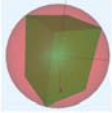


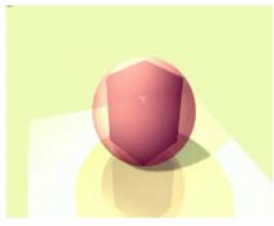
Extremwertanimation

Aufgabenstellung: aus Mathematikbuch:
Reichel, Bd.7, 465a

Einer Kugel (Radius r) ist das volumsgrößte gerade Prisma einzuschreiben, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Viereck ist. Berechne das Verhältnis der Rauminhalte der beiden Körper.

Raumbildung.	Extremwerte	Ziele:
	Aufgabenstellung <u>Erstelle:</u> 1. 2D-Grafik 2. 3D-Objekt 3. Visualisierung 4. 3D-Animation 5. Volumesrelationen	
BG/BRG LEIBNITZ		.geometrie

- Variables Konstruieren,
- Erkennen von geometrischen und mathematischen Zusammenhängen,
- Gestaltung einer Animation, in der mathematische Notwendigkeiten (Nebenbedingung) sichtbar werden,
- Gestaltung einer Animation, in der die Veränderlichkeit einer Größe (Hauptbedingung) sichtbar wird.

Mathematik + Geometrie	Extremwerte
Raumbildung. 	
BG/BRG LEIBNITZ	.geometrie

Variablendefinition:

Für die Kugel wählen wir den Radius r .

Das regelmäßige quadratische Prisma besitze die Basislänge a und die Höhe h . Ein mathematisches Ziel solcher Extremwertaufgaben ist das Erkennen der Abhängigkeiten der beiden Variablen a und h .

Dienlich ist eine Querschnittsskizze, die einen Kugelgroßkreis, ein Prismenquerschnittsrechteck und ein pythagoreisches Dreieck zeigt.

Die größte Schwierigkeit besteht in der Einsicht, dass im Aufriss ein Prismen(diagonal!!)querschnitt zu sehen ist. Damit hat die waagrechte Rechtecksseite nicht die Länge a , sondern $a \cdot \sqrt{2}$ (=Diagonallänge des Basisquadrates).

Die Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes ergibt,

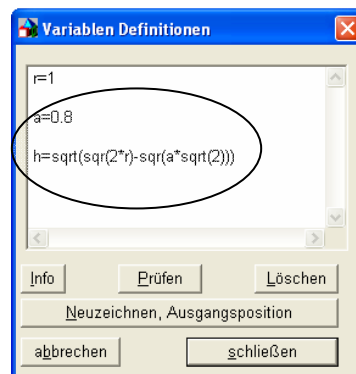
$$(2.r)^2 = (a \cdot \sqrt{2})^2 + h^2$$

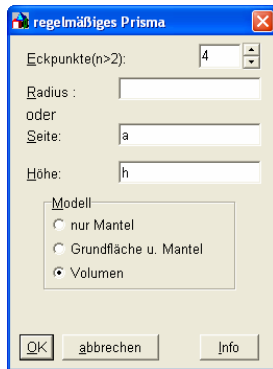
und liefert den Zusammenhang von a , h und r .

Somit

$$h = \sqrt{(2.r)^2 - (a \cdot \sqrt{2})^2}$$

In GAM kann nun die Prismenhöhe h als Variable festgelegt werden: Beachte dabei die Syntax.

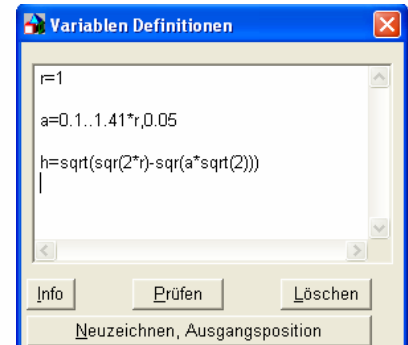
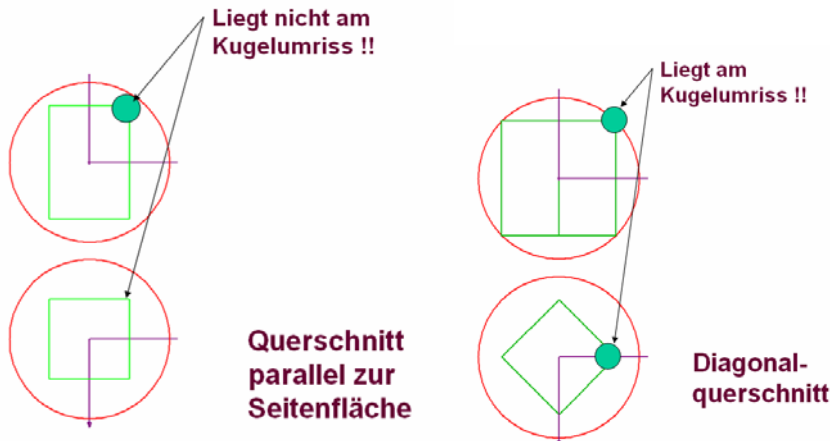




