Der Spezialfall n = 3

Die Beziehung von Geometrie und Mathematik

Hans-Peter Schröcker

Arbeitsbereich für Geometrie und CAD
Universität Innsbruck

Tag der Geometrie
Graz, 22. April 2009

[…] Mathematiker, die weit genug hinter den Forderungen der Zeit zurückgeblieben sind, um noch nicht alle Geometrie als überflüssig erkannt zu haben.

—Eduard Study (1910)

[…] Mathematiker, die weit genug hinter den Forderungen der Zeit zurückgeblieben sind, um noch nicht alle Geometrie als überflüssig erkannt zu haben.

Die zwei bis drei Leser, die von einem unerfreulichen Buche, genannt die »Geometrie der Dynamen« (Leipzig 1903) etwas mehr als den Titel kennen, […]

—Eduard Study (1910)

2002 Beweis der Poincaré Vermutung durch Grigori Perelman

Die Beziehung von Mathematik und Geometrie

2002	Beweis der Poincaré Vermutung durch Grigori Perelman
Juni 2008	Standards der Lehrerbildung im Fach Mathematik (Empfehlungen der DMV, GDM und MNU)

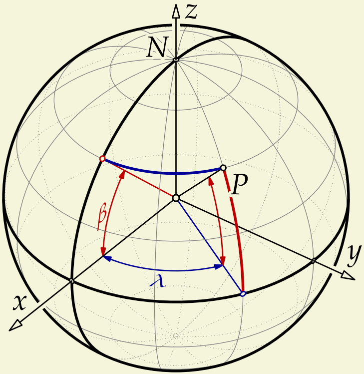
Die Beziehung von Mathematik und Geometrie

2002	Beweis der Poincaré Vermutung durch Grigori Perelman
Juni 2008	Standards der Lehrerbildung im Fach Mathematik (Empfehlungen der DMV, GDM und MNU)
September 2008	Eröffnung des Regionalen Fachdidaktikzentrums Mathematik und Geometrie in Graz

Der Ort gleicher geografischer Koordinaten

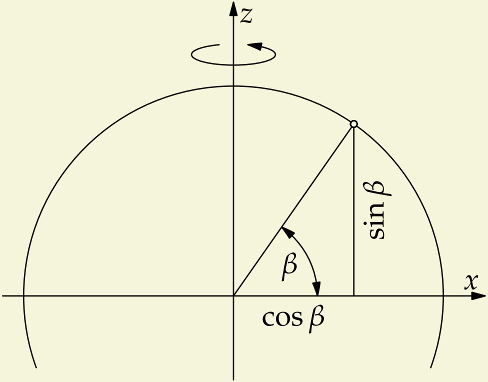
Beschreiben Sie den Ort gleicher geografischer Koordinaten auf der Kugeloberfläche.

R. Bereis
Darstellende Geometrie I
Akademie-Verlag Berlin, 1964.



Parametrisierung nach geografischen Koordinaten

$$\varkappa(\lambda, \beta) = \begin{pmatrix} \cos\lambda & -\sin\lambda & 0 \\ \sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta \\ 0 \\ \sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\lambda \\ \cos\beta\sin\lambda \\ \sin\beta \end{pmatrix}$$



Parametrisierung nach geografischen Koordinaten

$$\varkappa(\lambda, \beta) = \begin{pmatrix} \cos\lambda & -\sin\lambda & 0 \\ \sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta \\ 0 \\ \sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\lambda \\ \cos\beta\sin\lambda \\ \sin\beta \end{pmatrix}$$

Gleichsetzen von geografischer Länge und Breite

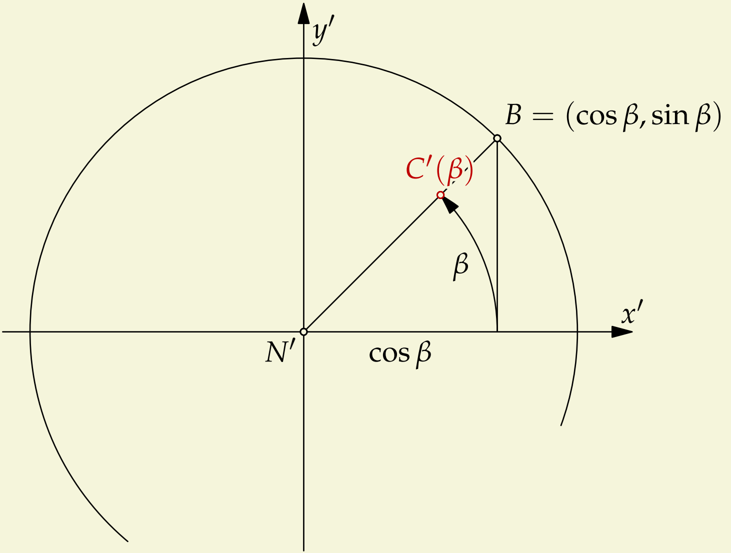
$$\lambda = \beta \implies C(\beta) = \begin{pmatrix} \cos^2\beta \\ \cos\beta\sin\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$$

