

Svenja Hüning, Michael Kerber, Hannah Schreiber

WS 2016/2017

Übung zur Vorlesung "Diskrete Mathematik" (MAT.107)

Blatt 6

Abgabefrist: 22.11.2016, 8:00 Uhr

Hinweise: Geben Sie im Online-Ankreuzsystem an, welche Aufgaben Sie an der Tafel präsentieren können. Wenn Sie ausgewählt werden, haben Sie ca. 10 Minuten Zeit für die Präsentation (inklusive Nachfragen).

Aufgabe 21 Beweisen Sie:

- a) Seien $a_1, \dots, a_k$ mit $k \geq 2$ beliebige ganze Zahlen. Wenn eine Primzahl p das Produkt $a_1 a_2 \cdots a_k$ teilt, so teilt p auch a_i für ein $i \in \{1, \dots, k\}$.
- b) Falls $a_1, \dots, a_k$ in Teil (a) alle Primzahlen sind, so ist $p = a_i$ für ein a_i . Das ist genau Lemma 7.7 aus der Vorlesung.

Aufgabe 22 Ein Paar $(p, p + 2)$ von Primzahlen heisst *Primzahlzwillings*.

- a) Bestimmen Sie die ersten 10 Primzahlzwillinge.
- b) Zeigen Sie: Ist $(p, p + 2)$ ein Primzahlzwillings, und $p \neq 3$, dann ist $p + 1$ durch 6 teilbar.
- c) Bestimmen Sie alle Tripel $(p, p + 2, p + 4)$ von Primzahlen (mit Begründung, dass es keine weiteren gibt).

Aufgabe 23

- a) Bestimmen Sie alle positiven Teiler von 2520. Geben Sie für alle Teiler ≥ 2 ihre Primfaktorzerlegung an.
- b) Sei

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$$

die Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl n . Wie viele positive Teiler hat n (mit Begründung)?

Aufgabe 24 Sei $H := \{3n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Wir nennen $p \in \mathbb{N}$ eine H -Primzahl, wenn $p \in H$ und kein echter Teiler von p in H liegt. Zeigen Sie:

- a) Das Produkt zweier Elemente aus H liegt auch in H , aber die Summe zweier Elemente aus H liegt nicht in H .
- b) Jede Zahl $n \in H$ lässt sich schreiben als

$$n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$$

mit $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ H -Primzahlen und $e_1, \dots, e_k \in \mathbb{N}$.

- c) Die Zerlegung aus Teil (b) ist nicht für alle Zahlen in H eindeutig.