Svenja Hüning, Michael Kerber, Hannah Schreiber **WS 2016/2017**

Übung zur Vorlesung "Diskrete Mathematik" (MAT.107)

Blatt 4 Abgabefrist: —

Hinweise: Wegen des Feiertags ist das Übungsblatt auf freiwilliger Basis.

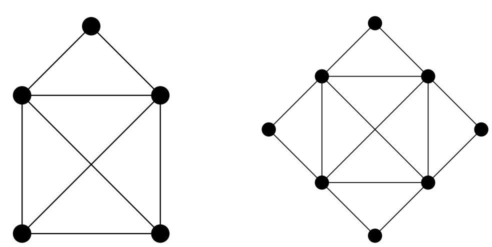
Aufgabe 13 Sei $G = (V, E)$ ein Graph, der die Ore-Bedingung aus Satz 4.2 erfüllt, also

$$\deg(x) + \deg(y) \geq |V| \text{ für alle } x, y \in V \text{ mit } x \neq y \text{ und } \{x, y\} \notin E.$$

Geben Sie ein effizientes Verfahren an, um einen Hamiltonkreis für G zu konstruieren. (Hinweis: Gehen Sie wie folgt vor: Starten Sie mit dem vollständigen Graphen mit Knotenmenge V und einem beliebigen Hamiltonkreis C. Löschen Sie die "Nicht-Kanten" von G nun eine nach der anderen, bis Sie G erhalten, und sorgen Sie dafür, dass C in diesem Prozess ein Hamiltonkreis des aktuellen Graphs bleibt.)

Aufgabe 14 Beweisen oder widerlegen Sie: In jedem eulerschen Graphen mit mindestens 3 Knoten gibt es eine Menge von Kreisen $C_1, \ldots, C_k$, so dass jede Kante des Graphen in genau einem Kreis C_i liegt.

Aufgabe 15 Eine *offene Eulertour* in einem Graphen G ist ein Weg $(v_0, \ldots, v_k)$ in G, so dass $v_0 \neq v_k$ und jede Kante von G genau einmal benutzt wird. Stellen Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung auf, dass ein Graph eine offene Eulertour enthält (Bonus: Überlegen Sie sich eine Beweisstrategie). Überprüfen Sie Ihr Ergebnis an den beiden folgenden Graphen.



Aufgabe 16 Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Die *baryzentrische Unterteilung* $G^* = (V^*, E^*)$ von G ist der Graph mit $V^* := V \cup E$ und

$$E^* := \{\{v, e\} \mid v \in V, e \in E, \text{ und } v \text{ ist inzident zu } e\}.$$

a) Zeichnen Sie K_4^* und $(K_4^*)^*$ (also die baryzentrische Unterteilung der baryzentrischen Unterteilung).

b) Beweisen Sie: G is zusammenhängend genau dann, wenn G^* zusammenhängend ist.

c) Beweisen Sie: G is eulersch genau dann, wenn G^* eulersch ist.

d) Beweisen Sie: Wenn G^* hamiltonsch ist, ist G eulersch. Geben Sie ein Beispiel für einen eulerschen Graphen an, so dass G^* nicht hamiltonsch ist.