Suchen einer speziellen Ansicht

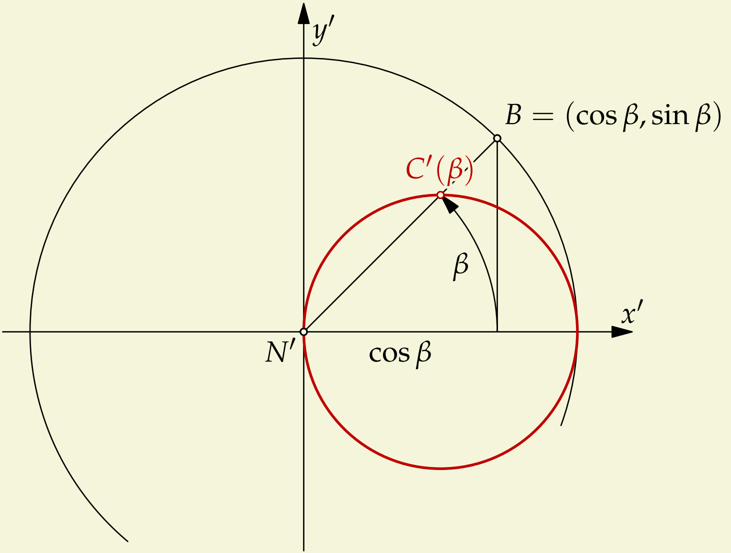
- Die Breitenkreise haben erste Hauptlage.
- Die Meridiankreise haben erstprojizierende Lage.

Vermutung: Der Grundriss ist eine spezielle Ansicht.

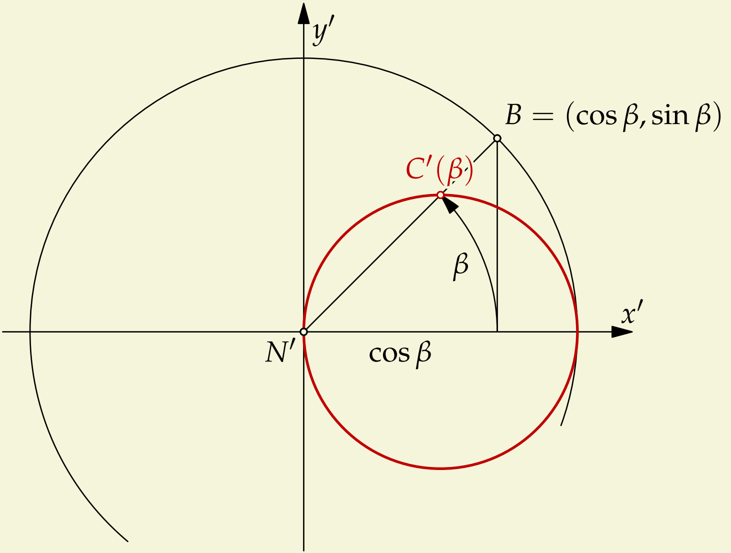
$$C'(\beta) = \begin{pmatrix} \cos^2\beta \\ \cos\beta \sin\beta \end{pmatrix} = \cos\beta \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$$



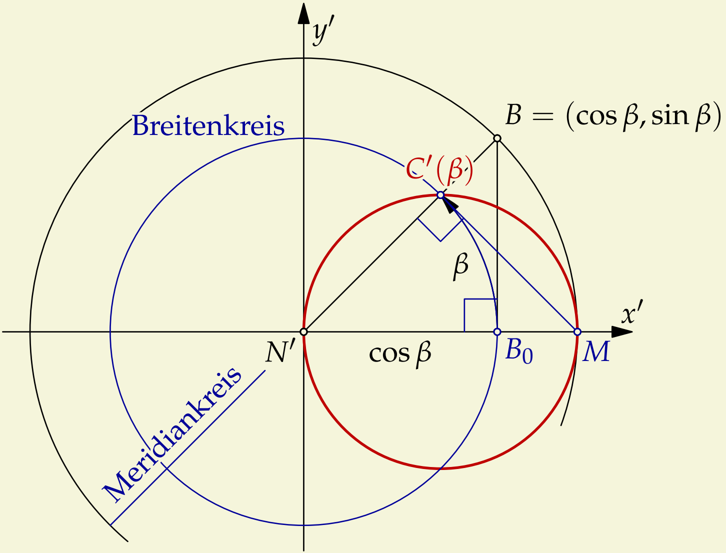
$$C'(\beta) = \cos\beta \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$$