Wir konstruieren nun die Kugel und das regelmäßige quadratisches Prisma. Damit das Prisma der Kugel eingeschrieben ist, muss es noch um die Länge $-h/2$ in Richtung z verschoben werden.

Um die Einsicht obiger Vorgangsweise zu verstärken, ist eine Animation, in der das konstruierte Prisma um die z-Achse rotiert, sehr hilfreich.

Zur Lösung der Extremwertaufgabe, muss in der Nebenbedingung obiger mathematischer Zusammenhang Berücksichtigung finden, der die Konstruktion mittels GAM erst ermöglicht. Durch Zuziehung des CAD-Programms kann die Richtigkeit (vielleicht aber auch die Unrichtigkeit) eines Ansatzes unmittelbar beobachtet und erkannt werden.



Setzt man die aus der Nebenbedingung gewonnene zweite Variable in die Hauptbedingung (Prismenvolumen) ein, entsteht eine Zuordnung, die das Volumen in Abhängigkeit von der Basislänge a ermittelt. Wir erhalten eine Funktion, die zwei Randextrema, in denen das Volumen Null ist, und das gesuchte Maximum besitzt.

Dieser dynamische Aspekt lässt sich nun mit GAM animieren. Ziel ist das Anwachsen des Prismas von der ersten Extremposition (unendlich dünner „Besenstiel“ von Pol zu Pol) bis zur gesuchten Maximallösung und danach das Absinken zur 2. Extremposition (hauchdünne Scheibe am Kugel-äquator) sichtbar zu machen.

Hiezu wählen wir a als Laufvariable.



Die Variation läuft von $a = 0$ (= unendlich dünnes Prisma = „Besenstiel“) bis $a = r \cdot \sqrt{2}$ (= unendlich dünnes Prisma = „Verkehrstafel“) und ergibt jeweils ein Prisma, dessen Volumen vom (minimalen) Extremwert 0



$$v = a^2 \cdot h$$

Nebenbedingung = pythagoreischer Lehrsatz

$$(2 \cdot r)^2 = (a \cdot \sqrt{2})^2 + h^2$$

$$a^2 = \frac{4 \cdot r^2 - h^2}{2}$$

Volumensfunktion:

$$v = \frac{4 \cdot r^2 - h^2}{2} \cdot h$$

1. Ableitung

$$dV/dh = \frac{4 \cdot r^2 - 3 \cdot h^2}{2} = 0$$

$$h = -\frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot r}{3} \vee h = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot r}{3}$$

$$\frac{8 \cdot \sqrt{3} \cdot r^3}{9}$$

$$V(\text{maximal}) = 8 \cdot \sqrt{3} \cdot r^3 / 9$$

anwächst, an einem bestimmten Punkt sein maximales Volumen erreicht und sodann auf den (minimalen) Extremwert 0 wieder herabsinkt.

Da GAM kein Prisma mit der Basisseitenlänge 0 bzw. $a = r \cdot \sqrt{2}$ \Rightarrow Höhe $h=0$ konstruieren kann, ist zu beachten, dass die exakten Randwerte vermieden werden. Der Intervallbereich für a wird daher mit $[0.1, 1.41 \cdot r]$ gewählt.

Das gesuchte Verhältnis ist:

$$V_{\text{Kugel}} : V_{\text{Prisma}} = \sqrt{3} \cdot \pi : 2$$

