst nicht erkennen, er sieht aber sofort, ob ein anderer Mönch krank ist oder nicht. Sobald ein Mönch weiss, dass er krank ist, verlässt er das Kloster.

Während der nächsten 61 Tage passiert nichts, aber am 62.Tag verlassen etliche Mönche das Kloster. Wie viele sind es, und wie viele Mönche sind insgesamt erkrankt?