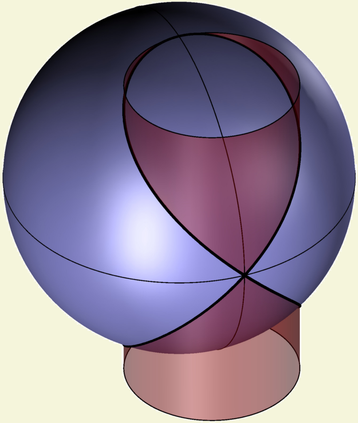
$$C'(\beta) = \cos\beta \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$$



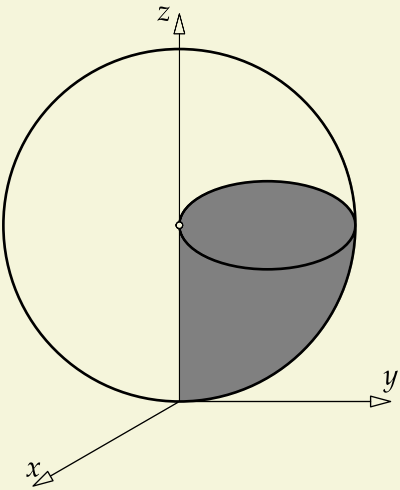
$$\left\| C'(\beta) - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \cos\beta \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \cdots = \frac{1}{2}$$



$$\left\| C'(\beta) - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \cos\beta \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \cdots = \frac{1}{2}$$

