

Übung zur Vorlesung “Diskrete Mathematik” (MAT.107)

Blatt 10

Abgabefrist: 17.01.2017, 8:00 Uhr

Hinweise: Geben Sie im Online-Ankreuzsystem an, welche Aufgaben Sie an der Tafel präsentieren können. Wenn Sie ausgewählt werden, haben Sie ca. 10 Minuten Zeit für die Präsentation (inklusive Nachfragen).

Aufgabe 37 Wie viele Wörter der Länge 10 und wie viele der Länge 11 kann man aus den Buchstaben des Wortes *ABRAKADABRA* bilden?

Aufgabe 38 Zeigen Sie durch ein kombinatorisches Argument: $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$

Aufgabe 39 Wie viele natürliche Zahlen $\leq 10^6$ sind weder von der Form x^2 noch x^3 noch x^5 für ein $x \in \mathbb{N}$?

Aufgabe 40 Sei $k \in \mathbb{N}$ und $n := 2^{2k-2}$. Sei $G = (V, E)$ ein vollständiger Graph mit n Knoten, für den jede Kante entweder blau oder rot gefärbt ist. Wir definieren Knotenmengen $V_0 \supset V_1 \supset \dots \supset V_{2k-2}$ und Knoten $v_i \in V_i$ wie folgt:

Setze $V_0 := V$ und $v_0 \in V_0$ beliebig. Angenommen, $V_0, \dots, V_i$ und $v_0, \dots, v_i$ seien bereits definiert (für $i \geq 0$). Seien

$$R_i := \{w \in V_i \setminus \{v_i\} \mid \{v_i, w\} \text{ ist rote Kante}\}$$

$$B_i := \{w \in V_i \setminus \{v_i\} \mid \{v_i, w\} \text{ ist blaue Kante}\}$$

Ist $|R_i| \geq |B_i|$, dann definieren wir $V_{i+1} := R_i$ und nennen v_i einen “roten Knoten”. Sonst definieren wir $V_{i+1} := B_i$ und nennen v_i einen “blauen Knoten”. Dann wählen wir $v_{i+1} \in V_{i+1}$ beliebig.

- Argumentieren Sie, dass die Mengen $V_0, \dots, V_{2k-2}$ nicht leer sind, also insbesondere die Elemente $v_0, \dots, v_{2k-2}$ wohldefiniert sind.
- Zeigen Sie, dass zwei beliebige rote (blaue) Knoten in $v_0, \dots, v_{2k-2}$ durch eine rote (blaue) Kante verbunden sind.
- Zeigen Sie, dass es k verschiedene Knoten in $v_0, \dots, v_{2k-2}$ gibt, so dass alle Kanten zwischen diesen k Knoten die gleiche Farbe haben.
- Folgern Sie den Satz von Ramsey mit Hilfe von Teil (c).