

Übung zur Vorlesung "Diskrete Mathematik" (MAT.107)

Blatt 5

Abgabefrist: 08.11.2016, 8:00 Uhr

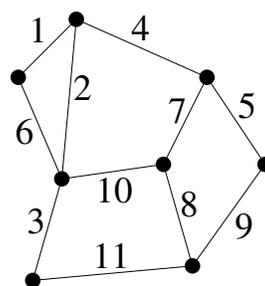
Hinweise: Geben Sie im Online-Ankreuzsystem an, welche Aufgaben Sie an der Tafel präsentieren können. Wenn Sie ausgewählt werden, haben Sie ca. 10 Minuten Zeit für die Präsentation (inklusive Nachfragen).

Aufgabe 17 Beweisen Sie: Ist ein Graph bipartit, dann enthält er keinen Kreis mit ungerader Länge. Zusatzfrage: Beweisen Sie auch die Umkehrung. (Sie können die Aufgabe als gelöst ankreuzen, wenn Sie nur den ersten Teil beweisen)

Aufgabe 18 Sei $G = (V, E)$ ein Graph, der ein perfektes Matching enthält, also ein Matching mit genau $|V|/2$ Kanten. Betrachten Sie nun das folgende Verfahren zur Bestimmung eines Matchings M :

Setze initial $M \leftarrow \emptyset$. Durchlaufe die Kanten in E in einer beliebigen Reihenfolge e_1, \dots, e_m . Wenn $M \cup \{e_i\}$ ein Matching ist, füge e_i zu M hinzu (sonst nicht).

- a) Wenden Sie das Verfahren auf den gegebenen Graphen an (mit gegebener Kantenreihenfolge). Ist das Ergebnis ein perfektes Matching? Wenn ja, geben Sie eine Reihenfolge an, für welche das Verfahren kein perfektes Matching liefert. Wenn nein, geben Sie eine Reihenfolge an, für welche das Verfahren ein perfektes Matching liefert.



- b) Sei M^* ein perfektes Matching in G und M' ein anderes Matching mit weniger als $|V|/4$ Kanten. Zeigen Sie: Es gibt eine Kante $\{u, v\}$ in M^* , so dass u und v von M' nicht überdeckt werden.
- c) Beweisen Sie mit Hilfe von Teil b: Für jede Reihenfolge der Kanten liefert das Verfahren immer ein Matching mit mindestens $|V|/4$ Kanten, d.h., mindestens die Hälfte der Knoten wird überdeckt.
- d) Beschreiben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Beispiel mit $4n$ Knoten, für welches genau die Hälfte der Knoten überdeckt wird.

Aufgabe 19 Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph mit k Zusammenhangskomponenten. Beweisen Sie: G ist ein Teilgraph eines zusammenhängenden planaren Graphen $G' = (V, E')$, der genau $k - 1$ zusätzliche Kanten hat. Benutzen Sie diese Aussage, um Satz 5.5 aus der Vorlesung ("Jeder planare Graph erfüllt $|E| \leq 3|V| - 6$ ") auf nicht-zusammenhängende Graphen zu erweitern.

Aufgabe 20 Ein Graph ist *dreiecksfrei*, wenn er keinen Kreis der Länge 3 enthält. Beweisen Sie, dass für jeden dreiecksfreien planaren Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 3$ gilt, dass $|E| \leq 2|V| - 4$. Folgern Sie daraus, dass $K_{3,3}$ nicht planar ist.