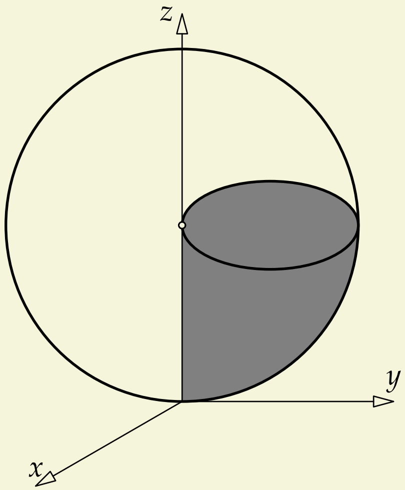


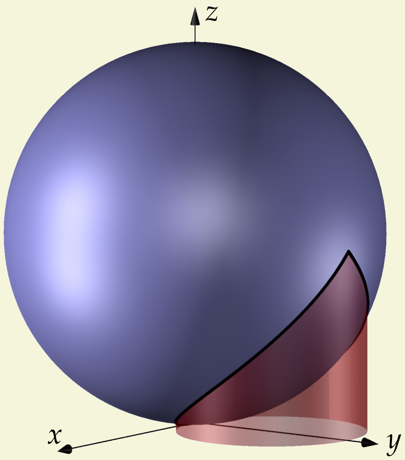
Geometrie als Kommunikationsmittel



Nach einem Lehrbuch über mehrdimensionale Analysis und Geometrie …

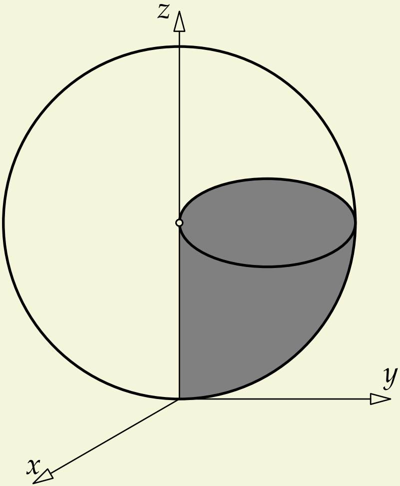
Geometrie als Kommunikationsmittel

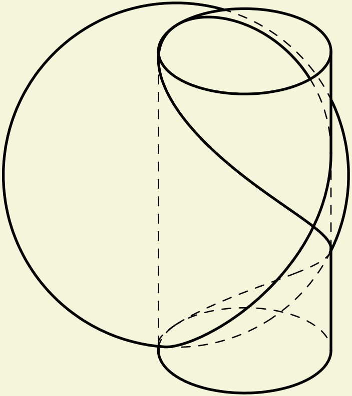




Nach einem Lehrbuch über mehrdimensionale Analysis und Geometrie …

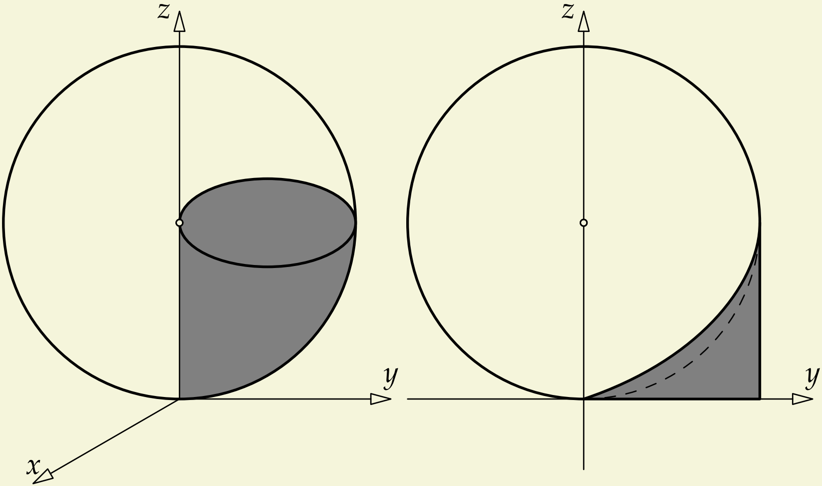
Geometrie als Kommunikationsmittel





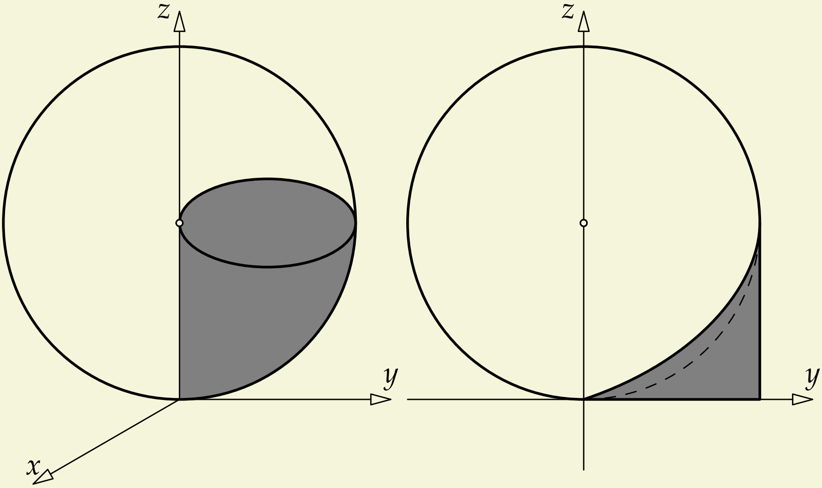
Nach einem Lehrbuch über mehrdimensionale Analysis und Geometrie …

Geometrie als Kommunikationsmittel



Nach einem Lehrbuch über mehrdimensionale Analysis und Geometrie …

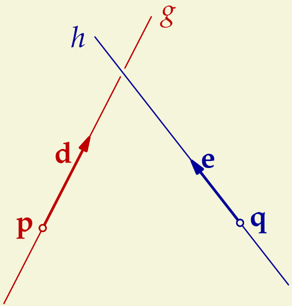
Geometrie als Kommunikationsmittel



“soLlange Man verstest was gemeihnt ißt. . . „

Geometrie zur Vereinfachung

$$g\colon \mathbf{p} + \lambda\mathbf{d}; \quad \lambda \in \mathbb{R},\ \|\mathbf{d}\| = 1$$
$$h\colon \mathbf{q} + \mu\mathbf{e}; \quad \mu \in \mathbb{R},\ \|\mathbf{e}\| = 1$$

