

1 Bewegung des begleitenden Zweibeins einer ebenen Kurve

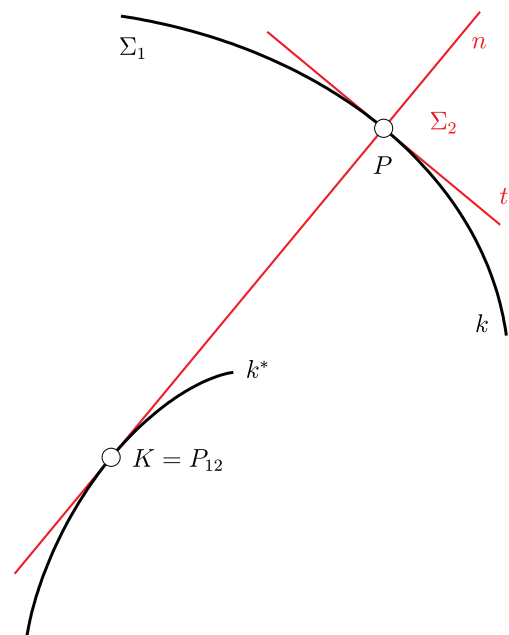
Wir betrachten eine in einer Ebene Σ_1 liegende Kurve k (Figur 1). t bzw. n bezeichne die Tangente an k bzw. Normale von k in einem Kurvenpunkt P . Lässt man P auf der Kurve k laufen, dann hüllt t die Kurve k ein, während die Geradenschar n als Hüllkurve die **Evolute** k^* von k besitzt. k^* ist gleichzeitig die Ortskurve der Krümmungsmitten von k : Der jeweilige Hüllpunkt K ist die Krümmungsmitte von k für die jeweilige Position des Punktes P .

Das Geradenpaar (t, n) heißt **begleitendes Zweibein** von k . Die Bewegung des begleitenden Zweibeins längs k ist ein einparametriger Bewegungsvorgang Σ_2/Σ_1 . Das Gangsystem Σ_2 wird dabei durch das begleitende Zweibein (t, n) repräsentiert.

Da bei der Bewegung Σ_2/Σ_1 k die Bahnkurve von P ist, liegt der Momentanpol P_{12} auf n . Andererseits liegt P_{12} auf der Hüllbahnnormalen von n – d.i. die Normale zu n durch die Krümmungsmitte K . Daher ist $P_{12} = K$ und wir haben den

Satz 1. Bei der Bewegung des begleitenden Zweibeins einer ebenen Kurve k fällt der Momentanpol in die jeweilige Krümmungsmitte von k .

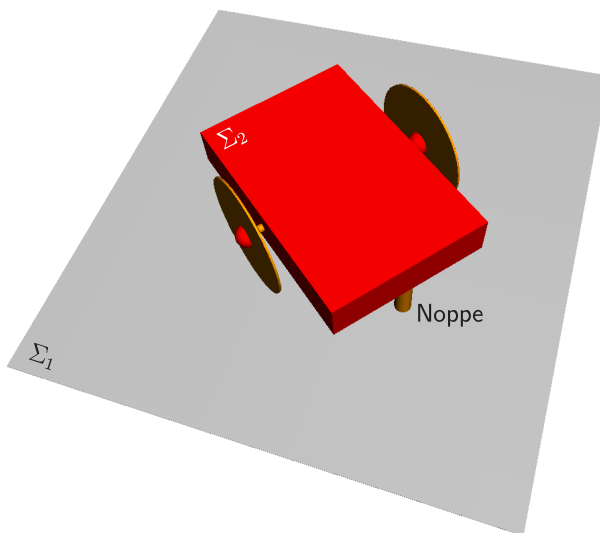
Figur 1. Begleitendes Zweibein und Evolute k^* einer ebenen Kurve k .



Anmerkung: Die Punkte der Normalen n durchlaufen bei der Bewegung des begleitenden Zweibeins Parallelkurven zu k .