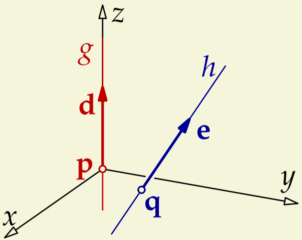


Gleichung der Abstandsfläche zu g und h

$$
\begin{gathered}
-4p_yd_z^2y+2e_xq_ye_yq_x+4q_ye_z^2y+4e_x^2q_zz+6e_xe_yxy-4e_xe_yq_xy\\
-4e_xe_yq_yx-4e_x^2y^2+d_y^2y^2+d_z^2z^2+d_z^2p_x^2+4x^2d_y^2+4x^2d_z^2+p_y^2d_z^2\\
+d_y^2p_x^2+4y^2d_z^2+p_z^2d_y^2+4z^2d_y^2+d_x^2x^2+d_x^2p_y^2+4d_x^2y^2+d_x^2p_z^2+4d_x^2z^2\\
+6e_ye_zyz+2e_yq_ye_zq_z-4e_ye_zq_zy-4e_yq_ye_zz-4e_xe_zq_xz+2e_xq_ze_zq_x\\
-4e_xe_zq_zx+6e_xe_zxz+4d_xd_zp_xz+4d_xd_zp_zx-6d_xd_yxy+4d_xd_yp_yx\\
-2d_xp_zd_zp_x-2d_xp_yd_yp_x-6d_xd_zxz+4d_xd_yp_xy+4d_yp_yd_zz\\
-2d_yp_yd_zp_z+4q_xe_z^2x+4q_xe_y^2x+4e_x^2q_yy+4q_ze_y^2z-4d_x^2p_yy-4d_x^2p_zz\\
-4p_xd_y^2x-4p_xd_z^2x-4p_zd_y^2z+4d_yd_zp_zy-6d_yd_zyz-q_y^2e_z^2-e_z^2q_x^2\\
-4y^2e_z^2-4x^2e_z^2-e_z^2z^2-e_y^2q_x^2-q_z^2e_y^2-4z^2e_y^2-4x^2e_y^2-e_y^2y^2-e_x^2q_y^2\\
-e_x^2q_z^2-4e_x^2z^2-e_x^2x^2=0
\end{gathered}
$$

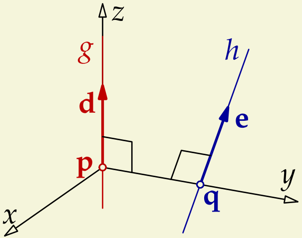
Gleichung der Abstandsfläche zu g und h

$$4q_ze_y^2z+4e_x^2q_zz+4e_x^2q_yy-e_z^2z^2-4x^2e_z^2-q_y^2e_z^2-e_z^2q_x^2-e_x^2q_y^2-e_x^2q_z^2$$
$$-4e_x^2y^2-4e_x^2z^2-e_x^2x^2-e_y^2q_x^2-q_z^2e_y^2-4z^2e_y^2+4y^2-4e_xe_zq_zx$$
$$+6e_xe_zxz+6e_ye_zyz-4e_yq_ye_zz-4e_ye_zq_zy+4q_xe_z^2x-4y^2e_z^2+2e_yq_ye_zq_z$$
$$+6e_xe_yxy-4e_xe_yq_yx+2e_xq_ye_yq_x-4e_xe_yq_xy-4x^2e_y^2-e_y^2y^2+4q_ye_z^2y$$
$$+4q_xe_y^2x+4x^2-4e_xe_zq_xz+2e_xq_ze_zq_x+z^2=0$$



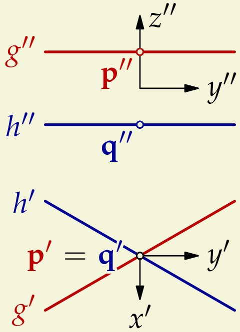
Gleichung der Abstandsfläche zu g und h

$$4q_ye_z^2y - q_y^2e_z^2 + 6e_xe_zxz - 4e_x^2y^2 - e_x^2x^2 - e_x^2q_y^2 - 4e_x^2z^2 - 4x^2e_z^2 - 4y^2e_z^2$$
$$-e_z^2z^2 + 4e_x^2q_yy + z^2 + 4x^2 + 4y^2 = 0$$