2 Eine Anwendung: Bewegung eines einachsigen mobilen Roboters längs einer vorgegebenen Kurve

Figur 2. Einachsiger mobiler Roboter.



Ein einachsiger mobiler Roboter fährt auf einer ebenen und horizontalen Platte (= Rastsystem Σ_1). Die beiden Räder besitzen dieselbe Achse aber mechanisch zwei verschiedenen Wellen (Figur 2). Um die Transportplattform (= Gangsystem Σ_2) des Roboters horizontal zu halten, ist vorne und hinten je eine Noppe angebracht. Die Reibungseinflüsse der Noppen sollen bei unserer Betrachtung vernachlässigt werden. Die Winkelgeschwindigkeiten ω_M und ω_N der beiden Räder können unabhängig voneinander geregelt werden, wodurch der Roboter lenkbar wird.

Aufgabenstellung: Der unter dem Fahrzeugmittelpunkt liegende Punkt P von Σ_2 soll sich längs einer durch ihre Parameterdarstellung

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

gegebene Bahnkurve $k \subset \Sigma_1$ bewegen und zwar so, dass die unter der Längsachse liegende Gerade g stets Tangente von k ist. Wie sind die Winkelgeschwindigkeiten ω_M und ω_N in Abhängigkeit vom Parameter t (= "Zeit") zu berechnen?

Lösung:

- Zunächst ist klar, dass es sich beim Zwangslauf Σ_2/Σ_1 um die Bewegung des begleitenden Zweibeins (g, n) längs der Kurve k handelt. Dabei bezeichnet n die Kurvennormale von k . Diese fällt mit der unter der Radachse liegenden Geraden zusammen (Figur 3). n hüllt daher die Evolute k^* von k ein und der Hüllpunkt von n und k^* ist der Momentanpol P_{12} , zugleich die jeweilige Krümmungsmitte K von k . Der (vorzeichenbehaftete) Krümmungsradius ρ berechnet sich durch¹

$$\rho = \frac{(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{x}_1 \ddot{y}_1 - \dot{y}_1 \ddot{x}_1}. \quad (2)$$

ρ ist für – im Sinne des Durchlaufsinnes des Parameters t – linksgewunde (rechtsgewundene) Kurven positiv (negativ); der Betrag von ρ ist gleich dem Abstand von P und $K = P_{12}$.

- Der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v}_P von P ergibt sich durch Ableiten von (1):

$$\mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix}$$

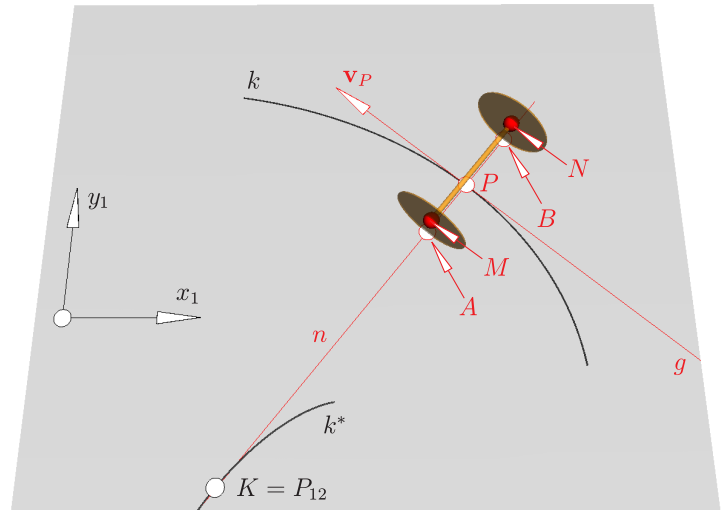
Daher erhalten wir für seinen Betrag:

$$v_P = |\mathbf{v}_P| = (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

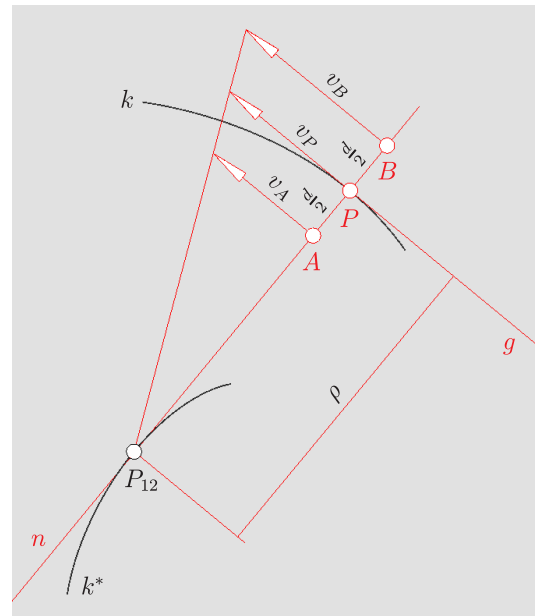
¹Siehe in einem beliebigen Lehrbuch über elementare Differentialgeometrie oder in einer Formelsammlung.

v_P ist die Momentangeschwindigkeit des Punktes P bei Σ_2/Σ_1 .

Figur 3. Die Bewegung des mobilen Roboters längs einer vorgeschriebenen Kurve k ist die Bewegung des begleitenden Zweibeins längs k .



Figur 4. Momentangeschwindigkeitsvektoren \mathbf{v}_P , \mathbf{v}_A und \mathbf{v}_B der Punkte P , A und B bei der Bewegung des mobilen Roboters.



- Wir wollen nun die Momentangeschwindigkeiten v_A und v_B der beiden unter den Radnaben M und N liegenden Punkte A und B berechnen. A bzw. B liege auf dem linken bzw. rechten "Ufer" von k im Sinne des durch den Parameter t vorliegenden Durchlaufsinns. Die zugehörigen Momentangeschwindigkeitsvektoren seien mit \mathbf{v}_A , \mathbf{v}_B bezeichnet. Die beiden Punkte A und B beschreiben bei Σ_2/Σ_1 Parallelkurven zu k im Abstand $\frac{d}{2}$. Hierbei bezeichnet d den Abstand der beiden Radnaben M und N . Da die Momentangeschwindigkeiten proportional zum Abstand vom Momentanpol P_{12} sind, erhalten wir unter Beachtung von Figur 4 die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \frac{v_B + v_A}{2} &= v_P \\ \frac{v_B - v_A}{d} &= \frac{v_P}{\rho} \end{aligned}$$

Daraus errechnen wir:

$$v_A = \frac{1}{2} \cdot v_P \cdot \left(2 - \frac{d}{\rho}\right) \quad (4)$$

$$v_B = \frac{1}{2} \cdot v_P \cdot \left(2 + \frac{d}{\rho}\right) \quad (5)$$

mit ρ und v_P gemäß (2) und (3).

Setzen wir zusätzlich

$$|\rho| \geq \frac{d}{2}$$

voraus, was bedeutet, dass die Krümmung der gegebenen Kurve k im Verhältnis zum Radabstand d nicht zu groß ist, dann sind die aus (4) und (5) berechneten Momentangeschwindigkeiten v_A und v_B stets größer gleich null. Andernfalls kann eine der beiden Momentangeschwindigkeiten v_A , v_B auch einen negativen Wert annehmen, was bedeutet, dass sich in diesem Fall die Räder in entgegengesetzte Richtungen drehen.

- Die Momentangeschwindigkeiten v_A bzw. v_B der Punkte A bzw. B stimmen mit jenen der darüberliegenden Radnaben M bzw. N überein. Ist r der Radius der Räder, dann ergibt sich daher für die gesuchten Winkelgeschwindigkeiten ω_M und ω_N :

$$\omega_M = \frac{v_A}{r} \tag{6}$$

$$\omega_N = \frac{v_B}{r} \tag{7}$$

Hierbei sind natürlich v_A und v_B gemäß (4) und (5) zu substituieren.