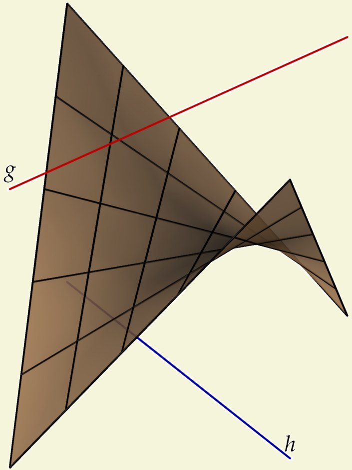


Gleichung der Abstandsfläche zu g und h

$$3d_xd_yxy + 2p_zz = 0$$



A. Gfrerrer: Nichtlineare Abbildungsmethoden, Vorlesung an der TU Graz, circa 1996.


g
h

Geometrie zur Veranschaulichung

Quadratische Optimierung

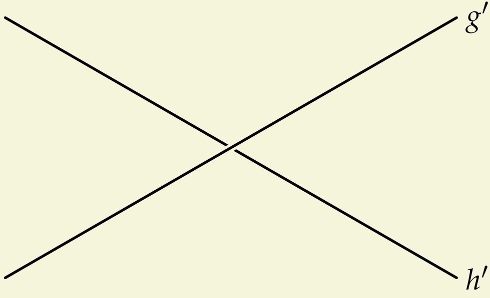
$$F(\lambda, \mu) = a\lambda^2 + b\lambda\mu + c\mu^2 + d\lambda + e\mu + f \rightarrow \min$$

Geometrie zur Veranschaulichung

Quadratische Optimierung

$$F(\lambda, \mu) = a\lambda^2 + b\lambda\mu + c\mu^2 + d\lambda + e\mu + f \to \min$$

Abstand zweier windschiefer Geraden

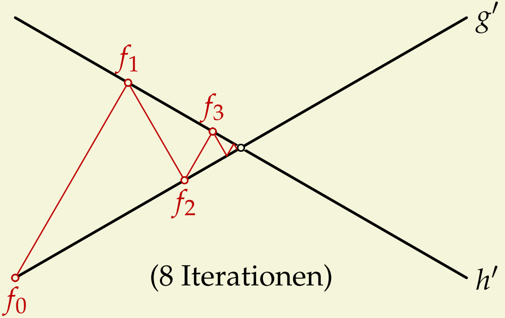


Geometrie zur Veranschaulichung

Quadratische Optimierung

$$F(\lambda, \mu) = a\lambda^2 + b\lambda\mu + c\mu^2 + d\lambda + e\mu + f \to \min$$

Abstand zweier windschiefer Geraden



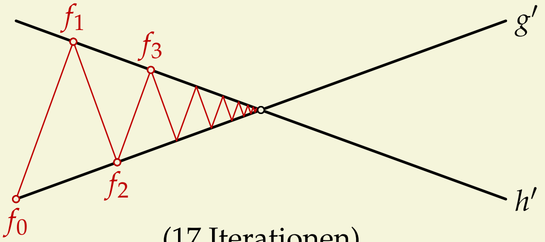
(8 Iterationen)

Geometrie zur Veranschaulichung

Quadratische Optimierung

$$F(\lambda, \mu) = a\lambda^2 + b\lambda\mu + c\mu^2 + d\lambda + e\mu + f \to \min$$

Abstand zweier windschiefer Geraden



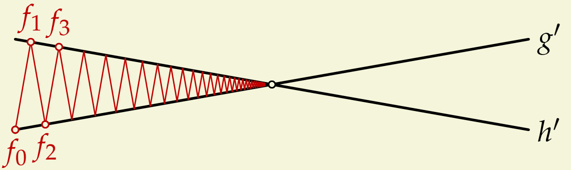
(17 Iterationen)

Geometrie zur Veranschaulichung

Quadratische Optimierung

$$F(\lambda, \mu) = a\lambda^2 + b\lambda\mu + c\mu^2 + d\lambda + e\mu + f \to \min$$

Abstand zweier windschiefer Geraden



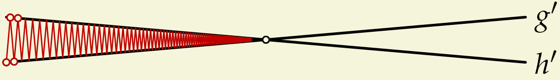
(58 Iterationen)

Geometrie zur Veranschaulichung

Quadratische Optimierung

$$F(\lambda, \mu) = a\lambda^2 + b\lambda\mu + c\mu^2 + d\lambda + e\mu + f \to \min$$

Abstand zweier windschiefer Geraden



(188 Iterationen)

Geometrie – Strukturieren von Raum und Form

> *Figuren und Abbildungen bilden [...] eine wesentliche Stufe einer ersten systematischen Verständigung über mathematische Inhalte allgemein, bevor diese formal durchdrungen und fixiert werden.*

—Standards der Lehrerbildung im Fach Mathematik
Empfehlungen von DMV, GDM und MNU (2008)